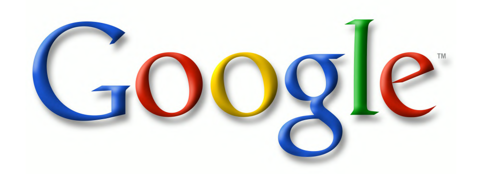
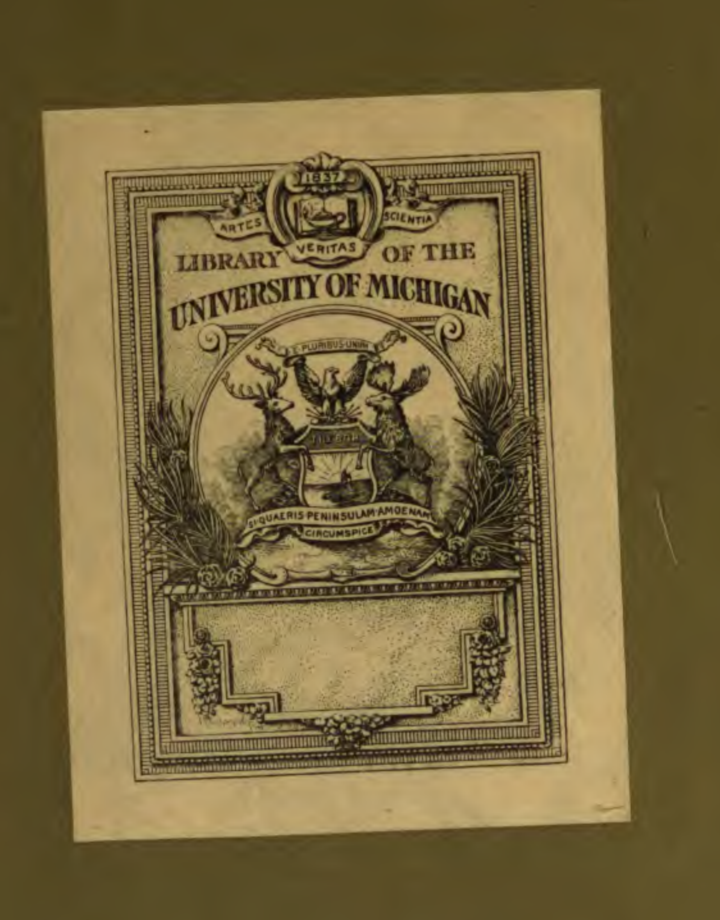



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



VORLESUNGEN

ÜBER DIE

WELLENTHEORIE DES LICHTES.

ZWEITER BAND.

Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

20008

WELLENTHEORIE DES LICHTES.

VON

Émile VERDET.

DEUTSCHE BEARBEITUNG

VON

DR. KARL EXNER.

MIT ZAHLREICHEN EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN.

II

ZWEITER BAND.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1887.

VORWORT.

Wie der erste Band dieses Werkes, so wurde auch dieser zweite und letzte Band mehrfach aus der neueren Literatur ergänzt. Ich unterlasse auch hier eine vollständige Anführung der vorgenommenen Veränderungen und beschränke mich einerseits auf die Bemerkung, dass nichts Wesentliches hinweggelassen wurde, andererseits auf die Anführung der neu eingeschalteten Paragraphen. Diese sind: Briot's Ansicht über die Dispersion (S. 27) — Weiterentwickelung der Fresnel'schen Lichttheorie (S. 27) — Anomale Dispersion (S. 29) — Anomal dispergirende Substanzen (S. 31) — Kundt's experimentelle Methode (S. 32) — Kundt's weitere Resultate (S. 34) — Anomale Dispersion und Absorption (S. 36) — Neuere Dispersionstheorie (S. 37) — Discussion der erhaltenen Gleichungen (S. 39) — Fortsetzung (S. 42) — Anomale Dispersion in festen und gasförmigen Substanzen (S. 45) — Die Brechungsexponenten gemessen durch Absorption (S. 47) — Die Brechungsexponenten gemessen durch Totalreflexion (S. 49) — Anomale Dispersion und Interferenz (S. 51) — Lichtschwebungen (S. 91) — Kirchhoff's Apparat zur Messung des Achsenwinkels (S. 163) — Dispersionsformel (S. 199) — Abhängigkeit der Drehung von der Temperatur (S. 201) — Classification der activen Substanzen (S. 236) — Magnetische Drehung (S. 245) — Abhängigkeit der Drehung vom Lösungsmittel (S. 248) — Die Doppel-

brechung in activen Flüssigkeiten (S. 249) — Das Polaristrobometer von Wild (S. 251) — Halbschattenapparate (S. 252) — Glimmercombinationen (S. 256) — Constitution flüssiger activer Substanzen (S. 286) — Das Experiment E. Mach's (S. 315) — Wirkung der Compression bei Krystallen (S. 315) — Lamellare Polarisation (S. 318) — Theoretisches (S. 320) — Die Intensitätsmessungen Glan's (S. 388) — Farben trüber Medien (S. 403) — Die neueren Arbeiten (S. 427) — Weitere Arbeiten über Krystallreflexion (S. 441) — Die Versuche Quincke's (S. 459) — Die Versuche Wernicke's (S. 466) — Brechungsexponenten und Dispersion undurchsichtiger Körper (S. 494) — Die Versuche Wernicke's (S. 502). Obgleich ich auch im ersten Bande dieses Werkes die neuen Paragraphen angeführt habe, ist doch der Inhalt des Paragraphen 38, welcher vom Einflusse der Grösse der Pupille auf die Wahrnehmbarbeit der Newton'schen Ringe bei grossen Gangunterschieden handelt, seither irrthümlicher Weise É. Verdet zugeschrieben worden.

Wien, im December 1886.

Karl Exner.

INHALT.

XXI. Theorie der Dispersion.

XXII. Chromatische Polarisation.

XXIII. Circulare und elliptische Polarisation.

XXIV. Natürliches und partiell polarisirtes Licht.

XXV. Chromatische Polarisation des parallelen Lichtes.

XXVI. Chromatische Polarisation des convergenten Lichtes.

XXVII. Circular- oder elliptisch-polarisirtes oder analysirtes Licht.

XXVIII. Rotationspolarisation.

XXVII. Circular- oder elliptisch-polarisirtes oder analysirtes Licht.

XXVIII. Rotationspolarisation.

XXIX. Accidentelle Doppelbrechung.

XXX. Fresnel's Reflexionstheorie.

XXXI. Metallreflexion.

XXI.

Theorie der Dispersion.

196. Einleitung.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles ist unabhängig von der Tonhöhe. Anders verhält es sich beim Lichte, welches Dispersion zeigt. Der Brechungsquotient, d. i. das Verhältniss zweier Fortpflanzungsgeschwindigkeiten erscheint als eine Function der Farbe. Es folgt, dass wenigstens eine der beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von der Farbe oder Schwingungsdauer abhängt. Diese Abweichung der Gezetze der Lichtfortpflanzung von jener der Schallfortpflanzung bedingt eine Schwierigkeit, welche den Schöpfern der Wellentheorie des Lichtes nicht entging [1]).

Fresnel war der erste, welcher in der Undulationstheorie des Lichtes einen Versuch einer Erklärung der Dispersion machte.

Man kann annehmen, dass in einem Schallmittel die Wirkungssphäre des Molecüls im Vergleiche mit der Wellenlänge ausserordentlich klein ist. Fresnel bemerkte nun, dass diese Voraussetzung für die Lichtschwingungen nicht mehr nothwendig zutreffen müsse und dass sich hieraus eine Differenz in der Theorie der Schall- und Lichtfortpflanzung ergeben könne, geeignet, das Phänomen der Dispersion zu erklären [2]).

Diese Idee Fresnel's wurde der Ausgangspunkt der bedeutenden Arbeiten Cauchy's über die Dispersion.

---

[1]) Siehe Euler, *Opuscula varii argumenti*, I, 217. [2]) *Second supplément au premier Mémoire sur la double réfraction. Œuvres complètes de* Fresnel, II.

Cauchy veröffentlichte seine grosse Abhandlung über die Dispersion im Jahre 1835[1]. In derselben versuchte er eine vollständige Theorie der Erscheinungen der Doppelbrechung, Polarisation und Dispersion zu geben auf Grund der Annahme eines Aethers, welcher aus durch endliche Zwischenräume getrennten anziehend oder abstossend auf einander wirkenden Molecülen besteht. Er zeigte in der That, dass, wenn man in der Rechnung gewisse Glieder höherer Ordnung beibehält, welche in der Theorie der Doppelbrechung unter der Voraussetzung vernachlässigt werden, dass die Wirkungssphäre des Aethermolecüls excessiv klein im Verhältnisse mit der Wellenlänge ist, ein Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes hervorgeht, welcher allerdings die Wellenlänge enthält. Er leitete insbesondere für die isotropen Mittel eine der experimentellen Verification zugängliche Formel ab, welche den Brechungsexponenten bezogen auf den leeren Raum als Function der Wellenlänge des Lichtes darstellt.

Cauchy betrachtet den Aether in einem ponderablen homogenen Körper als selbst homogen. Hiergegen lässt sich einwenden, dass die Einwirkung der ponderablen Molecüle auf die Aethermolecüle die Vertheilung dieser letzteren derart modificiren könne, dass die Aethermolecüle, sich um die ponderablen Molecüle gruppirend, periodische Ungleichheiten der Vertheilung zeigen. Demnach wäre der Aether in einem Krystalle nicht genau homogen zu denken. Die Vertheilung des Aethers in der Ausdehnung einer Zelle wäre nicht gleichmässig, würde sich jedoch als die nämliche an correspondirenden Punkten verschiedener Zellen wiederholen. Cauchy suchte diese Schwierigkeit zu vermeiden und zu zeigen, dass man für diesen Aether einen fictiven homogenen Aether substituiren könne[2]. Auf diesen fictiven Aether beziehen sich stets die Rechnungen Cauchy's.

Briot hat später in seinem *Essai sur la théorie mathématique de la lumière* jene durch die Körpermolecüle bewirkten periodischen Ungleichheiten des Aethers in die Rechnung eingeführt.

Wir wollen nun das Gesetz der Dispersion für isotrope Mittel zunächst nach Cauchy's Theorie ableiten, indem wir jene Vereinfachungen eintreten lassen, welche Tovey angegeben hat[3].

197. Fortpflanzung ebener Wellen in einem homogenen Mittel.

Bezeichnen wir wieder unter Voraussetzung eines homogenen, krystallinischen oder isotropen, Aethers durch x, y, z die rechtwinkligen

---

1) *Nouveaux exercices de mathématiques*, Prag, 1835, die beiden ersten Paragraphen erschienen gesondert 1830 in Paris. 2) *Mémoire sur les vibrations d'un double système de molécules et de l'éther contenu dans un corps cristallisé*, *Mém. de l'Acad. des sc.* XXII, 615. 3) *Phil. Mag.* (3), VIII, 7.

XXVII. Circular- oder elliptisch-polarisirtes oder analysirtes Licht.

XXVIII. Rotationspolarisation.

XXVII. Circular- oder elliptisch-polarisirtes oder analysirtes Licht.

XXVIII. Rotationspolarisation.

$$\Sigma \mu \psi \frac{\Delta x \Delta y}{r^2} \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta x = 0$$

$$\Sigma \mu \psi \frac{\Delta x \Delta z}{r^2} \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta x = 0$$

$$\Sigma \mu \psi \frac{\Delta y \Delta z}{r^2} \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta x = 0.$$

Die Gleichungen (5) werden:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \cos\alpha \, \Sigma \mu \left[\varphi + \psi \frac{\Delta x^2}{r^2}\right] \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta x \\ Y_1 &= \cos\beta \, \Sigma \mu \left[\varphi + \psi \frac{\Delta y^2}{r^2}\right] \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta x \\ Z_1 &= \cos\gamma \, \Sigma \mu \left[\varphi + \psi \frac{\Delta z^2}{r^2}\right] \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta x \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (8)$$

und die Gleichung des Polarisationsellipsoides:

$$\begin{aligned} & x^2 \Sigma \mu \left[\varphi + \psi \frac{\Delta x^2}{r^2}\right] \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta x \\ + \; & y^2 \Sigma \mu \left[\varphi + \psi \frac{\Delta y^2}{r^2}\right] \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta x \\ + \; & z^2 \Sigma \mu \left[\varphi + \psi \frac{\Delta z^2}{r^2}\right] \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta x = 1. \end{aligned}$$

Da das Mittel sich nach allen Richtungen senkrecht zur x-Achse gleich verhält, hat man überdies

$$\Sigma \mu \left[\varphi + \psi \frac{\Delta y^2}{r^2}\right] \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta x = \Sigma \mu \left[\varphi + \psi \frac{\Delta z^2}{r^2}\right] \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta x.$$

Das Polarisationsellipsoid ist also ein Umdrehungsellipsoid (170), dessen Umdrehungsachse auf die Wellennormale fällt, woraus folgt, dass eine zu einer bestimmten Richtung normale Planwelle sich ohne Alteration fortpflanzen kann, so oft ihre Schwingungen auf jener Richtung senkrecht stehen oder mit ihr parallel sind.

Ein und derselben Richtung normaler Fortpflanzung entspricht sonach in einem isotropen Mittel eine unendliche Menge mit derselben Geschwindigkeit fortschreitender ebener Wellen, deren Schwingungen transversal sind, in die Ebene der Welle fallen und beliebig orientirt sein können; hingegen eine einzige Welle mit longitudinalen Schwingungen und einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit, welche von jener der transversalen Wellen verschieden ist.

Beschränkt man sich auf die Betrachtung der transversalen Wellen, so verschwindet also bei den isotropen Mitteln jener Zusammenhang zwischen Fortpflanzungsrichtung und Polarisationsrichtung, welcher bei den doppeltbrechenden Mitteln besteht und die Ursache der Doppelbrechung und der sie begleitenden Polarisation ist.

Für die Welle mit longitudinalen Schwingungen hat man

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \gamma = 90^0,$$

$$X_1 = \Sigma \mu \left[\varphi + \psi \frac{\varDelta x^2}{r^2}\right] sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \varDelta x \qquad Y_1 = Z_1 = 0$$

$$U_1 = X_1$$

und es ergiebt sich folglich, wenn V_1 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Welle ist, aus der Gleichung (7)

$$V_1^2 = \frac{\lambda^2}{2\pi^2} \Sigma \mu \left[\varphi + \psi \frac{\varDelta x^2}{r^2}\right] sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \varDelta x.$$

Für die Wellen mit transversalen Schwingungen ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unabhängig von der Richtung der Schwingungen; man kann diese folglich parallel der y-Achse annehmen. In diesem Falle hat man

$$\alpha = \gamma = 90^0 \qquad \beta = 0$$

$$X_1 = Z_1 = 0 \qquad Y_1 = \Sigma \mu \left[\varphi + \psi \frac{\varDelta y^2}{r^2}\right] sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \varDelta x$$

$$U_1 = Y_1$$

und, wenn V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen mit transversalen Schwingungen vorstellt,

$$V^2 = \frac{\lambda^2}{2\pi^2} \Sigma \mu \left[\varphi + \psi \frac{\varDelta y^2}{r^2}\right] sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \varDelta x \quad . \; . \; . \; (9)$$

Nur mit dieser Geschwindigkeit haben wir uns zu beschäftigen. Um den für dieselbe gewonnenen Ausdruck nach Potenzen von λ zu entwickeln, bemerken wir, dass

$$sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \varDelta x = \frac{1}{2}\left(1 - cos \frac{2\pi}{\lambda} \varDelta x\right)$$

und entwickeln $cos \frac{2\pi}{\lambda} \varDelta x$ in eine Reihe, wodurch wir erhalten:

$$\begin{aligned} cos \frac{2\pi}{\lambda} \varDelta x &= 1 - \frac{2^2}{1.2} \frac{\pi^2}{\lambda^2} \varDelta x^2 + \frac{2^4}{1.2.3.4} \frac{\pi^4}{\lambda^4} \varDelta x^4 \\ &\quad - \frac{2^6}{1.2.3.4.5.6} \frac{\pi^6}{\lambda^6} \varDelta x^6 + \cdots \\ &= 1 - 2 \frac{\pi^2}{\lambda^2} \varDelta x^2 + \frac{2}{3} \frac{\pi^4}{\lambda^4} \varDelta x^4 - \frac{4}{45} \frac{\pi^6}{\lambda^6} \varDelta x^6 + \cdots \end{aligned}$$

Diese Reihe convergirt rasch, wenn die Molecularkräfte sich nur auf Entfernungen erstrecken, welche im Vergleiche mit der Wellenlänge klein sind, so dass $\frac{\varDelta x}{\lambda}$ innerhalb der Wirkungssphäre des Molecüls als ein kleiner Bruch angesehen werden kann. Wir nehmen an, dass dies der Fall sei.

Man findet aus dem für $cos\,\frac{2\pi}{\lambda}\,\varDelta x$ gefundenen Ausdrucke:

$$sin^2\,\frac{\pi}{\lambda}\,\varDelta x = \frac{\pi^2}{\lambda^2}\varDelta x^2 - \frac{1}{3}\frac{\pi^4}{\lambda^4}\varDelta x^4 + \frac{2}{45}\frac{\pi^6}{\lambda^6}\varDelta x^6 - \cdots$$

und

$$\begin{aligned} V^2 &= \frac{1}{2}\Sigma\mu\left[\varphi + \psi\,\frac{\varDelta y^2}{r^2}\right]\varDelta x^2 \\ &- \frac{1}{6}\,\frac{\pi^2}{\lambda^2}\Sigma\mu\left[\varphi + \psi\,\frac{\varDelta y^2}{r^2}\right]\varDelta x^4 \\ &+ \frac{1}{45}\,\frac{\pi^4}{\lambda^4}\,\Sigma\mu\left[\varphi + \psi\,\frac{\varDelta y^2}{r^2}\right]\varDelta x^6 \\ &- \frac{1}{630}\,\frac{\pi^6}{\lambda^6}\,\Sigma\mu\left[\varphi + \psi\,\frac{\varDelta y^2}{r^2}\right]\varDelta x^8 + \cdots \end{aligned}$$

Wir erhalten also für V^2 einen Ausdruck von der Form

$$V^2 = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4} + \frac{d}{\lambda^6} + \cdots \quad \cdots\cdots \quad (10)$$

Die Coëfficienten a, b, c, ... hängen nur von der Constitution des Mittels ab und ihre Werthe

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\,\Sigma\mu\,\left[\varphi + \psi\,\frac{\varDelta y^2}{r^2}\right]\,\varDelta x^2 \\ b &= -\,\frac{\pi^2}{6}\,\Sigma\mu\,\left[\varphi + \psi\,\frac{\varDelta y^2}{r^2}\right]\,\varDelta x^4 \\ c &= \frac{\pi^4}{45}\,\Sigma\mu\,\left[\varphi + \psi\,\frac{\varDelta y^2}{r^2}\right]\,\varDelta x^6 \end{aligned}$$

. . . .

nehmen rasch an Grösse ab.

Geht die Wellenlänge nicht unter eine gewisse durch das Experiment zu bestimmende Grösse herab, so nehmen die Glieder des Ausdruckes (10) ebenfalls rasch an Grösse ab und man kann sich auf die ersten Glieder der Reihe beschränken. Es folgt hieraus, dass a stets positiv sein muss. Da überdies V zugleich mit λ abnimmt, so muss b negativ sein.

200. Abwesenheit der Dispersion im leeren Raume.

Um den Ausdruck, welchen wir für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in einem isotropen Mittel erhielten, experimentell prüfen zu können, ist es nöthig, aus demselben eine Formel abzuleiten, welche den Brechungsexponenten des isotropen Mittels bezogen auf den leeren Raum als Function der Wellenlänge des leeren Raumes darstellt. Auch

ist es in Rücksicht auf die experimentelle Prüfung von Wichtigkeit, zu wissen, ob im leeren Raume die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes von der Farbe abhängt.

Zur Beantwortung der Frage nach der Existenz der Dispersion im leeren Raume lud Newton den Astronomen Flamsteed ein, genaue Beobachtungen der Ein- und Austritte der Jupitertrabanten vorzunehmen, um festzustellen, ob Farbenerscheinungen auftreten. Wäre nämlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume für verschiedene Farben verschieden und für die brechbareren Strahlen kleiner, so müsste der Satellit bei seinem Verschwinden eine Farbenfolge von Weiss bis Violett zeigen und bei seinem Erscheinen eine solche von Roth bis Weiss. Flamsteed konnte nichts derartiges wahrnehmen und als 50 Jahre später Melville[1]) und Courtivron[2]) die Aufmerksamkeit der Astronomen neuerdings auf diesen Gegenstand lenkten, ergaben sich neuerdings negative Resultate. Die geringe Helligkeit der Jupitertrabanten im Vergleiche mit jener des Planeten, sowie die kurze Dauer des Phänomens erschienen als der Sicherheit des Beobachtungsresultates abträglich. Deshalb lenkte Arago seine Aufmerksamkeit auf die Sonnenfinsternisse, welche auf der Oberfläche des Jupiter durch die Trabanten hervorgebracht werden. Gäbe es im leeren Raume eine Dispersion, so könnte der Schatten des Trabanten nicht als dunkle Scheibe auf hellem Grunde erscheinen, es müssten Farbenübergänge wahrgenommen werden. Obgleich die Bedingungen dieser Methode ungleich günstiger sind, konnte Arago nicht die geringste Farbenentwickelung wahrnehmen. Das Licht braucht, um den Weg zwischen Jupiter und Erde zurückzulegen, nur kurze Zeit. Da aus diesem Grunde kleine Unterschiede in der Lichtgeschwindigkeit der Beobachtung entgehen könnten, wandte sich Arago schliesslich den veränderlichen Sternen zu. Die Helligkeit gewisser veränderlicher Sterne variirt ungemein rasch: so geht Algol innerhalb $3^1/_2$ Stunden von der zweiten Grösse zur vierten über. Welches immer die Ursache der Helligkeitswechsel sein mag, die Rotation des Sternes oder das Dazwischentreten eines Satalliten, dieselben müssten von Farbenerscheinungen begleitet sein: der Stern müsste während der Abnahme seiner Helligkeit bläulich und während der Zunahme röthlich gefärbt erscheinen. Algol zeigt diese Farbenvariationen nicht. Da nun seine Parallaxe kleiner als eine Secunde ist, braucht das Licht wenigstens 4 Jahre, um zu uns zu gelangen, und wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des rothen und violetten Strahles um $^1/_{100\,000}$ des eigenen Werthes verschieden wären, so würde die Verspätung des violetten Strahles mindestens $^1/_4$ Stunde betragen. Die Färbung des Sternes müsste sehr merklich sein. Um einen sichern Schluss ziehen zu können, ist es nöthig, die Beobachtungen zu verschiedenen Jahreszeiten zu wiederholen. Es könnte nämlich geschehen, dass in Folge eines Zufalles dieim Momente

---

1) *Essays and Observations*, t. II, p. 12. 2) *Traité d'Optique*, *Paris*, 1752.

einer Verdunkelung abgehenden violetten Strahlen mit den im Momente der folgenden Helligkeitssteigerung abgehenden rothen Strahlen gleichzeitig auf der Erde anlangten, was ein Ausbleiben der Färbung zur Folge haben könnte. Allein diese Coincidenz könnte nur bei einer bestimmten Stellung der Erde eintreten und die Färbung müsste bei anderen Stellungen sichtbar sein.

Die Farbenwechsel, welche gewisse temporäre Sterne zeigen, wie die von Tycho-Brahe und Kepler beobachteten, sind unregelmässiger Art und kommen aus diesem Grunde hier nicht in Betracht.

Aus den Beobachtungen der veränderlichen Sterne hat sich sonach ergeben, dass im leeren Raume die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten verschiedener Farben sich nicht um $^1/_{100000}$ des eigenen Betrages von einander unterscheiden. Wir nehmen daher an, dass im leeren Raume keine Dispersion stattfindet.

201. Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Wellenlänge.

Seien für einen Strahl von bestimmter Farbe:

V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im leeren Raume,
λ die Wellenlänge im leeren Raume,
v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem festen oder flüssigen Mittel,
l die Wellenlänge in diesem Mittel,
n der Brechungsexponent des Mittels bezogen auf den leeren Raum.

Wir haben gesehen, dass die Geschwindigkeit V von λ unabhängig ist, und man hat für jede Farbe

$$n = \frac{\lambda}{l} = \frac{V}{v},$$

wo V eine Constante ist.

Man findet hieraus

$$l = \frac{\lambda}{n}$$

und wenn man diesen Werth in die Formel (10) setzt, welche für den in Rede stehenden Fall die Form

$$v^2 = a + \frac{b}{l^2} + \frac{c}{l^4} + \frac{d}{l^6} + \cdots$$

annimmt, so ergiebt sich

$$v^2 = a + \frac{bn^2}{\lambda^2} + \frac{cn^4}{\lambda^4} + \frac{dn^6}{\lambda^6} + \cdots$$

und

$$\frac{v^2}{V^2} = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{V^2}\left(a + \frac{b n^2}{\lambda^2} + \frac{c n^4}{\lambda^4} + \frac{d n^6}{\lambda^6} + \cdots\right) \quad . \quad . \quad (11)$$

Diese Gleichung giebt den Brechungsexponenten n als Function der Wellenlänge im leeren Raume. Sie kann nur näherungsweise berechnet werden. Die Coëfficienten a, b, c . . . nehmen sehr rasch an Grösse ab. Ist also λ nicht excessiv klein, so gilt dasselbe von den Gliedern in der Klammer der Gleichung (11).

Man erhält daher in erster Annäherung für n

$$\frac{1}{n^2} = \frac{a}{V^2};$$

substituirt man dies nach (11), so erhält man den genauern Werth

$$\frac{1}{n^2} = \frac{a}{V^2} + \frac{b}{a\lambda^2} + \frac{c V^2}{a^2 \lambda^4} + \frac{d V^4}{a^3 \lambda^6} + \cdots$$

Welches immer nun der Grad der Annäherung sei, mit welchem man sich begnügt, man erhält stets für $\frac{1}{n^2}$ einen Ausdruck von der Form

$$\frac{1}{n^2} = A_1 + \frac{B_1}{\lambda^2} + \frac{C_1}{\lambda^4} + \frac{D_1}{\lambda^6} + \cdots,$$

wo die Coëfficienten A_1, B_1, C_1 . . . rasch abnehmen wie a, b, c . . . Man findet hieraus für den Brechungsexponenten n einen Ausdruck von derselben Form

$$n = A' + \frac{B'}{\lambda^2} + \frac{C'}{\lambda^4} + \frac{D'}{\lambda^6} + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

In dieser Formel hängen die Coëfficienten nur von der Constitution des Mittels ab. Dieselben müssen rasch abnehmen, allein nur das Experiment kann ihre Werthe kennen lehren, und für jedes Mittel bestimmen, wie viele Glieder der Reihe genommen werden müssen, um einen hinreichend genauen Ausdruck zu erhalten.

Nur dieses ist von vornherein klar, dass, weil der Brechungsexponent mit abnehmender Wellenlänge zunimmt, der Coëfficient B des zweiten Gliedes positiv sein muss.

202. Experimentelle Verification.

Um die Formel (12) mit den Resultaten der Messungen vergleichen zu können, vernachlässigt man die Glieder der Reihe von einem bestimmten Gliede angefangen und bestimmt die Coëfficienten der beibehaltenen Glieder entweder durch eine gleiche Zahl von Beobachtungen oder durch eine grössere Zahl von Beobachtungen unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate oder endlich nach der Methode, welche Cauchy in seiner Abhandlung über die Dispersion angegeben hat.

Indem man immer mehr Glieder der Reihe berücksichtigt, erfährt man, wie viel Glieder genommen werden müssen, damit die Resultate der Rechnung und der Beobachtung Differenzen von der Grössenordnung der Beobachtungsfehler geben.

Cauchy bediente sich der Fraunhofer'schen Bestimmungen der Brechungsexponenten. Er glaubte vier Glieder der Reihe nehmen zu müssen, um hinreichend übereinstimmende Resultate zu erhalten.

Gewöhnlich sind jedoch drei Glieder mehr als genügend. Die Gleichung (12) wird dann:

$$n = A' + \frac{B'}{\lambda^2} + \frac{C'}{\lambda^4}.$$

Wenn es sich nicht um eine grosse Genauigkeit handelt, kann man sich selbst mit zwei Gliedern begnügen:

$$n = A' + \frac{B'}{\lambda^2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (13)$$

Die so vereinfachte Formel gestattet eine einfache experimentelle Prüfung, wie Beer angegeben hat. Seien $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ die Wellenlängen dreier verschiedener Farben im leeren Raume, $n_1 n_2 n_3$ die Brechungsexponenten derselben. Es folgt dann aus (13):

$$n_1 = A' + \frac{B'}{\lambda_1^2}, \quad n_2 = A' + \frac{B'}{\lambda_2^2}, \quad n_3 = A' + \frac{B'}{\lambda_3^2}$$

und man erhält hieraus

$$n_2 - n_1 = B'\left(\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}\right) \qquad n_3 - n_1 = B'\left(\frac{1}{\lambda_3^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}\right)$$

und schliesslich

$$\frac{n_2 - n_1}{n_3 - n_1} = \frac{\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}}{\frac{1}{\lambda_3^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}}.$$

Um also die Genauigkeit der Formel (13) zu prüfen, genügt es, zu sehen, ob die Differenzen der Brechungsexponenten den Differenzen der reciproken Quadrate der Wellenlängen proportional sind. Beer hat gefunden, dass die Fraunhofer'schen Werthe der Brechungsexponenten dieses Gesetz mit hinreichender Genauigkeit befolgen.

Vor Cauchy hat Baden Powell[1]) die Fraunhofer'schen Messungen durch eine empirische Formel darzustellen gesucht und gefunden

$$\frac{1}{n} = C \frac{\sin \pi \frac{D}{\lambda}}{\pi \frac{D}{\lambda}},$$

[1]) *Phil. Trans.* 1835, p. 249.

wo C und D zwei Constanten sind. Man sieht leicht, wie diese Formel sich auf jene Cauchy's reducirt. Entwickelt man $\sin \pi \frac{D}{\lambda}$ und behält nur die beiden ersten Glieder der Reihe bei, indem $\frac{D}{\lambda}$ stets ein sehr kleiner Bruch ist, so erhält man

$$\frac{1}{n} = C\left(1 - \frac{1}{2.3} \frac{\pi^2}{\lambda^2} D^2\right).$$

Entwickelt man hieraus n und beschränkt sich auf die Glieder mit λ^2, so erhält man einen Ausdruck von der Form des Ausdruckes (13).

203. Dispersion in doppeltbrechenden Mitteln.

Die für isotrope Körper abgeleitete Dispersionsformel (12) gilt für jede Lichtbewegung in krystallisirten Mitteln. Nur die Constanten der Formel sind verschieden für den ordentlichen und den ausserordentlichen Strahl und variiren mit der Fortpflanzungsrichtung [1]).

Die experimentelle Verification wurde von Beer und V. v. Lang [2]) ausgeführt und ergab eine eben so befriedigende Uebereinstimmung wie für die isotropen Körper. Bei einer von V. v. Lang an einem Arragonitprisma vorgenommenen Messung fiel der Lichtstrahl senkrecht auf die erste Prismenfläche, ging ungebrochen durch das Prisma und spaltete sich an der Austrittsfläche in zwei Strahlen. Es ergaben sich in diesem Falle für die Dispersionsformel (12) die folgenden Werthe der Constanten:

für die schnellere Welle:

$$A' = 1{\cdot}6265169$$
$$B' = 0{\cdot}006102143$$
$$C' = 0{\cdot}00004039780,$$

für die langsamere Welle:

$$A' = 1{\cdot}6617717$$
$$B' = 0{\cdot}006583451$$
$$C' = -\ 0{\cdot}00001665230.$$

Die nach Cauchy's Dispersionsformel (12) für die Fraunhofer'schen Linien a, B, C, D, E, F, G gerechneten Brechungsexponenten stimmten mit den gemessenen auf mindestens fünf Stellen überein.

---

[1]) Siehe Einleitung in die höhere Optik von August Beer, Bearbeitung von Victor v. Lang. [2]) V. v. Lang, Ueber die Dispersion des Arragonits nach arbiträrer Richtung. Sitzber. d. W. Akad. Bd. 83, II, 1881, S. 671.

204. Consequenzen, welche Cauchy aus der Abwesenheit der Dispersion im leeren Raume gezogen hat.

Cauchy nimmt an, dass im leeren Raume die Aethermolecüle ungleich näher an einander liegen, als in den Körpern.

Unter dieser Voraussetzung kann man für gewisse Summen Integrale setzen, und man erhält für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einen einfachen Ausdruck.

Wir haben für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer zur x-Achse senkrechten Planwelle mit Schwingungen parallel zur y-Achse in einem isotropen Mittel gefunden:

$$V^2 = \frac{\lambda^2}{2\pi^2} \Sigma \mu \left[\varphi + \psi \frac{\Delta y^2}{r^2}\right] \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta x.$$

Für den leeren Raum setzen wir statt des Summenzeichens ein Integralzeichen und führen Polarcoordinaten ein.

Wir nehmen das Molecül m zum Ursprunge und bezeichnen durch ω den Winkel zwischen $m\mu$ und der x-Achse, durch θ den Winkel der Ebene $\mu m x$ mit der Ebene xy. Wir haben dann

$$\Delta x = r \cos \omega \qquad \Delta y = r \sin \omega \cos \theta.$$

μ bedeutet jetzt ein Element der als continuirlich gedachten Aethermasse. Wir betrachten dieses Element als begrenzt durch zwei sphärische Flächen, deren Radien r und $r + dr$ sind, und deren Mittelpunkte auf m fallen, durch zwei Ebenen, welche durch die x-Achse gehen und mit der xy-Ebene die Winkel θ und $\theta + d\theta$ bilden, und durch zwei conische Flächen, welche als gemeinschaftliche Achse die x-Achse haben und deren Seiten mit dieser Achse die Winkel ω und $\omega + d\omega$ bilden. Das Volum des Elementes μ ist dann

$$r^2 \sin \omega \, d\theta \, dr \, d\omega,$$

und seine Masse

$$D r^2 \sin \omega \, d\theta \, dr \, d\omega,$$

wenn D die Dichte des Aethers ist.

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck für V^2, und schreibt man für das Summenzeichen ein Integralzeichen, so hat man

$$V^2 = \frac{D\lambda^2}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} r^2 [\varphi + \psi \sin^2 \omega \cos^2 \theta] \sin \omega \sin^2 \frac{\pi r \cos \omega}{\lambda} \, d\theta \, d\omega \, dr.$$

Die Grenzen sind o und 2π für θ, o und π für ω, 0 und ∞ für r. Die Integration nach θ ausgeführt giebt:

$$V^2 = \frac{D\lambda^2}{2\pi}\left[2\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} r^2 \varphi \sin\omega \sin^2\frac{\pi r \cos\omega}{\lambda}\, d\omega\, dr\right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi}\int_0^{\infty} r^2 \psi \sin^3\omega \sin^2\frac{\pi r \cos\omega}{\lambda}\, d\omega\, dr\right].$$

Integrirt man nun nach ω, so hat man

$$2\int_0^{\pi} \sin\omega \sin^2\frac{\pi r\cos\omega}{\lambda}\, d\omega = \int_0^{\pi}\left(1 - \cos\frac{2\pi\cos\omega}{\lambda}\right)\sin\omega\, d\omega$$

$$= \left(-\cos\omega + \frac{\lambda}{2\pi r}\sin\frac{2\pi r\cos\omega}{\lambda}\right)_0^{\pi}$$

$$= 2 - \frac{\lambda}{\pi r}\sin\frac{2\pi}{\lambda} r;$$

der erste Theil des Ausdruckes für V^2 wird also

$$\frac{D\lambda^2}{\pi}\int_0^{\infty} r^2\varphi\, dr - \frac{D\lambda^3}{2\pi^2}\int_0^{\infty} r\varphi \sin\frac{2\pi}{\lambda} r\, dr.$$

Andererseits erhält man durch Integration nach ω des zweiten Theiles

$$\int_0^{\pi} \sin^3\omega \sin^2\frac{\pi r\cos\omega}{\lambda}\, d\omega = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(1 - \cos\frac{2\pi r\cos\omega}{\lambda}\right)\sin^3\omega\, d\omega,$$

und

$$\int_0^{\pi}\sin^3\omega\, d\omega = \int_0^{\pi}\sin\omega(1-\cos^2\omega)\, d\omega = \left(-\cos\omega + \frac{1}{3}\cos^3\omega\right)_0^{\pi} = \frac{4}{3}.$$

Integrirt man nun *per partes*, so erhält man successive

$$\int \sin^3\omega\cos\frac{2\pi r\cos\omega}{\lambda}\, d\omega = -\frac{\lambda}{2\pi r}\sin^2\omega \sin\frac{2\pi r\cos\omega}{\lambda}$$

$$+ \frac{\lambda}{\pi r}\int \sin\omega\cos\omega\sin\frac{2\pi r\cos\omega}{\lambda}\, d\omega,$$

$$\int \sin\omega\cos\omega\sin\frac{2\pi r\cos\omega}{\lambda}\, d\omega = \frac{\lambda}{2\pi r}\cos\omega\cos\frac{2\pi r\cos\omega}{\lambda}$$

$$+ \frac{\lambda}{2\pi r}\int \sin\omega\cos\frac{2\pi r\cos\omega}{\lambda}\, d\omega,$$

$$\int \sin\omega\cos\frac{2\pi r\cos\omega}{\lambda}\, d\omega = -\frac{\lambda}{2\pi r}\sin\frac{2\pi r\cos\omega}{\lambda};$$

woraus sich ergiebt:

$$\int sin^3 \omega \cos \frac{2\pi r \cos\omega}{\lambda} d\omega = -\frac{\lambda}{2\pi r} sin^2 \omega \sin \frac{2\pi r \cos\omega}{\lambda} + \frac{\lambda^2}{2\pi^2 r^2} \cos\omega \cos \frac{2\pi r \cos\omega}{\lambda} - \frac{\lambda^3}{4\pi^3 r^3} \sin \frac{2\pi r \cos\omega}{\lambda},$$

$$\int_0^\pi sin^3 \omega \cos \frac{2\pi r \cos\omega}{\lambda} d\omega = -\frac{\lambda^2}{\pi^2 r^2} \cos \frac{2\pi}{\lambda} r + \frac{\lambda^3}{2\pi^3 r^3} \sin \frac{2\pi}{\lambda} r,$$

$$\int_0^\pi sin^3 \omega \sin^2 \frac{\pi r \cos\omega}{\lambda} d\omega = \frac{2}{3} + \frac{\lambda^2}{2\pi^2 r^2} \cos \frac{2\pi}{\lambda} r - \frac{\lambda^3}{4\pi^3 r^3} \sin \frac{2\pi}{\lambda} r.$$

Setzt man dies in den Ausdruck für V^2, so hat man

$$V^2 = \frac{D\lambda^2}{\pi} \int_0^\infty r^2 \varphi\, dr - \frac{D\lambda^3}{2\pi^2} \int_0^\infty r \varphi \sin \frac{2\pi}{\lambda} r\, dr + \frac{D\lambda^2}{3\pi} \int_0^\infty r^2 \psi\, dr + \frac{D\lambda^4}{4\pi^3} \int_0^\infty \psi \cos \frac{2\pi}{\lambda} r\, dr - \frac{D\lambda^5}{8\pi^4} \int_0^\infty \frac{\psi}{r} \sin \frac{2\pi}{\lambda} r\, dr,$$

und setzt man

$$\varphi = \frac{f(r)}{r}, \quad \psi = f'(r) - \frac{f(r)}{r},$$

so ergiebt sich schliesslich

$$V^2 = \frac{D\lambda^2}{\pi} \Big[\frac{2}{3} \int_0^\infty r f(r)\, dr - \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\infty f(r) \sin \frac{2\pi}{\lambda} r\, dr + \frac{1}{3} \int_0^\infty r^2 f'(r)\, dr + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \int_0^\infty f'(r) \cos \frac{2\pi}{\lambda} r\, dr - \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{f(r)}{r} \cos \frac{2\pi}{\lambda} r\, dr - \frac{\lambda^3}{8\pi^3} \int_0^\infty \frac{f'(r)}{r} \sin \frac{2\pi}{\lambda} r\, dr + \frac{\lambda^3}{8\pi^3} \int_0^\infty \frac{f(r)}{r^2} \sin \frac{2\pi}{\lambda} r\, dr \Big].$$

Um nach r zu integriren, genügt es, zu bemerken, dass

$$\frac{2}{3} r f(r) + \frac{1}{3} r^2 f'(r) = \frac{d}{dr} \Big[\frac{1}{3} r^2 f(r) \Big],$$

$$\frac{\lambda^2}{4\pi^2} f'(r) \cos \frac{2\pi}{\lambda} r - \frac{\lambda}{2\pi} f(r) \sin \frac{2\pi}{\lambda} r = \frac{d}{dr} \Big[\frac{\lambda^2}{4\pi^2} f(r) \cos \frac{2\pi}{\lambda} r \Big],$$

$$- \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \frac{f(r)}{r} \cos \frac{2\pi}{\lambda} r - \frac{\lambda^3}{8\pi^3} \frac{f'(r)}{r} \sin \frac{2\pi}{\lambda} r + \frac{\lambda^3}{8\pi^3} \frac{f(r)}{r^2} \sin \frac{2\pi}{\lambda} r = \frac{d}{dr} \Big(- \frac{\lambda^3}{8\pi^3} \frac{f(r)}{r} \sin \frac{2\pi}{\lambda} r \Big).$$

Man erhält so

$$V^2 = \frac{D\lambda^2}{\pi}\left[\frac{1}{3}\,r^2 f(r) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} f(r)\cos\frac{2\pi}{\lambda}r - \frac{\lambda^3}{8\pi^3}\frac{f(r)}{r}\sin\frac{2\pi}{\lambda}r\right]_0^\infty.$$

Bezeichnen wir durch M die Grösse in der Klammer, und durch M_0 und M_∞ die Werthe, welche dieselbe für $r = o$ und $r = \infty$ annimmt. Da $f(r)$ für ein unendlich grosses r Null wird, ist M_∞ die Grenze, welcher sich die Grösse $\frac{1}{3}\,r^2 f(r)$ für $r = \infty$ nähert. Wir bezeichnen diese Grenze durch $\frac{1}{3}\,[r^2 f(r)]_\infty$. Um den Werth von M_0 zu bestimmen, entwickeln wir $\cos\frac{2\pi}{\lambda}r$ und $\sin\frac{2\pi}{\lambda}r$ in Reihen. Dies giebt

$$M = \frac{1}{3}\,r^2 f(r)\,\frac{\lambda^2}{4\pi^2} f(r)\left(1 - \frac{1}{1.2}\frac{4\pi^2}{\lambda^2}r^2 + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{16\pi^4}{\lambda^4}r^4 - \cdots\right)$$

$$- \frac{\lambda^3}{8\pi^3}\frac{f(r)}{r}\left(\frac{2\pi}{\lambda}r - \frac{1}{1.2.3}\frac{8\pi^3}{\lambda^3}r^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}\frac{32\pi^5}{\lambda^5}r^5 - \cdots\right).$$

Die Glieder, welche r in einer niedrigeren als der vierten Potenz enthalten, heben sich gegenseitig auf. Die Grenze von M für $r = 0$ ist also $\frac{2}{15}\frac{\pi^2}{\lambda^2}[r^4 f(r)]_0$. Setzen wir die Werthe von M_0 und M_∞ in den Ausdruck für V^2, so ergiebt sich

$$V^2 = \frac{D\lambda^2}{\pi}(M_\infty - M_0) = \frac{D\lambda^2}{3\pi}[r^2 f(r)]_\infty - \frac{2}{15}D\pi\,[r^4 f(r)]_0.$$

Soll nun die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im leeren Raume von λ unabhängig sein, so muss das erste Glied dieses Ausdrückes verschwinden, so dass man hat

$$[r^2 f(r)]_\infty = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Da andererseits die Fortpflanzungsgeschwindigkeit positiv, endlich und constant sein muss, hat man, wenn K eine Constante bedeutet, auch

$$[r^4 f(r)]_0 = -K^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Diese beiden Bedingungen sind erfüllt, wenn man annimmt, dass im leeren Raume die gegenseitige Wirkung zweier Aethermolecüle repulsiv und der vierten Potenz der Entfernung verkehrt proportional ist. Denn dann hat man

$$f(r) = -\frac{K^2}{r^4}$$

und

$$r^2 f(r) = -\frac{K^2}{r^2},$$

welche Grösse für $r = \infty$ Null wird, und

$$r^4 f(r) = - K^2$$

in Uebereinstimmung mit der zweiten Bedingungsgleichung.

Die Lösung, welche wir gegeben haben, ist nicht die einzige mit den Gleichungen (1) und (2) verträgliche. Diesen Gleichungen ist auch dann genügt, wenn die Wirkung der Molecüle für kleine Distanzen das Gesetz der vierten Potenz befolgt und für grössere Distanzen kleiner bleibt, als es dieses Gesetz verlangt.

Diese Schlüsse, welche Cauchy gezogen hat, sind an die Bedingung eines continuirlichen Aethers geknüpft, und haben keine Anwendung auf den Aether in einem ponderablen Mittel.

205. Fortpflanzung ebener Wellen in einem isotropen Mittel.

Wir gehen von den Gleichungen (1) in (162) aus, welche auf jedes homogene Mittel anzuwenden sind und für alle Vibrationsbewegungen mit der einzigen Einschränkung sehr kleiner Verschiebungen der Molecüle Geltung haben, und schreiben dieselben:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \Sigma\mu\left\{\left[\varphi + \psi\,\frac{\Delta x^2}{r^2}\right]\Delta\xi + \psi\frac{\Delta x\,\Delta y}{r^2}\Delta\eta + \psi\,\frac{\Delta x\,\Delta z}{r^2}\Delta\zeta\right\}\\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= \Sigma\mu\left\{\psi\,\frac{\Delta x\,\Delta y}{r^2}\,\Delta\xi + \left[\varphi + \psi\,\frac{\Delta y^2}{r^2}\right]\Delta\eta + \psi\,\frac{\Delta y\,\Delta z}{r^2}\,\Delta\zeta\right\}\\
\frac{d^2\zeta}{\delta t^2} &= \Sigma\mu\left\{\psi\,\frac{\Delta x\,\Delta z}{r^2}\,\Delta\xi + \psi\,\frac{\Delta y\,\Delta z}{r^2}\,\Delta\eta + \left[\varphi + \psi\,\frac{\Delta z^2}{r^2}\right]\Delta\zeta\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

Entwickeln wir $\xi + \Delta\xi$, $\eta + \Delta\eta$, $\zeta + \Delta\zeta$ in die Taylor'sche Reihe, so ergiebt sich

$$\Delta\xi = \frac{d\xi}{dx}\Delta x + \frac{d\xi}{dy}\Delta y + \frac{d\xi}{dz}\Delta z + \frac{1}{2}\frac{d^2\xi}{dx^2}\Delta x^2 + \frac{1}{2}\frac{d^2\xi}{dy^2}\Delta y^2$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{d^2\xi}{dz^2}\Delta z^2 + \frac{d^2\xi}{dx\,dy}\Delta x\,\Delta y + \frac{d^2\xi}{dx\,dz}\Delta x\,\Delta z + \frac{d^2\xi}{dy\,dz}\Delta y\,\Delta z\ldots$$

und man erhält zwei analoge Ausdrücke für $\Delta\eta$ und $\Delta\zeta$.

Da die Molecularkräfte nur auf sehr geringe Distanzen wirken, sind $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ stets sehr klein, und jene Reihen sind convergent.

Ist das betrachtete Mittel nicht hemiedrisch, so entspricht jedem Molecüle $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, ein Molecül $x - \Delta x$, $y - \Delta y$, $z - \Delta z$, und für beide Molecüle haben φ und ψ dieselben Werthe. Setzen wir also in (14) für $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ die gefundenen Werthe, so verschwinden bei der Summation alle Glieder, welche Δx, Δy, Δz in ungerader Potenz enthalten, und es bleiben jene Glieder, welche die

Differentialquotienten gerader Ordnung von ξ, η, ζ in Bezug auf x, y, z enthalten. Die Coefficienten dieser Glieder sind constante Summen, welche nur von der Constitution des Mittels abhängen.

Nehmen wir nun an, es pflanze sich ein System strenge transversaler Planwellen in einem isotropen Mittel fort. Wir können unbeschadet der Allgemeinheit die Wellenebene senkrecht zur z-Achse voraussetzen. ζ ist nun stets Null, ξ und η erscheinen als Functionen von z und der Zeit. Die Differentialquotienten von ξ und η nach x und y verschwinden in den Gleichungen (14) und diese werden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= A\,\frac{d^2\xi}{dz^2} + B\,\frac{d^4\xi}{dz^4} + C\,\frac{d^6\xi}{dz^6} + \cdots \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= A\,\frac{d^2\eta}{dz^2} + B\,\frac{d^4\eta}{dz^4} + C\,\frac{d^6\eta}{dz^6} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

A, B, C sind Constanten, welche nur von der Constitution des Mittels abhängen und in Folge der Symmetrie in correspondirenden Gliedern der Gleichungen (15) gleiche Werthe haben.

Die Gleichungen (15) stellen die Bewegung transversaler Planwellen dar, welche sich in einem isotropen Mittel in der Richtung der z-Achse fortpflanzen.

Die einfachste Lösung der Differentialgleichungen (15) ist

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a \sin(kz - st + \varphi) \\ \eta &= b \sin(kz - st + \chi) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

wo a, b, φ und χ unbestimmte Constanten sind, während s und k durch die Gleichung

$$s^2 = Ak^2 + Bk^4 + Ck^6 + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

verknüpft sind.

Aus der Unbestimmtheit der Constanten a, b, φ, χ folgt, dass die Bewegungscomposanten nach x und y der Intensität und Phase nach unbestimmt sind, oder dass in einem isotropen Mittel eine Planwelle mit transversalen Schwingungen sich ohne Alteration fortpflanzen kann, welche Gestalt und Orientation immer die von den Molecülen beschriebenen Bahnen haben mögen.

Ist T die Schwingungsdauer, so folgt aus (16)

$$T = \frac{2\pi}{s}$$

und

$$s = \frac{2\pi}{T}.$$

Vergrössert sich z um ein Vielfaches von $\frac{2\pi}{k}$, so nehmen ξ und η wieder dieselben Werthe an. Ist also l die Wellenlänge, so hat man

$$l = \frac{2\pi}{k}$$

und

$$k = \frac{2\pi}{l}.$$

Man erhält hieraus für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v des Lichtes in dem betrachteten Mittel

$$v = \frac{l}{T} = \frac{s}{k}.$$

Setzt man die Werthe von s und k nach (17), so erhält man

$$\frac{1}{T^2} = \frac{A}{l^2} + B\frac{(2\pi)^2}{l^4} + C\frac{(2\pi)^4}{l^6} + \cdots$$

oder

$$v^2 = A + B\frac{(2\pi)^2}{l^2} + C\frac{(2\pi)^4}{l^4} + \cdots \quad \ldots \quad (18)$$

Diese Gleichung giebt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit als Function der Wellenlänge und der Constanten A, B, $C\ldots$ Sie ist von derselben Form wie die früher auf andere Weise erhaltene Gleichung (10).

Man kann bemerken, dass v unabhängig ist von a, b, φ, χ, also dass in einem isotropen Mittel die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer ebenen Welle von der Form und Orientation der von den schwingenden Molecülen beschriebenen Bahnen nicht abhängt.

Die Gleichung (18) gestattet, den Brechungsindex des Mittels als Function der Wellenlänge im leeren Raume darzustellen. Sind nämlich n der Brechungsindex und V, λ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Wellenlänge im leeren Raume, so hat man

$$n = \frac{\lambda}{l} = \frac{V}{v}$$

und die Gleichung (18) nimmt die Form an:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{A}{V^2} + B\frac{(2\pi)^2}{V^2\lambda^2}n^2 + C\frac{(2\pi)^4}{V^2\lambda^4}n^4 + \cdots \quad \ldots \quad (19)$$

Diese Formel ist für die experimentelle Prüfung unbequem. Wir wollen sie daher durch eine geeignetere ersetzen. Wir nehmen zu diesem Zwecke mit Cauchy an, dass die Coefficienten A, B, $C\ldots$ sehr rasch an Grösse abnehmen. Zu dieser Annahme gelangt man durch Betrachtung der Summen, welche diese Coefficienten vorstellen. Ist also die Länge einer Welle nicht unter einer gewissen nur durch das Experiment zu bestimmenden Grenze, so ist die Reihe (17) rasch convergent und man kann sich mit den ersten Gliedern derselben begnügen. Wenden wir auf diese Gleichung Lagrange's Theorem über die Umkehrung der Reihen an, so erhalten wir k^2 entwickelt in eine Reihe von der Form

$$k^2 = A_2 s^2 + B_2 s^4 + C_2 s^6 + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Um die Coefficienten A_2, B_2, $C_2 \ldots$ zu bestimmen, genügt es, die aus (17) genommenen Werthe von s^2, s^4, $s^6 \ldots$ nach (20) zu substituiren, nämlich

$$s^2 = A\,k^2 + Bk^4 + Ck^6 + \cdots$$
$$s^4 = A^2 k^4 + 2ABk^6 + \cdots$$
$$s^6 = A^3 k^6 + \cdots$$

. . . .

Die Gleichung (20) wird dann:

$$k^2 = AA_2 k^2 + (BA_2 + A^2 B_2) k^4 + (CA_2 + 2ABB_2 + A^3 C_2) k^6 + \cdots,$$

woraus sich ergiebt

$$AA_2 = 1, \quad BA_2 + A^2 B_2 = 0, \quad CA_2 + 2ABB_2 + A^3 C_2 = 0,$$

. . . .

und folglich

$$A_2 = \frac{1}{A}, \quad B_2 = -\frac{BA_2}{A^2}, \quad C_2 = -\frac{CA_2 + 2ABB_2}{A^3} = -\frac{CA - 2B^2}{A^5},$$

. . . .

Man sieht, wenn die Coefficienten A, B, C . . . als sehr kleine Grössen der ersten, dritten, fünften . . . Ordnung angesehen werden können, so sind $\frac{B}{A^2}$, $\frac{C}{A^3}$, . . . sehr klein der ersten, zweiten . . . Ordnung und folglich nehmen die Coefficienten A_2, B_2, C_2 . . . sehr rasch an Grösse ab. Aus (20) erhält man für k einen Ausdruck von der Form

$$k = \alpha s + \alpha' s^2 + \beta s^3 + \beta' s^4 + \gamma s^5 + \gamma' s^6 + \cdots;$$

da jedoch k^2 nur die geraden Potenzen von s enthält, so sind die Coefficienten $\alpha', \beta', \gamma' \ldots$ der Null gleich, und es bleibt

$$k = \alpha s + \beta s^3 + \gamma s^5 + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Um α, β, γ ... als Functionen der in den Differentialgleichungen vorkommenden Coefficienten A, B, C . . . darzustellen, muss man sich in diesen Gleichungen und in der Gleichung (17) auf eine bestimmte Zahl Glieder beschränken. Beschränkt man sich auf drei Glieder, so wird die Gleichung (17)

$$s^2 = Ak^2 + Bk^4 + Ck^6.$$

In diese Gleichung muss man den durch die Gleichung (21) gegebenen Werth von k substituiren. Vernachlässigt man die Glieder, welche s in einer höheren als der sechsten Potenz enthalten, so ergiebt sich

$$s^2 = A(\alpha^2 s^2 + \beta^2 s^6 + 2\alpha\beta s^4 + 2\alpha\gamma s^6) + B(\alpha^4 s^4 + 4\alpha^3\beta s^6) + C\alpha^6 s^6,$$

also

$$1 - A\alpha^2 = 0,$$
$$2\alpha\beta A + \alpha^4 B = 0,$$
$$(\beta^2 + 2\alpha\gamma)A + 4\alpha^3\beta B + C\alpha^6 = 0,$$

und folglich

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad \beta = -\frac{B}{2A^2\sqrt{A}}, \quad \gamma = \frac{7B^2 - 4AC}{8A^4\sqrt{A}}.$$

Setzt man dies nach (21), so ergiebt sich

$$k = \frac{s}{\sqrt{A}} - \frac{Bs^3}{2A^2\sqrt{A}} + \frac{(7B^2 - 4AC)s^5}{8A^4\sqrt{A}},$$

und bemerkt man, dass

$$s = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi V}{\lambda}, \quad n = \frac{\lambda}{l} = \frac{\lambda k}{2\pi},$$

so erhält man für den Brechungsexponenten

$$n = \frac{V}{\sqrt{A}} - \frac{4\pi^2 B V^3}{2A^2\sqrt{A}}\frac{1}{\lambda^2} + \frac{16\pi^4(7B^2 - 4AC)V^5}{8A^4\sqrt{A}}\frac{1}{\lambda^4}.$$

Setzt man

$$a = \frac{V}{\sqrt{A}}, \quad b = -\frac{2\pi^2 B V^3}{A^2\sqrt{A}}, \quad c = \frac{2\pi^4(7B^2 - 4AC)V^5}{A^4\sqrt{A}},$$

$$p = \frac{b}{a} = -\frac{2\pi^2 B V^2}{A^2}, \quad q = \frac{c}{a} = \frac{2\pi^4(7B^2 - 4AC)V^4}{A^4},$$

so hat man schliesslich

$$n = a\left(1 + \frac{p}{\lambda^2} + \frac{q}{\lambda^4}\right).$$

Dieser Ausdruck für den Brechungsexponenten ist von derselben Form, wie der schon früher erhaltene (202); allein die zuletzt angewendete Methode gewährt den Vortheil, die Coefficienten a, p, q als Functionen der in den Differentialgleichungen der schwingenden Bewegung vorkommenden Coefficienten A, B, C... darstellen zu können.

Die Coefficienten a, p, q können direct durch das Experiment bestimmt werden, und man kann die erhaltenen Werthe dazu benutzen, mittelst der obigen Formeln die Werthe von A, B, C... zu finden.

206. Cristoffel's Dispersionsformel.

Das Experiment erwies sich jener Annahme Cauchy's nicht als hinreichend günstig, welche sich auf die Abnahme der Coefficienten A, B, C... bezieht, wie sich zeigt, wenn man die Brechungsexponenten

durch eine nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{\lambda^2}$ geordnete Reihe ausdrückt und sodann in der angegebenen Weise die Coefficienten A, B, C rechnet. Andererseits lassen die Reihen, durch welche diese Coefficienten gegeben sind, Cauchy's Annahme zwar plausibel erscheinen, beweisen dieselbe jedoch nicht strenge.

Cristoffel[1]) legte sich daher die Frage vor, ob nicht durch ein eingehenderes Studium der Natur dieser Coefficienten eine vollkommenere Dispersionsformel erhalten werden könne.

Theoretische Betrachtungen, auf welche wir nicht eingehen, liessen ihn die beiden ersten Coefficienten A und B als von derselben Grössenordnung annehmen, während die übrigen eine rasch abnehmende Reihe bilden sollten, deren erstes Glied schon sehr klein gegen B war. Von dieser Hypothese ausgehend, gelangt man zu einer Dispersionsformel mit zwei Constanten.

Ist die Wellenlänge l in dem betrachteten Mittel hinreichend klein, so kann es, trotz der rapiden Abnahme der Coefficienten von C angefangen nothwendig werden, eine grosse Zahl Glieder der Reihe (19) einzubeziehen, und man gelangt zu keiner einfachen Relation zwischen dem Brechungsexponenten und der Wellenlänge. Ist hingegen l so gross, dass man sich auf die zwei ersten Glieder der Reihe beschränken kann, so hat man die einfache Relation

$$V^2 = A n^2 + \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} B n^4 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

Cristoffel hat seine Untersuchungen auf diesen Fall beschränkt und es dem Experimente überlassen, die untere Grenze für l zu bestimmen.

Man kann die Gleichung (22) auf die Form bringen

$$\frac{1}{n^2} = \frac{A}{V^2} + \frac{(2\pi)^2}{V^2 \lambda^2} B n^2$$

oder

$$1 = \frac{A}{V^2} n^2 + \frac{(2\pi)^2}{V^2 \lambda^2} B n^4.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen beweist, dass B negativ ist, denn $\frac{1}{n^2}$ nimmt gleichzeitig mit λ ab; die zweite beweist, dass A positiv ist.

Man setze nun

$$\frac{A}{V^2} = \frac{2}{n_0^2}, \quad \frac{4\pi^2 B}{V^2} = -\frac{\lambda_0^2}{n_0^4},$$

so dass n_0 und λ_0 positive Constanten bedeuten.

---

[1]) Berl. Monatsber. 1861, S. 906, 997. — Pogg. Ann. CXVII, 27. — *Ann. de phys. et de chim.* (3), LXIV, 370.

Hierdurch wird die Gleichung (22):

$$\frac{\lambda_0^2}{n_0^4 \lambda^2} n^4 - \frac{2}{n_0^2} n^2 + 1 = 0,$$

aus welcher man erhält

$$n = \frac{n_0 \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda}} + \sqrt{1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}}}.$$

Die beiden Wurzeln rechnen positiv. Würde man nämlich die erste derselben negativ rechnen, so erhielte man ein negatives n, und würde man die erste positiv und die zweite negativ rechnen, so erhielte man für n einen mit λ wachsenden Werth, was der Erfahrung widerspricht.

Diese Formel ist nicht anwendbar, wenn λ unter einen gewissen, durch das Experiment zu bestimmenden Werth herabsinkt. Sieht man für einen Augenblick von dieser Bedingung ab, so erhalten n_0 und λ_0 eine bestimmte physikalische Bedeutung. Man sieht, dass in dem Ausdrucke für n die Wellenlänge λ nicht kleiner als λ_0 werden könnte, ohne dass n imaginär würde entsprechend einer totalen Reflexion. λ_0 wäre also der kleinste Werth von λ, für welchen noch Berechnung möglich wäre. Setzt man in den für den Brechungsexponenten gefundenen Ausdrücken $\lambda = \lambda_0$, so ergiebt sich $n = n_0$.

Für die meisten jener Substanzen, welche der Messung unterworfen worden sind, ist λ_0 sehr klein im Vergleiche mit der Wellenlänge des brechbarsten der sichtbaren Strahlen. Nur eine Lösung von Phosphor in Schwefelkohlenstoff, welche von Dale und Gladstone[1]) untersucht wurde, macht eine Ausnahme. Hier ist λ_0 grösser als das nach Esselbach der Linie R des ultravioletten Spectrums entsprechende λ.

Andererseits wird für $\lambda = \infty$ der Brechungsexponent $n = \frac{n_0}{\sqrt{2}}$, und hierdurch ist eine untere Grenze für den Brechungsexponenten gegeben.

Das Spectrum einer jeden Substanz wäre also zu beiden Seiten begrenzt durch Strahlen, welche den Brechungsexponenten n_0 und $\frac{n_0}{\sqrt{2}}$ entsprechen.

Cristoffel's Formel schliesst sich hinreichend genau an das Experiment an, doch minder genau als Cauchy's Formel mit drei Gliedern.

Redtenbacher hat in seinem Werke „Das Dynamidensystem" von seinem theoretischen Standpunkte aus die folgende Formel in Vorschlag gebracht:

$$\frac{1}{n^2} = a + b\lambda^2 + \frac{c}{\lambda^2},$$

1) *Ann. de chim. et de phys.* (3) LVIII, 125.

welche sich von den Formeln Cauchy's und Cristoffel's durch das Glied mit λ^2 unterscheidet.

207. Briot's Ansicht über die Dispersion.

Briot schreibt in seinem *Essai sur la théorie mathématique de la lumière* die Dispersion der Einwirkung der Körpermolecüle zu. Diese Einwirkung kann nach Briot eine doppelte sein: es kann die Bewegung der Aethermolecüle durch die von den Körpermolecülen ausgehenden Kräfte beeinflusst werden, oder es kann schon vor aller Vibration die Vertheilung der Aethermolecüle in ihren Gleichgewichtslagen alterirt werden, d. i., es können durch die Körpermolecüle periodische Ungleichheiten in der Vertheilung der Aethermolecüle verursacht, und hierdurch die gegenseitigen Kraftwirkungen der Aethermolecüle unter einander alterirt werden. Diese beiden Arten der Einwirkung der Körpermolecüle auf die Aethermolecüle hat Briot der Rechnung unterworfen und gefunden, dass die directe Einwirkung der Körpermolecüle auf die Schwingungen des Aethers in den Ausdruck für die Lichtgeschwindigkeit ein λ^2 proportionales Glied einführt. Beschränkt man sich aber auf die durch die Anwesenheit der Körpermolecüle verursachten periodischen Ungleichheiten in der Vertheilung der Aethermolecüle, so gelangt man zu einer Formel, welche jener Cauchy's analog ist.

Indem nun Briot jenes Glied der Null gleich setzt, welches die Anwesenheit der Dispersion im leeren Raume anzeigt, gelangt er zu einer Relation, aus welcher hervorgeht, dass die Aethermolecüle sich mit einer der sechsten Potenz der Entfernung verkehrt proportionalen Kraft abstossen, zu welchem Gesetze er schon früher durch seine Studien über die Doppelbrechung gelangt war. Indem er ferner das dem Quadrate der Wellenlänge proportionale Glied unterdrückt, welches die directe Einwirkung der Körpermolecüle auf die Aetherschwingungen repräsentirt, gelangt er zu dem merkwürdigen Resultate, dass die Kraft zwischen den Körper- und Aethermolecülen dem Quadrate der Entfernung verkehrt proportional ist.

208. Weiterentwickelung der Fresnel'schen Lichttheorie.

Fresnel, von der Vorstellung ausgehend, dass der Aether wegen der excessiven Kleinheit der Lichtschwingungen wie ein fester Körper schwinge, und dass der Aether zwischen den Molecülen eines Krystalls durch die Einwirkung dieser Molecüle in einen Zustand versetzt sei, in

welchem er in verschiedenen Richtungen verschiedene Elasticität besitzt, gelangte a priori zu jenen Gesetzen der Doppelbrechung, welche die Fresnel'schen Gesetze genannt werden und durch das Experiment in so ausserordentlichem Grade bestätigt worden sind, dass jede Theorie der Doppelbrechung von vornherein zu verwerfen ist, welche nicht auf diese Gesetze führt.

Cauchy, welcher sich schon seit dem Jahre 1822 mit der Theorie der Elasticität beschäftigt hatte, machte im Jahre 1829 die erste Anwendung dieser seiner Studien auf die Optik, und beschäftigte sich in einer langen Reihe von Abhandlungen mit diesem Gegenstande. Von denselben Grundvorstellungen ausgehend wie Fresnel, führte er doch die Berechnung in vorwurfsfreierer Weise durch. Auch er gelangte zu den Fresnel'schen Gesetzen, und durch Beibehaltung von Gliedern höherer Ordnung in seiner Entwickelung auch zu einer Erklärung der Dispersion und zur Aufstellung seiner Dispersionsformel. Seine Erklärung der Dispersion stösst jedoch auf Schwierigkeit, wenn es sich darum handelt, die Abwesenheit der Dispersion im leeren Raume zu erklären. Ebenso ergaben sich bei der Erklärung der Reflexion und Refraction, wenn es sich darum handelte, sein sogenanntes Continuitätsprincip mit seiner Grundannahme einer nach verschiedenen Richtungen verschiedenen Elasticität verträglich zu machen, Schwierigkeiten, welche zu beseitigen Cauchy wiederholt versucht hat, ohne sie je befriedigend zu überwinden.

Unter den Schülern und Nachfolgern Cauchy's ist Briot hervorragend. Er entwickelte seine Theorie in dem Werkchen *Essais sur la théorie de la lumière* und behandelte den auf Reflexion und Refraction bezüglichen Theil getrennt[1]). Briot ging ab von der Vorstellung des krystallinischen Aethers, namentlich weil sonst auch die Krystalle des regulären Systems das Licht hätten polarisiren müssen. Er betrachtete den Aether in den Krystallen in erster Annäherung als aus einem isotropen Aether durch Compressionen in verschiedenen Richtungen entstanden (161). Man weiss, dass beliebig viele solche Compressionen durch drei auf einander senkrechte Compressionen ersetzt werden können. Briot's Theorie ist im Wesentlichen noch die Cauchy's, und besteht zum Theil in der Ausführung von Rechnungen, welche Cauchy nur angedeutet hatte. Er verwarf jedoch Cauchy's Theorie der Dispersion wegen der Abwesenheit der Dispersion im leeren Raume. Indem er den zwischen den Molecülen des lichtbrechenden Körpers befindlichen Aether in zweiter Annäherung von den Kraftwirkungen der Körpermolecüle herrührende periodische Ungleichheiten der Dichte zuschrieb, und diese periodischen Ungleichheiten der Dichte als die Ursache der Dispersion betrachtete, gelangte er durch Ausführung der Rechnungen ebenfalls zur Dispersionsformel Cauchy's. Seine Theorie der Reflexion und Brechung

1) *Journ. de Math.* 1866 u. 1867.

ist eine vollständige Durchführung der Theorie Cauchy's und hat es deshalb mit denselben Schwierigkeiten zu thun wie jene.

Eine fundamentale Vereinfachung der Grundanschauungen liess Boussinesq in seiner Theorie eintreten [1]). Er betrachtet den Aether in den Körpern als durchaus identisch mit dem Aether im leeren Raume, also durchweg isotrop und überall von derselben Elasticität und Dichtigkeit. Pflanzen sich nun Aetherwellen zwischen den Atomen eines Körpers fort, so werden namentlich durch eine Art Reibung zwischen der Aether- und Körpermaterie die Atome des Körpers in Bewegung versetzt und wirken auf die Bewegung des Aethers zurück. Dieser Rückwirkung der ponderablen Molecüle schreibt Boussinesq alle optischen Verschiedenheiten zu. Die mathematische Durchführung der auf diesen einfachen Grundanschauungen beruhenden Theorie ergab ebenfalls Resultate, welche mit der Erfahrung übereinstimmten, ja die Schwierigkeiten erschienen vermindert.

Von seinen Grundanschauungen aus den Weg der Rechnung gehend, gelangte Boussinesq zu dem Resultate, dass in allen Körpern sich das Licht langsamer fortpflanzen müsse als im leeren Raume, es ergaben sich die Fresnel'schen Gesetze der Doppelbrechung, die Erscheinung der Dispersion, und insbesondere eine der Cauchy'schen analoge Dispersionsformel, sowie die Erscheinungen der drehenden Polarisation. Die Schwierigkeiten in der Theorie der Reflexion und Brechung fielen weg, es ergab sich eine Erklärung der Wirkung des Magnetismus auf die Lichtpolarisation und es ergaben sich insbesondere die fünf Gesetze Faraday's und Verdet's. Auch die Gesetze, welche sich auf den Durchgang des Lichtes durch bewegte Mittel beziehen, leitete Boussinesq aus seiner Theorie her, welche sich durch Einfachheit, Einheitlichkeit und Strenge auszeichnet.

Diese von Boussinesq eingeführten Anschauungen liegen auch den Weiterentwickelungen der Theorie zu Grunde, welche namentlich von Sellmeier, Helmholtz und Ketteler gegeben worden sind.

209. Anomale Dispersion.

Im Jahre 1862 fand Le Roux, dass der Joddampf, der hauptsächlich nur die äussersten rothen und blauen Strahlen hindurchlässt, die rothen Strahlen stärker bricht, als die blauen.

Diese Thatsache blieb unbeachtet, bis 1870 und 1871 Christiansen die folgenden Brechungsexponenten einer Lösung von Fuchsin in Weingeist mittheilte. (Die hier angegebenen Zahlen sind einer späteren, genaueren Bestimmung Christiansen's entnommen):

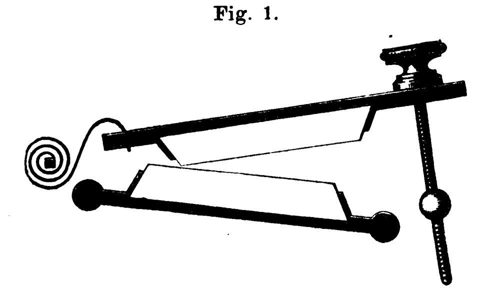
---

[1]) *Journ. Liouville,* 1868, p. 209, 313, 425.

Aeusserstes Roth	1·450
Gelb	1·516
Blau	1·338
Violett	1·374.

Christiansen hatte dieses Resultat mittelst eines sehr spitzen, aus der Flüssigkeit gebildeten Prismas erhalten, durch welches ein Spalt betrachtet wurde. Zur Herstellung eines solchen Prismas diente das Apparatchen Fig. 1. Die Flüssigkeit bringt man tropfenweise in das auf diese Weise gebildete Hohlprisma. Das Spectrum zeigte die Farbenfolge: Violett, Roth, Gelb, das letzte am meisten abgelenkt.

Fig. 1.



Zerlegt man das durch eine Fuchsinlösung gegangene Licht spectral, so zeigt sich bei einer gewissen Dicke der Schicht, dass die grünen und zum Theil auch die gelben Strahlen von der Auflösung absorbirt werden und fast gänzlich im Spectrum fehlen, welches aus zwei durch einen dunklen Zwischenraum getrennten Partien besteht. Die hervortretende Farbe der einen ist Roth, die der anderen Violett. Im ersten rothen Theile unterscheidet man noch deutlich Roth, Orange und etwas Gelb. Das durch ein Fuchsinprisma gegangene Licht zeigt nun diese Farben in der angegebenen anomalen Weise abgelenkt. Fig. 2 versinnlicht dieses anomale Spectrum. Als Abscissen sind die Ablenkungen, in Bogenminuten ausgedrückt, aufgetragen, die Ordinaten aber sollen ein Bild von den Intensitätsverhältnissen im Spectrum geben. Bei α ist das Spectrum des Weingeistes, in welchem das Fuchsin gelöst ist, angedeutet, das Rothe links, das Violette rechts. Man sieht, dass das Fuchsinspectrum im Verhältnisse mit dem Alkoholspectrum ungemein ausgebreitet ist. Der am wenigsten abgelenkte Theil ist violett.

Fig. 2.

α
Violett 20′ Roth 30′ Orange 40′ Gelb 50′

So stellte sich Christiansen das anomale Spectrum des Fuchsins dar. Sein Versuch giebt allerdings keinen Aufschluss über die Verän-

derungen der Brechungsexponenten zwischen Gelb und Violett, sowie jener des äussersten Violett und des äussersten Roth. Es möge hier bemerkt werden, dass bei schwächerer Absorption links vom Violett Blau erscheint, ferner, dass das äusserste Roth und das äusserste Violett über einander greifen, derart, dass das Spectrum an dieser Stelle nicht homogen ist.

Schon diese Versuche Christiansen's liessen einen Zusammenhang zwischen Absorption und Dispersion vermuthen.

Diese sogenannte anomale Dispersion zog nunmehr die Aufmerksamkeit der Physiker allgemein auf sich, und es ergaben sich die eingehendsten experimentellen und theoretischen Studien dieses Gegenstandes.

210. Anomal dispergirende Substanzen.

Kundt dehnte die Versuche auf eine ganze Classe von Substanzen aus, welcher das Fuchsin angehört.

Zwischen den durchsichtigen Körpern und den Metallen in der Mitte stehen jene Medien, die für einzelne Lichtstrahlen sich als durchsichtige, für andere sich mehr oder minder als Metalle verhalten, und die Lichtstrahlen mit metallischem Glanze reflectiren. Man hat diese Körper als Körper mit Oberflächenfarben zusammengefasst. Das durch diese Medien durchgelassene Licht ist ganz oder nahe complementär zu dem an der Oberfläche reflectirten, also der Oberflächenfarbe. Stokes wies sogar nach, dass die Oberflächenfarbe des übermangansauren Kali fünf Lichtmaxima im Grün zeigt, die genau den fünf dunklen Banden entsprechen, die das Absorptionsspectrum dieser Substanz in verdünnter Lösung erkennen lässt [1]).

Von diesen Betrachtungen ausgehend, wendete sich Kundt eben dieser Classe von Substanzen zu, indem er in ihnen einen allgemeineren Fall der Dispersion vermuthete, bei dem der Brechungsexponent für abnehmende Wellenlänge in Luft in den Körpern beliebig zu- und abnehmen könne. Er fand in der That, dass die anomale Dispersion eine ziemlich allgemeine Eigenschaft der Körper ist, welche Oberflächenfarben zeigen.

Kundt untersuchte zunächst die folgenden Substanzen: Anilinblau, Anilinviolett, Anilingrün, Indigo (in rauchender Schwefelsäure gelöst), Indigcarmin, Murexid (in Kalilauge gelöst), Cyanin, Uebermangansaures Kali, Carmin. Alle diese Körper können das rothe Licht stärker brechen als das blaue, wenn die Concentration der Lösung eine

---

[1]) Pogg. XCI, XCVI.

hinreichende ist. Sie zeigen also anomale Dispersion, welche darin besteht, dass gewisse Strahlen von kleinerer Schwingungsdauer schwächer gebrochen werden, als andere von grösserer Schwingungsdauer.

Wenn irgend ein Körper eine Gattung von Strahlen stark reflectirt, so wird das durchgelassene Licht an Stelle der betreffenden Strahlen scheinbar einen Absorptionsstreifen zeigen. Untersucht man aber das durch einen Körper mit Oberflächenfarben hindurchgehende Licht prismatisch, so findet man, dass die Verdunkelung dieser Stellen schnell zunimmt mit der Dicke der durchstrahlten Schicht. Man findet also, dass die Körper für die Strahlen, die sie stark reflectiren, die also schon dadurch in geringerer Intensität in den Körper gelangen, auch noch einen beträchtlichen Absorptionscoefficienten haben, und zwar nur für diese Strahlen.

Es ergab sich so auch ein Zusammenhang zwischen anomaler Dispersion und Absorption. In der That erwies sich bei fortgesetztem Studium des Gegenstandes die Absorption als die Ursache der Anomalien der Dispersion.

211. Kundt's experimentelle Methode.

Man denke sich den Spalt eines Spectralapparates auf einen Punkt reducirt, so dass aus dem Objectiv des Spaltrohres ein dünnes Bündel Sonnenstrahlen austritt; es gehe dasselbe durch ein Beugungsgitter und das Beobachtungsfernrohr sei auf das eine erste Beugungsspectrum eingestellt, so dass man also im Fernrohr ein lineares Spectrum sieht. Diese farbige Linie stellt gewissermaassen eine Abscissenachse dar, auf der die Farben in Distanzen proportional den Wellenlängen oder ihrer reciproken Schwingungszahlen aufgetragen sind. In jedem Punkte hat man einen Strahl von bestimmter Schwingungszahl, und es giebt ein Fortschreiten um gleiche Stücke auf der Abscissenachse ein gleiches Fortschreiten bezüglich der Schwingungszahlen an.

Will man nun einen Ueberblick über das Dispersionsvermögen einer Substanz haben, so braucht man nur über jedem Punkte der Abscissenachse als Ordinate die Ablenkung aufgetragen zu denken, die der betreffende Strahl durch ein Prisma aus der Substanz erleidet. Wir würden dann bei den gewöhnlichen durchsichtigen Körpern eine vom Violett zum Roth in irgend einer Weise continuirlich abfallende Curve erhalten.

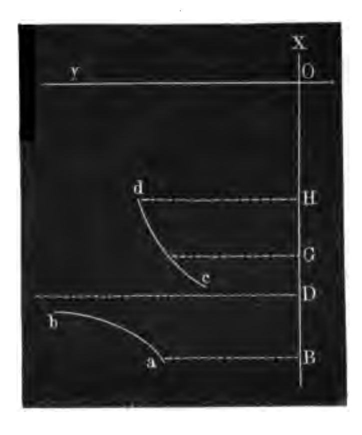
Experimentell wird man dies am einfachsten so verwirklichen, dass man in den Gang der durch das Beugungsgitter und Fernrohr gehenden Lichtstrahlen irgendwo ein Prisma der betreffenden Substanz so einschaltet, dass die Kante des Prismas senkrecht zu den Ritzen des Beugungsgitters steht.

Sei z. B. Fig. 3 der durch das beobachtende Fernrohr ohne das Beugungsgitter gesehene Punkt *O*, *BH* das erste Beugungsspectrum auf der einen Seite, welches man durch ein Gitter mit horizontalen Spalten sieht, so erblickt man nach Einschaltung eines Glasprismas mit verticaler brechender Kante ein lineares schräges Spectrum, welches entweder die Form *b h* oder *b' h'* haben kann, oder auch eine gerade Linie oder eine Curve, die in der Mitte einen Wendepunkt hat, sein könnte.

Man wird aus dem Anblick der Curve sofort eine Anschauung davon bekommen, wie mit den Schwingungszahlen die Ablenkungen und damit die Brechungsexponenten zunehmen. Bei allen durchsichtigen

Fig. 3.

Fig. 4.



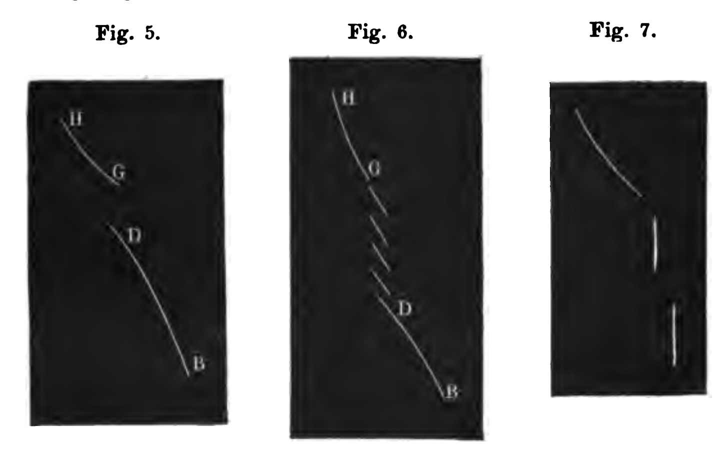
Medien wird man stets finden, dass die Curve, welche das Spectrum bildet, derartig ist, dass mit zunehmenden Abscissen die Ordinaten abnehmen, d. h. also mit abnehmender Schwingungszahl auch der Brechungsexponent abnimmt. Anders gestaltet sich die Sache bei den anomal dispergirenden Substanzen.

Die Ablenkungs- oder Dispersionscurve hat bei einer stark concentrirten Lösung von Cyanin, welches in ein Hohlprisma gefüllt ist, die Form, die in Fig. 4 gezeichnet ist. Die Curve besteht aus zwei getrennten Aesten, *a b*, *c d*; der mittlere Theil der Strahlen ist absorbirt, und man sieht nun aus der Curve sofort, dass der Theil *a b*, der Strahlen grösserer Schwingungsdauer angehört, stärker abgelenkt ist, als der blaue und violette Theil *c d*. Der Verlauf der Curve zwischen *b* und *c* ist wegen der starken daselbst stattfindenden Absorption nach dieser Methode nicht zu erhalten.

In Fig. 5 (a. f. S.) ist das Spectrum einer ziemlich concentrirten Lösung von übermangansaurem Kali gezeichnet, in Fig. 6 das Spectrum einer schwachen Lösung desselben Körpers, bei der man die Erschei-

nung sieht, wenn mehrere Absorptionsstreifen vorhanden sind. Die Erscheinung Fig. 6 lässt besonders deutlich den Zusammenhang zwischen

Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7.



Absorption und anomaler Dispersion erkennen. Fig. 7 zeigt die Ablenkung eines mit Cobalt gefärbten Boraxglases.

212. Kundt's weitere Resultate.

Aus Kundt's Versuchen ging hervor: Wird Licht von einer bestimmten Schwingungsdauer absorbirt, so werden gleichzeitig die Brechungsexponenten der Strahlen von grösserer Schwingungsdauer vergrössert, jene von kleinerer verkleinert, und zwar dies um so mehr, je näher die Strahlen in Rücksicht auf ihre Schwingungsdauer den absorbirten Strahlen liegen. Hiervon ausgenommen sind die den absorbirten unmittelbar benachbarten Strahlen, in Bezug auf welche der Verlauf der Brechungsexponenten nach Kundt's Methode nicht zu ermitteln ist, da diese Strahlen zu stark absorbirt werden.

Bei Medien, die mehrere scharfe und stärkere Absorptionsstreifen zeigen, wurde bei jedem Absorptionsstreifen dieselbe Anomalie aufgefunden.

Nach der oben angeführten Methode wurden Anomalien in der Dispersion, die sich freilich oft nur auf Strahlen ganz in der Nähe eines Absorptionsstreifens erstrecken, constatirt bei Lösungen von

Magdalaroth,
Corallin,
Alizarin in Kalilauge,
Orsellin,
Lackmus,

Jod in einer Mischung von Chloroform und Schwefelkohlenstoff,
Blauholz (*Haematoxylon Campechianum*, wässeriger und ammoniakalischer Auszug),
Rothholz (ammoniakalischer Auszug),
Blut (rother wässeriger Auszug),
Hämatin,
Chlorophyll.

Ferner wurde bei Cobaltoxyd-Ammoniak und oxalsaurem Cobaltoxyd-Kali anomale Dispersion gefunden.

Uebermangansaures Kali zeigte bei den einzelnen durch die fünf Absorptionsstreifen im Grün getrennten hellen Parthien, dass an den Grenzen eines jeden der dunklen Absorptionsbänder die betreffende Dispersionsanomalie vorhanden ist.

Kundt bestimmte die Brechungsexponenten einiger Fraunhofer'scher Linien für Cyanin, Fuchsin und Uebermangansaures Kali. Wir lassen die für Cyanin erhaltenen Resultate folgen:

	n
A	1,3732
a	1,3756
B	1,3781
C	1,3831
E	1,3658
F	1,3705
G	1,3779
H	1,3821

Aus den Zahlen erkennt man das Gesetz über den Zusammenhang zwischen Absorption und Brechung sehr deutlich. Die Strahlen von E bis C waren völlig absorbirt.

Wenn man die Dispersion einer anomalen Substanz mit gekreuzten Prismen untersucht, und das Licht hauptsächlich an der Schneide des Hohlprismas durchgehen lässt, um auch die Strahlen, deren Absorption ziemlich beträchtlich ist, zu erhalten, so geben diese Strahlen kein scharfes Spectralbild im beobachtenden Fernrohr. Die am stärksten oder am wenigsten abgelenkten Theile der „Schweife" des schrägen Spectrums sind undeutlich und verwaschen. Die Erklärung ist folgende. Fällt ein Bündel paralleler Lichtstrahlen auf ein scharfkantiges, mit einer, gewisse Strahlen stark absorbirenden, Flüssigkeit gefülltes Hohlprisma, so werden die Strahlen, die wenig oder gar nicht absorbirt werden, in der ganzen Breite des Strahlenbüschels durch die Lösung gehen, diejenigen Strahlen aber, deren Absorptionscoëfficient beträchtlich ist, gehen nur in allernächster Nähe der Schneide des Hohlprismas hindurch, weil nur hier die Schicht der Flüssigkeit hinreichend dünn ist. Das Hohlprisma verhält sich also für die stark absorbirten Strahlen und nur für diese ganz abgesehen von der Brechung wie ein enger Spalt, so dass sich die Beugung des Lichtes bemerklich macht. Diese bringt keine scharfen deut-

lichen Interferenzfransen hervor, sondern bewirkt hauptsächlich, dass das Spectralbild der betreffenden Strahlen verbreitert und an den Rändern verwaschen erscheint.

213. Anomale Dispersion und Absorption. Sellmeier.

Die Beobachtungen Kundt's erwiesen sich als eine schöne experimentelle Bestätigung von Resultaten, zu welchen Sellmeier schon im Jahre 1866 auf rein theoretischem Wege gelangt war.

Sellmeier ging von der Ansicht aus, dass die Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in den ponderablen Mitteln eine directe Wirkung der durch die Aetherschwingungen in Mitschwingen versetzten Körpertheilchen sei. Eine besondere Eigenthümlichkeit seiner Erklärung war, dass sie eine Beziehung enthielt zwischen der Dispersion und der Absorption des Lichtes, in der oben angegebenen Weise.

Sellmeier richtete seine Betrachtungen zuerst auf die durchsichtigen Körper, und unterschied bei denselben drei Hauptfälle, je nachdem bloss die unterrothen Strahlen oder bloss die überviolетten, oder beide zugleich in gleichem Grade der Absorption unterliegen. Der Theorie Sellmeier's zufolge sind dann durch die Wirkung der absorbirenden Körpertheilchen die Brechungsexponenten im ersten Falle verkleinert, am meisten am minder brechbaren Ende des sichtbaren Spectrums, im zweiten sind dieselben vergrössert, vorzugsweise am brechbareren Ende, und im dritten sind sie im minder brechbaren Theile des Spectrums verkleinert, im brechbareren vergrössert. Im ersten Falle erscheinen die Farben im minder brechbaren Theile des Spectrums aus einander gedehnt, im zweiten im brechbareren, und im dritten erscheinen sie an beiden Enden des Spectrums aus einander gedehnt, und in der Mitte desselben zusammengedrängt.

Sellmeier wählte drei Körper aus, welche als Repräsentanten der drei Hauptfälle dienen können, nämlich das Wasser, den Schwefelkohlenstoff und das Fraunhofer'sche Kronglas Nr. 9. Es ergab sich, dass bei diesen drei Körpern die merkliche Aenderungsweise der Brechungsexponenten mit der theoretisch vorhergesehenen ausgezeichnet übereinstimmt. Alle transparenten Körper, bei denen Sellmeier eine solche Vergleichung ausführen konnte, sprachen für seine Theorie.

Sellmeier wandte sich nun jener Klasse von Körpern zu, welche nur den mittleren Theil des Spectrums absorbiren, insbesondere dem Fuchsin, und suchte nach jenen anomalen Erscheinungen des Spectrums, welche seine Theorie verlangte. Da er aber ein Prisma mit zu grossem brechenden Winkel benutzte, blieb es ihm selbst versagt, die Bestätigung seiner Theorie zu finden, welche später durch die Entdeckungen von Christiansen und Kundt gebracht wurde.

Hierher gehört auch der folgende Versuch Kundt's: Berlinerblau, in Oxalsäure gelöst, absorbirt die beiden Enden des Spectrums, das rothe und violette. In Uebereinstimmung mit Sellmeier's Theorie findet man für die äussersten durchgehenden grünen Strahlen einen sehr kleinen Brechungsexponenten, der sehr schnell zunimmt, dann eine Zeit lang langsam wächst, um gegen das Violett hin schnell anzusteigen. Ebenso zeigte eine Anzahl von Körpern, die das Spectrum vom blauen Ende her absorbiren, eine ganz auffällige Zunahme des Brechungsexponenten vom Roth zum Gelb.

214. Neuere Dispersionstheorie. Helmholtz.

Theoretische Bearbeitung hat die Dispersionstheorie in der neuesten Zeit vorzüglich erfahren durch Boussinesq[1]), Sellmeier[2]), Helmholtz[3]) und Ketteler[4]). Alle diese Theorien erklären die Dispersion aus der Einwirkung der Körpermolecüle und unterscheiden sich nur durch die Annahmen über die Art dieser Einwirkung.

Wir geben im Folgenden die von Helmholtz ausgebildete Theorie Sellmeier's.

Wenn der Aether frei ist, also nur die Elasticität des Aethers wirkt, ist die Bewegungsgleichung des Aethers für ebene Wellen, welche sich in der Richtung der y fortpflanzen,

$$\mu \frac{d^2 \xi}{d t^2} = \alpha^2 \frac{d^2 \xi}{d y^2};$$

ξ ist die Verschiebung der Aethertheilchen zur Zeit t für eine Schicht von der Coordinate y. Die linke Seite der Gleichung drückt die für die Volumeinheit berechnete Kraft durch die Beschleunigung aus, die der Aether erleidet, die rechte Seite giebt dieselbe Kraft als herrührend von der elastischen Deformation des benachbarten Aethers. μ bedeutet die Dichtigkeit, α^2 die Elasticitätsconstante des Aethers.

Anders verhält es sich bei dem Aether im Inneren eines Körpers. Wir sehen für den Lauf der Rechnung den Aether und die ponderable Masse als zwei sich gegenseitig durchdringende continuirliche Medien an. Um die für den freien Aether aufgestellte Bewegungsgleichung für diesen Fall zu vervollständigen, müssen wir eine zwischen der ponderablen Masse und dem Aether wirkende Kraft annehmen und setzen dieselbe für unendlich kleine Verschiebungen der relativen Lageänderung des Aethers und der ponderablen Masse proportional. Man erhält so als Bewegungsgleichung des Aethers

---

1) *Journ. de Liouville* 1861. 2) Pogg. 1871, 1872, 1876. 3) Pogg. 1875. 4) Farbenzerstreuung der Gase. Bonn 1865. Pogg. 1870, 1874, 1877. Wied. 1877, 1878, 1880. Carl, Rep. 1880.

$$\mu \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \alpha^2 \frac{d^2 \xi}{dy^2} + \beta^2 (x - \xi) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Dazu kommt die Bewegungsgleichung der ponderablen Masse, deren Dichtigkeit wir mit m bezeichnen. Auf die Volumeinheit berechnet, wäre $m \frac{d^2 x}{dt^2}$ die auf sie wirkende Kraft, gemessen durch die Beschleunigung. Andererseits wird diese Kraft zusammengesetzt sein:

1) aus der Kraft, die der Aether auf die ponderable Masse ausübt, nämlich $\beta^2 (\xi - x)$;

2) aus der Kraft, welche von den übrigen Theilen der ponderablen Masse herrührt, und diese setzen wir gleich $- a^2 x$.

3) Wenn Absorption stattfindet, muss lebendige Kraft der Bewegung der ponderablen Masse in Wärme übergeführt werden durch einen der Reibung im Resultat ähnlichen Vorgang. Wir nehmen also noch eine der Reibung ähnliche Kraft zwischen den ponderablen Theilchen an und setzen diese Kraft gleich $- \gamma^2 \frac{dx}{dt}$.

Die Bewegungsgleichung der mitschwingenden Atome ist dann

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \beta^2 (\xi - x) - a^2 x - \gamma^2 \frac{dx}{dt} \quad \ldots \quad (1\,a)$$

Durch die beiden Gleichungen (1) und (1 a) ist die Bewegung der Aetherwellen vollständig bestimmt.

Ein particuläres Integral der Differentialgleichungen (1) und (1 a) ist

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \mathfrak{A} e^{ly - int} \\ x &= A e^{ly - int} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

wo $\mathfrak{A}$, A, l, n Constanten sind, ferner i und e für $\sqrt{-1}$ und die Basis des Neper'schen Logarithmensystems gesetzt sind.

Bilden wir nämlich aus (2) die Differentialquotienten und substituiren nach (1) und (1 a), so erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} [-\mu n^2 - \alpha^2 l^2 + \beta^2]\, \mathfrak{A} &= \beta^2 A \\ [-m n^2 + a^2 + \beta^2 - \gamma^2 i n]\, A &= \beta^2 \mathfrak{A} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2\,a)$$

Diese Bedingungen müssen also zwischen den Constanten l, n, A, $\mathfrak{A}$ erfüllt sein, wenn die Gleichungen (2) eine Integrale der Gleichungen (1) und (1 a) sein sollen.

Wir setzen nun

$$l = -k + \frac{in}{c} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2\,c)$$

wo k und c Constanten sind.

Hierdurch geht die Gleichung (2) über in

$$\xi = \mathfrak{A} . e^{-ky} . e^{in\left(\frac{y}{c} - t\right)} = \mathfrak{A} . e^{-ky} . \left[\cos n \left(\frac{y}{c} - t\right) + i \sin n \left(\frac{y}{c} - t\right)\right].$$

Es folgt, dass auch

$$\xi = \mathfrak{A} e^{-ky} . \cos n \left(\frac{y}{c} - t\right)$$

und

$$\xi = \mathfrak{A} e^{-ky} . \sin n \left(\frac{y}{c} - t\right)$$

Integrale von (1) und (1 a) sind. Die beiden letzteren Gleichungen stellen aber schwingende Bewegungen von abnehmender Amplitude dar. k ist der Absorptionscoëfficient, c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, und die Schwingungsdauer T ergiebt sich aus der Gleichung

$$n = \frac{2\pi}{T}.$$

Man erhält durch Multiplication der beiden Gleichungen (2 a):

$$-\frac{l^2}{n^2} = \frac{\mu}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2 n^2}\left[1 + \frac{\beta^2}{mn^2 - a^2 - \beta^2 + \gamma^2 in}\right] \quad . \quad . \quad (2\,\mathrm{b})$$

Setzt man (2 c) nach (2 b), so erhält man die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c^2} - \frac{k^2}{n^2} &= \frac{\mu}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2 n^2} - \frac{\beta^4}{\alpha^2 n^2} \cdot \frac{mn^2 - a^2 - \beta^2}{(mn^2 - a^2 - \beta^2)^2 + \gamma^4 n^2} = F \\ \frac{2k}{cn} &= \frac{\beta^4 \gamma^2}{\alpha^2 n} \cdot \frac{1}{(mn^2 - a^2 - \beta^2)^2 + \gamma^4 n^2} = G \end{aligned}\right\} (2\,\mathrm{d})$$

durch deren Auflösung k und c gefunden werden können. Es ergiebt sich

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{F^2 + G^2} + \frac{1}{2}F$$

$$\frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{2}\sqrt{F^2 + G^2} - \frac{1}{2}F$$

wo die Wurzeln positiv sind.

215. Discussion der erhaltenen Gleichungen. Normale Dispersion.

Setzt man in dem für $\frac{1}{c^2}$ gefundenen Ausdrucke $\beta = 0$, d. h. nimmt man keine Wechselwirkung zwischen Aether- und Körpertheilchen an, so erscheint die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unabhängig von der Farbe n. Im leeren Raume giebt es also keine Dispersion, und die ganze Dispersion ist Folge der Einwirkung der Körpertheilchen.

Setzt man nur die Reibung γ^2 der Null gleich, so wird die Absorption k der Null gleich, der Körper ist vollkommen durchsichtig. Die erste der Gleichungen (2 d) giebt nun eine Abhängigkeit des

Brechungsexponenten von der Schwingungszahl, so dass der erstere mit der letzteren zunimmt. Sobald also keine Absorption stattfindet, d. i. für vollkommen durchsichtige Substanzen, ist die Dispersion eine normale.

Cauchy's Dispersionsformel (201) stellt die Dispersion farblos durchsichtiger Mittel durchaus hinreichend dar. Es möge deshalb die sich aus der Helmholtz'schen Theorie für durchsichtige Medien ergebende Dispersionsformel mit jener Cauchy's verglichen werden.

In Helmholtz's Theorie der anomalen Dispersion (214) erhalten wir die Bewegungsgleichung des Aethers im freien Raume, wenn wir in Gleichung (2 d) $\beta = 0$ setzen, woraus folgt, dass

$$\sqrt{\frac{\alpha^2}{\mu}} = \zeta$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im freien Raume ist, wenn der innere und äussere Aether als identisch angesehen werden. Da überdies für farblos durchsichtige Medien

$$\gamma = k = 0,$$

so können wir die Gleichung (2 d) schreiben

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\mu}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2 n^2} - \frac{\beta^4}{\alpha^2 n^2} \cdot \frac{1}{m n^2 - a^2 - \beta^2}.$$

Setzen wir für n seinen Werth

$$n = \frac{2\pi}{T},$$

so erhalten wir

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\mu}{\alpha^2} - \frac{\beta^2 T^2}{\alpha^2 4\pi^2} - \frac{\beta^4 T^2}{\alpha^2 4\pi^2} \cdot \frac{1}{\frac{m \cdot 4\pi^2}{T^2} - a^2 - \beta^2},$$

und indem wir die Gleichung mit ζ^2 multipliciren,

$$\frac{\zeta^2}{c^2} - 1 = \frac{\beta^2 \zeta^2 T^2}{\alpha^2 4\pi^2} - \frac{\beta^4 \zeta^2 T^2}{\alpha^2 4\pi^2 m} \cdot \frac{1}{\frac{4\pi^2}{T^2} - \frac{a^2 + \beta^2}{m}}.$$

Führen wir neue Constanten ein, indem wir setzen

$$\frac{a^2 + \beta^2}{m} = \frac{4\pi^2}{T_m^2}, \quad \zeta T_m = \lambda_m,$$

und beachten, dass $\zeta T = \lambda$, so wird

$$\frac{\zeta^2}{c^2} - 1 = -\frac{\beta^2}{\alpha^2 4\pi^2} \lambda^2 - \frac{\beta^4 \lambda_m^2}{\alpha^2 (4\pi^2)^2 \zeta^2 m} \cdot \frac{\lambda^4}{\lambda_m^2 - \lambda^2}.$$

Hierin ist

$$\frac{\zeta}{c} = \nu$$

der Brechungsexponent des Mediums, in welchem das Licht sich ausbreitet.

Setzen wir schliesslich

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2 4 \pi^2} = P, \quad \frac{\beta^4 \lambda_m^2}{\alpha^2 (4 \pi^2)^2 \zeta^2 m} = Q,$$

so erhalten wir die Dispersionsformel

$$\nu^2 - 1 = - P \lambda^2 + Q \frac{\lambda^4}{\lambda^2 - \lambda_m^2}.$$

In diesem Ausdrucke sind P, Q, λ_m Constanten, welche nur von der Beschaffenheit des brechenden Mediums abhängig sind.

Die dargelegten Ausdrücke setzen voraus, dass das brechende Medium nur eine Art schwingender Atome besitzt. Sind mehrere Arten schwingender Atome in demselben vorhanden, so treten an die Stelle jedes Gliedes der rechten Seite der Gleichung so viel Glieder mit den Constanten P, Q, λ_m, als verschiedene Arten von Atomen vorhanden sind.

Die obige Dispersionsformel enthält drei von der Natur des brechenden Mediums abhängige Constanten. Zur Prüfung, in wie weit diese Gleichung die Dispersion darstellt, hat man demnach aus drei gemessenen Brechungsexponenten ν_1, ν_2, ν_3 für drei bekannte Wellenlängen λ_1, λ_2, λ_3 die Constanten zu bestimmen.

Die obige Dispersionsformel wurde in dieser Weise von A. Wüllner unter anderen an Mascart's Messungen der Brechungsexponenten des Kalkspathes, des Flintglases von Rosette, Verdet's Messungen der Brechungsexponenten des Schwefelkohlenstoffs, van der Willigen's Messungen derjenigen des Wassers geprüft, und es hat sich ergeben, dass die Helmholtz'sche Gleichung in der obigen Form die Brechungsexponenten der farblos durchsichtigen Körper ganz vollkommen darstellt.

Bei diesen Prüfungen und bei der Berechnung der Constanten noch für mehrere andere Körper stellte sich die interessante Beziehung heraus, dass die beiden Constanten P und Q stets einander sehr nahe gleich waren, so bei Wasser, Alkohol, Glycerin, Chlorzink, Schwefelkohlenstoff, Flintglas von Rosette, Kalkspath, Flintglas von Merz.

Beispielsweise ergab sich für Kalkspath:

$$P = 1{\cdot}329018,$$
$$Q = 1{\cdot}329010.$$

Setzt man demgemäss in der Helmholtz'schen Gleichung $P = Q$, so erhält man die zweiconstantige Dispersionsformel

$$\nu^2 - 1 = Q \frac{\lambda_m^2}{1 - \left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^2}.$$

Wie Lommel zeigt, wird durch diese Formel die Reihe der Brechungsexponenten selbst für das Flintglas von Rosette bis auf 25 Einheiten

der fünften Decimale dargestellt, die des Schwefelkohlenstoffs bis auf neun Einheiten der vierten Decimale, trotzdem von den oben angeführten Substanzen der Schwefelkohlenstoff den grössten Unterschied zwischen P und Q zeigt.

Selbst bei einigen gefärbten Substanzen, bei denen die Absorption im sichtbaren Theile des Spectrums sich zeigt, erwies sich die Gleichheit von P und Q noch als bestehend, so für die von Sieben untersuchte concentrirte Lösung von schwefelsaurem Kupferoxydammoniak, welche das rothe Ende absorbirt, und für eine Lösung von Alizarin in Alkohol, welche das violette Ende absorbirt.

Diese zweiconstantige Dispersionsformel und Cauchy's Dispersionsformel lassen sich leicht auf dieselbe Form bringen.

216. Fortsetzung. Anomale Dispersion.

Wir wollen nun voraussetzen, dass die Absorption k einen merklichen Werth habe, und kehren zu den in (214) entwickelten Gleichungen zurück.

Der Werth von k ergiebt sich auch aus der zweiten der Gleichungen (2 d) in folgender Form:

$$\frac{k}{c} = \frac{1}{2} n G = \frac{\beta^4 \gamma^2}{2 \alpha^2 m^2} \cdot \frac{1}{(n^2 - \mathfrak{n}^2)^2 + 4(\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{p}^2)\mathfrak{p}^2} \quad . \quad (3)$$

worin gesetzt ist

$$m \mathfrak{n}^2 = a^2 + \beta^2 - \frac{\gamma^4}{2m} \text{ und } \mathfrak{p}^2 = \frac{\gamma^4}{4m^2}.$$

Die Form der Gleichung (3) zeigt, dass der Werth von $\frac{k}{c}$ bei sich ändernder Schwingungszahl n ein Maximum erreicht, wenn $n = \mathfrak{n}$.

Bezeichnen wir mit k_0 und c_0 die Werthe von k und c, für welche $\frac{k}{c}$ ein Maximum ist, so wird

$$\frac{k_0}{c_0} = \frac{\beta^4}{2 \alpha^2 \gamma^2} \frac{1}{(\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{p}^2)} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (3\text{ a})$$

Die Gleichung (3) können wir nun auf die Form bringen

$$\frac{c}{k} = \frac{c_0}{k_0}\left(1 + \frac{(n^2 - \mathfrak{n}^2)^2}{4 \mathfrak{p}^2 (n^2 + \mathfrak{p}^2)}\right) \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (3\text{ b})$$

Bei gleichbleibender Farbe n ist $\frac{k}{c}$ nicht das Maass der Absorption für gleichbleibende absolute Dicken der absorbirenden Schicht, sondern für gleichbleibende Zahlen von Wellenlängen. Wenn die Brechungsverhältnisse nicht allzusehr variiren, werden beide Grössen sich aber

nicht sehr wesentlich unterscheiden. Die Gleichung (3 b) zeigt nun, dass wenn n und $\mathfrak{n}$ constant gehalten werden, die Grösse $\frac{k}{c}$ um so grösser im Verhältnisse zum Maximum der Absorption $\frac{k_0}{c_0}$ ist, je grösser

$$\mathfrak{p}^2 = \frac{\gamma^4}{4\,m^2}.$$

Das heisst, grosse Werthe des Reibungscoëfficienten γ^2 und kleine der mitschwingenden Massen m geben breite Absorptionsstreifen, umgekehrt kleine von γ^2 und grössere von m schmale Absorptionsstreifen.

Für einen schmalen Absorptionsstreifen haben wir für die Stelle stärkster Absorption nahehin

$$n^2 = \frac{a^2 + \beta^2}{m}.$$

In der Nähe der Farbe stärkster Absorption lässt sich der Gang der Absorption und Brechung, wie ihn die Gleichungen (2 d) und (2 e) ergeben, durch die folgende Construction versinnlichen.

Man setze

$$\frac{m n^2 - a^2 - \beta^2}{\gamma^2 n} = tang\,\omega,$$

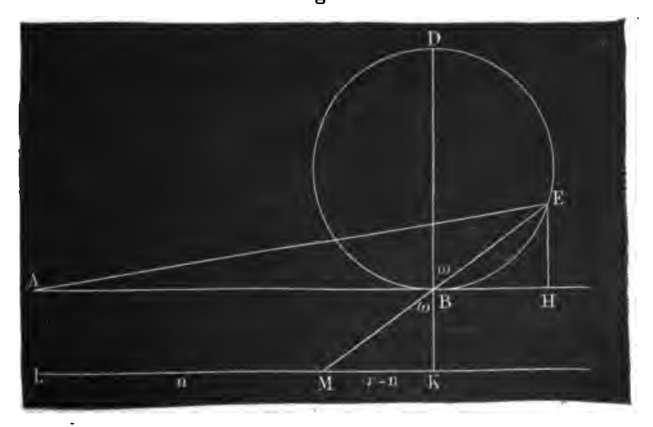
wobei ω von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ gehen wird, wenn n von 0 bis ∞ geht. Man mache (Fig. 8)

$$A B = \frac{\mu}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2\,n^2},$$

errichte in B das Loth

$$B D = \frac{\beta^4}{\alpha^2\,\gamma^2\,n^3},$$

Fig. 8.



und construire einen Kreis, dessen Durchmesser BD ist. Man mache den Winkel $DBE = \omega$. Dann fälle man das Loth EH auf AB, so ist $AH = F$ und $EH = G$,

$$AE = \sqrt{F^2 + G^2},$$

also

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{2}(AE + AH)$$

$$\frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{2}(AE - AH).$$

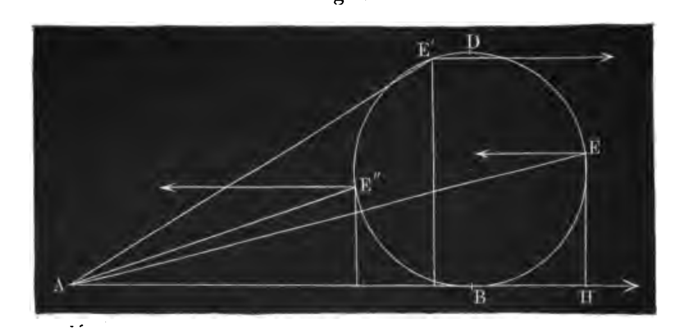
Wenn der Absorptionsstreifen schmal ist, so dass sich n nicht erheblich ändert, während man durch ihn hindurchgeht, so kann man in den Werthen der Strecken AB und BD das n constant setzen und dafür den Werth ν nehmen:

$$m\nu^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

welcher etwa der Mitte des Absorptionsstreifens entspricht. Dann wird, während n wächst, der Punkt E den festen Kreis durchlaufen.

Hierbei hat $AE + AH$ ein Maximum bei E (Fig. 9), und ein Minimum bei E'', $AE - AH$ ein Maximum bei E' und ein Minimum bei

Fig. 9.



B, so dass die als Lichtstrahlen betrachteten Linien AE, AE', AE'', AB von der als Spiegel betrachteten Kreislinie in Richtungen parallel mit AB reflectirt würden. Die stärkste Absorption tritt also auf der obersten Seite des Kreises in der Nähe bei D ein, dagegen vorher an der von A abgewendeten Seite die stärkste, nachher an der A zugewendeten Seite die schwächste Brechung.

Unter derselben Voraussetzung ergiebt sich der Werth von $tang\,\omega$ annähernd

$$tang\,\omega = \frac{m(n^2 - \nu^2)}{\gamma^2 n} = \frac{m \cdot 2n(n - \nu)}{\gamma^2 n} = \frac{2m(n - \nu)}{\gamma^2}.$$

Man verlängere (Fig. 8) DB über B hinaus, mache

$$BK = \frac{\gamma^2}{2m},$$

ziehe durch K die Parallele LK mit AB, mache $LK = v$ und trage nun die Werthe des n von L anfangend auf LK ab. Es sei z. B. $LM = n$, so ist annähernd der Winkel $MBK = \omega$, und der Punkt E wird gefunden, wenn man die Linie MB zieht und sie verlängert, bis sie zum zweiten Male den Kreis schneidet.

Es ist leicht ersichtlich, dass je kleiner BK ist, desto kleinere Veränderungen von n genügen werden, um den Punkt E gleiche Bogen des Kreises durchlaufen zu lassen, was schmalen Absorptionsstreifen entspricht. Die Stärke der Absorption hängt dagegen von dem Durchmesser BD ab.

Die Theorie ergiebt demnach:

Besteht der Körper aus einer einzigen Art mitschwingender Theilchen, ist er optisch einfach, so entsteht im Spectrum ein Absorptionsstreifen. Nähert man sich vom minder brechbaren Ende des Spectrums dem Absorptionsstreifen, so erreicht vor der Stelle stärkster Absorption der Brechungsexponent ein Maximum, fällt dann rasch ab und erreicht hinter der Stelle der stärksten Absorption ein Minimum. Hierdurch muss es geschehen, dass Strahlen von grösserer Schwingungsdauer stärker gebrochen werden, als solche von kleinerer, und hierin besteht die anomale Dispersion.

217. Anomale Dispersion an festen und gasförmigen Substanzen.

Die anomale Dispersion wurde an festen, flüssigen und gasförmigen Substanzen beobachtet.

Kundt stellte ein durch Cobalt sehr intensiv blau gefärbtes Boraxglas her, welches zu Prismen geschliffen, einen ganz schwarzen Absorptionsstreifen im Roth bis ans Grün heran zeigte und einen schwächeren etwa zwischen Grün und Blau. An diesen Prismen wurde ebenfalls die anomale Dispersion in der oben beschriebenen Weise wahrgenommen.

Ferner wurde bei Cobaltoxyd-Ammoniak und oxalsaurem Cobaltoxyd-Kali anomale Dispersion gefunden.

Wernicke bestimmte mittelst eines kleinen Prismas von festem Fuchsin durch Messung des Minimums der Ablenkung für die Fraunhofer'schen Linien A, B, C, G, H, die folgenden Zahlen der Brechungsindices:

$$n(A) = 1{\cdot}73$$
$$n(B) = 1{\cdot}81$$
$$n(C) = 1{\cdot}90$$
$$n(G) = 1{\cdot}31$$
$$n(H) = 1{\cdot}54.$$

Am Joddampf wurde bekanntlich die anomale Dispersion entdeckt.

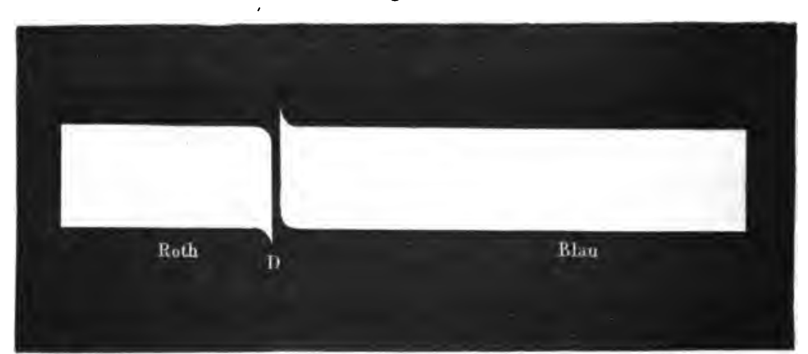
Als Kundt den bekannten Versuch der Umkehrung der hellen Natriumlinie anstellte, fiel ihm auf, dass das Spectrum in der Nähe der dunkeln Linie eine eigenthümliche Ausbuchtung zeigte. Bei näherer Betrachtung ergab sich, dass eine Dispersionsanomalie vorlag, bedingt durch die Dispersion in der kegelförmigen Natriumflamme.

Das Spectrum mit der dunkeln Linie hatte auf dem Schirm, auf dem dasselbe projicirt war, die in Fig. 10 angedeutete Form.

Die Anordnung des Versuches war folgende:

Mittelst elektrischen Lichtes war durch ein Prisma mit verticaler Kante ein horizontales, sehr lichtstarkes Spectrum auf dem Schirme ent-

Fig. 10.



worfen. In den Gang der Lichtstrahlen wurde ein Bunsen'scher Brenner gestellt und in diesen mit einem Eisenlöffelchen genau in die Mitte des Inneren der Flamme des Bunsen'schen Brenners ein Stück Natrium gebracht, so dass ein sehr intensiv gelb leuchtender Kegel entstand. Dieser wirkt nun wie ein Prisma mit oben liegender, horizontaler brechender Kante. Zeigt der glühende Natriumdampf eine Dispersion, so würde also dieser Kegel von Strahlen, die horizontal durch ihn hindurchgehen, ein allerdings wegen der Kegelform unreines verticales Spectrum liefern müssen. Gehen die Strahlen zugleich durch ein Glasprisma mit verticaler, und das Natriumprisma mit horizontaler brechender Kante, so erhalten wir ein Spectrum, welches, wenn im Dampf Dispersion vorhanden ist, die oben gezeichnete Form haben muss. Da die brechende Kante des Natriumprismas oben liegt, so ist der Brechungsexponent des Dampfes für diejenigen Strahlen der grösste, welche am meisten nach unten abgelenkt sind.

Die Zeichnung zeigt, dass in Uebereinstimmung mit den Untersuchungen an festen und flüssigen Körpern mit Annäherung an den Absorptionsstreifen von der rothen Seite des Spectrums der Brechungsexponent sehr zunimmt, auf der grünen Seite der dunklen Linie kleiner ist, als auf der anderen, und dann schnell wieder wächst.

218. Die Brechungsexponenten gemessen durch Absorption.

Nach der Helmholtz'schen Theorie ändern sich die Brechungsexponenten beim Durchgange durch die Absorptionsbande continuirlich ohne Sprung. Um dies zu prüfen, ist die Prismenmethode nicht geeignet, da die Strahlen, um welche es sich handelt, stark absorbirt werden.

Um nun für die Strahlenpartien der stärksten Absorption die Brechungsexponenten zu ermitteln, stellte Wernicke Messungen nach einer anderen Methode an.

Geht Licht durch eine Schichte der Substanz, so ist die Intensität des durchgehenden Lichtes gleich der des auffallenden, vermindert um den durch Reflexion und den durch Absorption entstehenden Verlust. Um den letzteren allein zu erhalten, ist es erforderlich, zwei Schichten von ungleicher Dicke, aber sonst völlig gleicher Beschaffenheit anzuwenden. Ausserdem müssen die zur Untersuchung der Absorption verwendbaren Schichten so stark sein, dass bei der dreifachen Dicke nicht merklich Licht mehr hindurchgeht, weil verschieden dicke Schichten auch bei völliger Gleichheit der Oberflächen und des Inneren wegen der Interferenz der an den Grenzflächen reflectirten Strahlen ungleiche Lichtmengen durchlassen.

Wernicke wendete einen Spectralapparat mit Vierordt'scher Doppelspalte an. Die Spalte des Spaltfernrohres ist parallel ihrer kurzen Seite halbirt, die Breite einer jeden Hälfte kann messbar verändert werden.

Giebt man z. B. der einen Spalthälfte die Breite von 100 Einheiten, setzt die stärkere zweier homogenen Platten des zu prüfenden Körpers daran, und vor die andere Spalthälfte die dünnere, so giebt die Breite dieser Spalthälfte, nachdem beide Lichtmengen gleich gemacht sind, unmittelbar die Lichtmenge in Procenten an, welche eine der Dickendifferenz beider Platten gleich starke Schicht hindurchlässt.

Man kann nun die Bestimmung der Brechung auf die Messung der Absorption zurückführen. Die Beobachtungen haben gezeigt, dass bei isotropen Körpern die Abhängigkeit der Absorption von der Incidenz, wenn überhaupt vorhanden, doch jedenfalls sehr gering ist.

Bedeutet k die durch eine Schicht von der Dicke der Einheit durchgehende Lichtmenge, die auffallende nach Abzug der reflectirten gleich 1 gesetzt, so ist k^d die Intensität nach der Durchstrahlung einer gleichartigen Schicht von der Dicke d, und $A k^d$ diese Intensität mit Berücksichtigung des Intensitätsverlustes. Setzt man diese Schicht vor die eine Spalthälfte, welche die Breite b haben möge, so ist die ganze in den Spalt eintretende Lichtmenge $b A k^d$. Hat die zweite Schicht die

Dicke d_1, und die andere Spalthälfte die Breite b_0, so ist $b_0 A k^{d_1}$ die in diese eintretende Lichtmenge. Da man der Beobachtung zufolge beide gleich macht, so ist

$$b A k^d = b_0 A k^{d_1}$$

oder

$$\frac{b}{b_0} = k^{d_1 - d}.$$

Bei einem Einfallswinkel i ist die in die eine Spalthälfte eintretende Lichtmenge $b B k^{\frac{d}{\cos r}}$, die in die andere eintretende, deren Breite nun verändert werden muss, $b_i B k^{\frac{d_1}{\cos r}}$, wenn b_i nunmehr an die Stelle von b_0 tritt, B den Reflexionsfactor für den Einfallswinkel i, r den zu i gehörigen Brechungswinkel bedeutet. Demgemäss ist für den Einfallswinkel i

$$\frac{b}{b_i} = k^{\frac{d_1 - d}{\cos r}}.$$

Beim Einfallswinkel 0° hat man

$$\frac{b}{b_0} = k^{d_1 - d},$$

woraus sich

$$\cos r = \log \frac{b}{b_0} : \log \frac{b}{b_i}$$

und der Brechungsindex $n = \sin i : \sin r$ auf die einfachste Weise ergiebt. Man hat hierbei nicht nöthig, die Dickendifferenz der beiden Schichten zu kennen.

Wernicke berechnete drei Tabellen der Brechungsindices des festen Fuchsins. Dieser Farbstoff steht in Bezug auf die Stärke der Absorption der grünen Strahlen den Metallen am nächsten und zeigt gleichzeitig die Erscheinung der anomalen Dispersion am ausgeprägtesten. Die folgende Tabelle enthält das Resultat einer der drei Reihen von Versuchen. Aus den für die Einfallswinkel 0° und 60° gemessenen Spaltbreiten wurden die Brechungsexponenten n in der angegebenen Weise berechnet:

n	λ	n	λ
2·290	598	1·601	489
2·595	581	1·507	483
2·595	571	1·509	469
2·354	562	1·368	460
2·035	550	1·309	454
1·944	541	1·225	448
1·675	532	1·282	443
1·653	522	1·314	438
1·632	512		

Man sieht in Uebereinstimmung mit der von Helmholtz gegebenen Theorie den Brechungsexponenten vor der Stelle stärkster Absorption, etwa bei der Linie D, ein Maximum erreichen, dann durch den Absorptionsstreifen hindurch rasch abfallen und endlich hinter dem Absorptionsstreifen, etwa bei der Linie G, ein Minimum erreichen, um dann wieder anzusteigen.

Die Extinctionscoëfficienten des festen Fuchsins sind nicht völlig identisch mit jenen des Fuchsins in Lösung. Die ganze Absorptionsbande bietet bei der festen Substanz geringere Unterschiede dar.

219. Die Brechungsexponenten gemessen durch Totalreflexion.

Schon Christiansen untersuchte die anomale Dispersion auch mittelst der totalen Reflexion. Betrachtet man die Hypotenusenfläche eines rechtwinkeligen Glasprismas mittelst des Lichtes, welches durch die beiden Kathetenflächen ein- und austritt, so gewahrt man die Grenze der totalen Reflexion als farbigen Streifen. Befeuchtet man nun die Hypotenusenfläche mit einer Fuchsinlösung, so zeigt sich ein eigenthümliches Verhalten. Die Grenze der totalen Reflexion nimmt nun den ganzen Raum ein. Das senkrecht von der Hypotenusenfläche reflectirte Licht ist grün, die Farbe geht aber mit wachsendem Einfallswinkel ziemlich plötzlich in Blau über, es tritt somit die totale Reflexion für diese Farbe ein. Die Farbe wird nun folgeweise violett, purpurroth, rosenroth und zuletzt weiss. Im Spectroskope untersucht, löst das reflectirte Licht sich auf folgende Weise in seine einzelnen Farben auf. Das grüne Licht ist fast rein, es besteht aus Licht, dessen Platz im Spectrum zwischen den Linien E und F ist. Von Gelb und Orange ist keine Spur vorhanden und ausserordentlich wenig Roth. Mit wachsendem Einfallswinkel kommt zuerst Blau und Violett, und zwar in voller Stärke hinzu, dann Roth, Orange und zuletzt Gelb.

Diese farbige Reflexion zeigt sich ausserdem bei manchen anderen Gelegenheiten. Ein in einem mit Oel gefüllten Glase befindliches Tröpfchen der Auflösung zeigt verschiedene Farben, am deutlichsten die früher genannten grünen und blauen Farben. Dasselbe wiederholt sich, wenn man ein mit der Flüssigkeit gefülltes Probeglas ins Oelgefäss stellt.

V. v. Lang wendete das folgende Verfahren an. Ein rechtwinkeliges Parallelepiped aus Flintglas, Fig. 11 (a. f. S.), hat eine seiner breiten Seiten vollkommen plan geschliffen. In der Mitte dieser Seite ist eine runde cylindrische Vertiefung eingeschliffen zur Aufnahme der zu untersuchenden Flüssigkeit. Geschlossen wird dieser Raum durch die Hypotenusenfläche eines rechtwinkeligen Flintglasprismas. In den cylindrischen Hohlraum führt noch eine Oeffnung von oben, welche zweckmässig

durch ein eingeschliffenes Thermometer geschlossen wird. Lichtstrahlen, die senkrecht zur Achse des Prismas auf die erste Kathetenfläche fallen, gelangen auf die Hypotenusenfläche, erleiden hier eventuell totale Reflexion und treten durch die zweite Kathetenfläche aus. Zur Messung dieses Austrittswinkels wurde ein Theilkreis mit Fernrohr benutzt, auf dessen Tischchen sich der Reflexionsapparat befand. Um die Grenze der Totalreflexion für die einzelnen Linien des Spectrums beobachten zu können, wurde der erwähnte Theilkreis so mit dem Beobachtungsfernrohr eines Spectralapparates fest verbunden, dass die aus dem Ocular des Spectralapparates dringenden Sonnenstrahlen durch die eine Kathetenfläche des Prismas des Reflexionsapparates eindrangen, um an der Hypotenusenfläche reflectirt zu werden. Bewegt man das Beobachtungsfernrohr des Spectralapparates, auf dessen Tischchen sich ein Glasprisma befindet, so bewegt sich der Reflexionsapparat mit, und der Winkel, unter welchem die verschiedenen Farben auf die Hypotenusenfläche fallen, wird geändert, so dass die Grenze der totalen Reflexion sich verschiebt und mit einer beliebigen Fraunhofer'schen Linie zur Coincidenz gebracht werden kann. Die ganze Erscheinung wird mit dem Fernrohr des Theilkreises verfolgt, zugleich wird mit demselben der Winkel gemessen, unter welchem die an der Grenze der Totalreflexion liegenden Strahlen gegen die Normale der zweiten Prismenfläche austreten.

Fig. 11.



Nennen wir α den Austrittswinkel einer Linie für den Fall, dass sie gerade die Grenze der totalen Reflexion bildet (Fig. 11), so hat man, wenn diese totale Reflexion unter dem Winkel γ erfolgt, und wenn μ den Brechungsexponenten der Lösung gegen Luft bedeutet, n den Brechungsexponenten des Glases,

$$\mu = n \sin \gamma$$

$$\gamma = \varphi + \beta, \quad \sin \beta = \frac{1}{n} \sin \alpha.$$

Man findet also μ, wenn φ und n bekannt sind, durch Messung des Winkels α.

Auch hier ergiebt sich, wie bei der Prismenmethode, eine Schwierigkeit in der Nähe der stärksten Absorption, indem daselbst die partielle Reflexion so beträchtlich ist, dass die Grenze zwischen partieller und totaler Reflexion undeutlich wird.

Beispielsweise wurde für concentrirte Cyaninlösung bei einer zwischen 17·8° und 18·5° variirenden Temperatur erhalten:

Linie	n
B	1·3652
C	1·3663
E	1·3627
b	1·3635
F	1·3665
G	1·3771

Hatte V. v. Lang darauf aufmerksam gemacht, dass die von Kundt, Sieben und Ketteler an concentrirter Cyaninlösung angestellten Messungen unter einander nicht hinreichend stimmten, so ergab eine Untersuchung Sieben's über diesen Gegenstand, dass die Differenzen darin ihren Grund haben, dass Lösungen von verschiedenem Cyaningehalte mit einander verglichen wurden.

220. Anomale Dispersion und Interferenz.

Von mehreren angestellten Interferenzversuchen wollen wir nur den folgenden, am Prager physikalischen Institute ausgeführten, beschreiben.

Mit einer verticalen Doppelspalte vor dem Objectiv eines Fernrohres visirt man einen hellen Punkt an und setzt vor das Ocular ein Prisma mit horizontaler brechender Kante. Es erscheint ein Streifensystem, welches von vollkommener verticaler Symmetrie, z. B. oben roth, unten violett ist, und dessen Streifen im Violett convergiren (140). Wird eine Fuchsinplatte vor die linke Spalte gesetzt, so wird das Streifensystem nicht allein nach links verschoben, sondern auch S-förmig gekrümmt.

Bibliographie.

Theorie der Dispersion.

1746. Euler, Nova theoria lucis et colorum. *Opuscula varii argumenti* I, 217.

1822. Fresnel, Second supplément au premier Mémoire sur la double réfraction. *OEuvres complètes,* t. II.

1827. Rüdberg, Ueber die Dispersion des Lichtes, *Pogg. Ann.*, IX, 483. — *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXXVI, 439.

1828. Bigeon, Note sur la dispersion de la lumière. *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXXVII, 440.

1830. Challis, An Attempt to Explain Theoretically the different Refrangibility of the Rays of Light, according to the Hypothesis of Undulations, *Phil. Mag.*, (2), VIII, 169.

1830—35. Cauchy, Mémoire sur la dispersion de la lumière, *Nouv. Exerc. de mathém.*, Prague, 1835.

1831. Airy, *Mathematical Tracts,* p. 285.

1835—38. Baden Powell, Researches toward Establishing a Theory of the Dispersion of Light, *Phil. Trans.*, 1835, p. 249; 1836, p. 17; 1837, p. 19; 1838, p. 67. — *Inst.* II, 120, 220; III, 179, 350; V, 124; VI, 115, 268.

1835—38. Baden Powell, On Cauchy's Theory of the Dispersion of Light, *Phil. Mag.*, (3), VI, VIII, X, XI.

1836—37. Baden Powell, On the Formulae for the Dispersion of Light, *Phil. Mag.*, (3), VIII, IX, X.

1836. Cauchy, Sur la dispersion de la lumière, *C. R.*, II, 182, 207.

1836. Tovey, On the Theory of the Dispersion of Light, *Phil. Mag.*, (3), VIII, 7.

1836. Kelland, On the Dispersion of Light as Explained by the Hypothesis of Finite Intervals, *Cambr. Trans.* VI, 153. — *Inst.*, IV, 204.

1838. Baden Powell, Remarks on the Theory of the Dispersion of Light as connected with Polarization, *Phil. Trans.*, 1838, 253; 1840, 157. — *Inst.*, IX, 315.

1838. Radicke, Berechnung und Interpolation der Brechungsverhältnisse nach Cauchy's Dispersionstheorie und deren Anwendung auf doppeltbrechende Krystalle, *Pogg. Annal.*, XLV, 246, 450.

1839. Baden Powell, On some Points in the Theory of the Dispersion of Light, *Phil. Mag.*, (3), XIV.

1841. Baden Powell, *A general and elementary View of the Undutatory Theory as Applied to the Dispersion of Light,* London.

1841. Baden Powell, On the Dispersion of Light, *11the Rep. of Brit. Assoc.* — *Inst.*, IX, 315.

1842. Cauchy, Mémoire sur les lois de la dispersion plane et de la dispersion circulaire, *C. R.*, XV, 1076.

1845. Mossotti, *Sulle proprietà degli Spettri di Fraunhofer formati dai reticoli ed Analisi della Luce che somministrano,* Pisa.

1846. Broch, Theorie der Dispersion des Lichts, *Dove's Repert. der Phys.*, VII, 27.

1850. Cauchy, Note sur les vibrations transversales de l'éther et la dispersion des couleurs, *C. R.*, XXXI, 842.

1857. Redtenbacher, *Das Dynamidensystem*, Mannheim.

1857. Forti, Valori dell' indice di refrazione di alcune sostanze transparenti in funzione della lunghezza delle undulazioni vel vuoto di un raggio qualunque dello spettro solare, *Cimento*, VI, 411.

1859. Ponton, On the Law of the Wave Lenghts Corresponding to Certain Points in the Solar Spectrum, *29the Rep. of Brit. Assoc.*, 20. — *Phil. Mag.*, (4), XIX, 437.

1859. Ponton, On Certain Laws of Chromatic Dispersion, *29the Rep. of Brit. Assoc.*, 15. — *Phil. Mag.*, (4), XIX, 165, 263, 364.

1860. Eisenlohr, Ueber die Erklärung der Farbenzerstreuung und des Verhaltens des Lichtes in Krystallen, *Pogg. Ann.* CIX, 215.

1860. Ponton, Further Researches Regarding the Laws of Chromatic Dispersion, *Phil. Mag.*, (4), XX, 253.

1860. Baden Powell, Comparison of Some Recently Determined Refractive Indices with Theory, *Proceed. of R. S.*, X, 199. — *Phil. Mag.*, (4), XIX, 463.

1861. Cristoffel, Ueber die Dispersion des Lichtes, *Berl. Monatsber.*, 1861, p. 906, 997. — *Pogg. Ann.*, CXVII, 27. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXIV, 370.

1862. Schrauf, Ueber die Abhängigkeit der Fortpflanzung des Lichtes von der Körperdichte, *Pogg. Ann.*, CXVI, 193.

1862. Leroux, Recherches sur les indices de réfraction des corps qui ne prennent naissance qu'à des températures élevées. — Dispersion anormale de la vapeur d'iode. *C. R.*, LV, 129.

1863. Verdet, Note sur les formules de dispersion, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXIX, 415. — *C. R.*, LVI, 630; LVII, 670.

1863. Briot, Sur la dispersion de la lumière, *C. R.*, LVII, 866.

1863. Gladstone et Dale, Researches on the Refraction, Dispersion and Sensitiveness of Liquids, *Phil. Trans.*, 1863, p. 317. — *33the Rep. of Brit. Assoc.*, 12.

1864. Briot, *Essai sur la théorie mathématique de la lumière*, Paris.

1864. Challis, Researches on Hydrodynamics with References to a Theory of the Dispersion of Light, *Phil. Mag.*, (4), XXVII, 452; XXVIII, 489.

1864. Matthieu, Mémoire sur la dispersion de la lumière, *C. R.*, LIX, 885.

1864. Van der Willigen, Brechungscoëfficienten des destillirten Wassers, *Pogg. Ann.* CXXII, 191. — *Ann. de chim. et de phys.*, (4), III, 493.

1864. Ditscheiner, Die Brechungsquotienten einer Lösung von salpetersaurem Wismuthoxyd, *Wien. Ber.*, XLIX, 326.

1864. Ketteler, Ueber die Dispersion des Lichtes in den Gasen, *Berl. Monatsber.*, 1864, p. 360. — *Pogg. Ann.*, CXXIV, 390.

1864. Ketteler, *Beobachtungen über die Farbenzerstreuung der Gase. — Abhängigkeit der Fortpflanzung des Lichtes von Schwingungsdauer und Dichtigkeit*, Bonn.

1864. Mascart, Note sur les formules de dispersion, *Ann. de l'Ec. Norm.*, t. I.

1865. Cristoffel, Ueber die Dispersion des Lichtes, *Pogg. Ann.* CXXIV, 53.

1866. Matthieu, Mémoire sur la dispersion de la lumière, *Journ. de Liouville*, (2), XI, 49.

1867. Renard, Théorie sur la dispersion de la lumière. *C. R.*, LXIV.

1867. A. R. Catton, On the theory of the refraction and dispersion of light. Part. I. *Edinb. Proc.* V.

1868. Boussinesq, Théorie nouvelle des ondes lumineuses. *Liouville* t. XIII, p. 313, 340, 425.

1868. R. A. Mees, Ueber die von C. Briot aufgestellte Dispersionstheorie. *Pogg.*, CXXXIV.

1868. W. Gibbs, On the measurement of wave-lengths by the method of comparison. *Silliman,* (2) XLV.

1868. C. Briot, Sur les vibrations intérieures des molécules. *Liouville,* t. XIII.

1869. Challis, Comparison of a theory of dispersion of light on the hypothesis of undulations with Ditscheiner's determinations of wave-lenghts and corresponding refracting indices, *Phil. Mag.* (4), XXXVIII.

1870. W. Gibbs, On the measurement of wave-lenghts by meaus of indices of refraction, *Phil. Mag.* (4), XL.

1870. E. Ketteler, Ueber den Einfluss der ponderablen Molecüle auf die Dispersion des Lichtes und über die Bedeutung der Constanten der Dispersionsformeln, *Pogg.*, CXL.

1870. W. Wernicke, Ueber die Brechungsindices und die Dispersion undurchsichtiger Körper, *Pogg.*, CXXXIX.

1871. Christiansen, Ueber das Brechungsverhältniss des Fuchsins, *Pogg.*, CXLI, CXLIII.

1871. A. Kundt, Ueber die anomale Dispersion der Körper mit Oberflächenfarben, *Pogg.*, CXLII.

1871. A. Kundt, Nachtrag zu dem Aufsatz: Ueber die anomale Dispersion der Körper mit Oberflächenfarben, *Pogg.*, CXLIII.

1871. A. Kundt, Ueber anomale Dispersion. Zweite Mittheilung, *Pogg.*, CXLIII.

1871. A. Kundt, Ueber anomale Dispersion. Dritte Mittheilung, *Pogg.*, CXLIV.

1871. J. L. Soret, Ueber die anomale Dispersion einiger Substanzen, *Pogg.*, CXLIII.

1871. V. v. Lang, Ueber die anomale Dispersion spitzer Prismen, *Wien. Ber.*, LXIII.

1871. W. Sellmeier, Zur Erklärung der abnormen Farbenfolge im Spectrum einiger Substanzen, *Pogg.*, CXLIII.

1872. W. Sellmeier, Ueber die durch die Aetherschwingungen erregten Mitschwingungen der Körpertheilchen und deren Rückwirkung auf die ersteren, besonders zur Erklärung der Dispersion und ihrer Anomalien, *Pogg.*, CXLV.

1872. O. E. Meyer, Versuch einer Erklärung der anomalen Farbenzerstreuung, *Pogg.*, CXLV.

1872. A. Kundt, Ueber anomale Dispersion. Vierte Mittheilung, *Pogg.*, CXLV.

1872. C. Christiansen, Zur Farbenzerstreuung des Fuchsins, *Pogg.*, CXLVI.

1872. Soret, Sur la dispersion anomale, *Arch. sc. phys.*, (2), XLIV.

1872. H. F. Talbot, Note on some anomalous spectra, *Proc. Edinb. Soc.* VII.

1872. E. Wiedemann, Ueber die elliptische Polarisation des Lichtes und ihre Beziehungen zu den Oberflächenfarben der Körper. Inauguraldissertation. Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

1873. G. Perry, Sur la variabilité des coëfficients de l'élasticité et la dispersion, *C. R.*, LXXVI.

1873. Puschl, Ueber den Zusammenhang zwischen Absorption und Brechung des Lichtes, *Wien. Ber.*, (2), LXVII.

1874. W. Schmidt, Die Brechung des Lichtes in Gläsern etc., *Leipzig,* 1874.

1874. E. Ketteler, Das specifische Gesetz der sogenannten anomalen Dispersion, *Pogg. Jubelbd.*

1874. L. Bolzmann, Ueber den Zusammenhang der Drehung der Polarisationsebene und der Wellenlänge der verschiedenen Farben, *Pogg. Ann., Jubelbd.*

1874. Helmholtz, Zur Theorie der anomalen Dispersion, *Berl. Monatsber.*

1874. W. Wernicke, Ueber die Absorption und Brechung des Lichtes in metallisch undurchsichtigen Körpern, *Pogg*, CLV.

1875. Ospobischin, Versuche über anomale Dispersion mit Hülfe der Interferenz, angestellt im Prager physikalischen Institute, *Carl's Rep.*, XI.

1875. Wernicke, Ueber die Absorption und Brechung des Lichtes in metallisch undurchsichtigen Körpern, *Pogg.*, CLV.

1876. E. Ketteler, Versuch einer Theorie der Dispersion des Lichtes in einfach und doppelt brechenden Mitteln, *Carl's Rep.*, XII.

1876. E. Ketteler, Zum Zusammenhang zwischen Dispersion und Absorption, *Pogg.*, CLX.

1876. E. Ketteler, Zur Theorie der Dispersion und Absorption des Lichtes in doppelt brechenden Mitteln. Dichroismus und Dispersion der optischen Achsen, *Pogg. Erg.*, VIII.

1878. E. Lommel, Theorie der normalen und anomalen Dispersion, *Wied. Ann.*, 1878.

1879. E. Lommel, Ueber eine zweiconstantige Dispersionsformel, *Wied. Ann.*, 1879.

1879. E. Ketteler, Das Dispersionsgesetz, *Wied. Ann.*, 1879.

1879. G. Sieben, Untersuchungen über die anomale Dispersion des Lichtes, *Wied. Ann.*, 1879.

1880. A. Kundt, Ueber anomale Dispersion im glühenden Natriumdampf. *Wied. Ann.*, 1880.

1880. E. Ketteler, Constructionen zur anomalen Dispersion, *Wied. Ann.*, 1880.

1880. V. v. Lang, Optische Notizen, *Wien. Ber.*, LXXXII.

1880. O. Hesse, Untersuchungen über das Dispersionsgesetz, *Wied. Ann.*, 1880.

1881. K. Pulfrich, Photometrische Untersuchungen der Absorption des Lichtes in isotropen und anisotropen Medien. Inauguraldissertation, *Bonn,* 1881.

1881. E. Ketteler, Einige Anwendungen des Dispersionsgesetzes auf durchsichtige, halbdurchsichtige und undurchsichtige Mittel, *Wied. Ann.*, 1881.

1881. E. Ketteler, Experimentaluntersuchung über den Zusammenhang zwischen Refraction und Absorption des Lichtes, *Wied. Ann.*, 1881.

1881. V. v. Lang, Bestimmung des Brechungsquotienten einer concentrirten Cyaninlösung, *Wien. Ber.*, 1881.

1882. G. Sieben, Untersuchung über die anomale Dispersion etc., *Sitzber. der naturw. Ges. zu Aachen*, 1882.

1882. E. Ketteler, Einige Bemerkungen zu Arbeiten der Herren Lommel, Glazebrook und Mathieu, *Wied. Ann.*, 1882.

1882. A. Wüllner, Zur Dispersion farblos durchsichtiger Medien, *Wied. Ann.*, 1882.

1883. E. Ketteler, Optische Controversen, *Wied. Ann.*, 1883.

XXII.

Chromatische Polarisation.

221. Entdeckung der chromatischen Polarisation durch Arago.

Die Erscheinungen der chromatischen Polarisation wurden von Arago im Jahre 1811 entdeckt und am 11. August desselben Jahres der Akademie der Wissenschaften in Paris mitgetheilt [1]).

Als Arago durch ein Kalkspathprisma nach dem blauen Himmel blickte, während sich zufällig ein Glimmerblättchen zwischen Prisma und Auge befand, sah er die beiden Bilder lebhaft gefärbt. Da er schon früher Gelegenheit gehabt hatte zu bemerken, dass das blaue Himmelslicht gewöhnlich polarisirt ist, und da das Phänomen bei Benutzung des diffusen Wolkenlichtes ausblieb, wurde Arago darauf geführt, der Polarisation des einfallenden Lichtes die Entstehung des Phänomens zuzuschreiben. Dasselbe zeigte sich in der That, mochte das einfallende Licht wie immer polarisirt sein.

Man kann diesen Fundamentalversuch auch in der folgenden Weise anstellen. Man lasse polarisirtes Licht durch einen doppeltbrechenden Analyseur treten, drehe diesen, bis eines der beiden Bilder verschwindet und bringe sodann zwischen Polariseur und Analyseur ein dünnes, doppeltbrechendes Krystallblättchen. Das verschwundene Bild erscheint wieder, und beide Bilder erscheinen gefärbt. Decken sich die Bilder zum Theil, so erscheint das gemeinsame Feld weiss. Man kann hieraus schliessen, dass die beiden Bilder complementär gefärbt sind.

Das Wiedererscheinen des einen der beiden Bilder und die Färbung desselben scheint darauf hinzuweisen, dass das Krystallblättchen für

---

[1]) *Mémoire sur une modification remarquable qu'éprouvent les ragons lumineux dans leur passage à travers certains corps. Mém. de la prem. classe de l'Inst.*, XII, 93.

gewisse Farben die Polarisation des einfallenden Lichtes aufhebt. Daher rührt der von Arago eingeführte Ausdruck „Depolarisation".

Arago variirte seinen Versuch und gelangte zu den folgenden experimentellen Resultaten, welche er im Laufe des Jahres 1812 in mehreren Abhandlungen der Pariser Akademie der Wissenschaften mittheilte.

1. Natürliches Licht bringt die Erscheinung nicht hervor. Die Polarisation des einfallenden Lichtes ist für das Zustandekommen derselben wesentlich. Im Uebrigen kann der Polariseur ein beliebiger sein.

2. Das Blättchen muss ein doppeltbrechendes sein.

Es muss hier bemerkt werden, dass Arago sich gleichwohl nie von der Unwirksamkeit der einfachbrechenden Blättchen vollständig überzeugte, da ihm ein Flintglasblättchen Farben gezeigt hatte. Diese Anomalie wird heute auf die accidentelle Doppelbrechung zurückgeführt.

3. Auch der Analyseur kann ein beliebiger sein.

4. Ein doppeltbrechender Analyseur giebt stets complementär gefärbte Bilder.

5. Die Farben der beiden Bilder variiren mit der Lage des Blättchens.

6. Dreht man das Blättchen in seiner eigenen Ebene, so findet man gewisse Lagen, für welche beide Bilder weiss sind; ebenso, wenn statt des Blättchens der Analyseur gedreht wird. Für gewisse Lagen des Hauptschnittes des Analyseurs gegen die ursprüngliche Polarisationsebene kann eines der beiden weissen Bilder verschwinden, also dass keine Depolarisation vorhanden ist.

7. Die Farben der Bilder hängen von der Dicke des Blättchens und seiner Orientation im Krystalle ab. Die Farben verschwinden, wenn das Blättchen zu dick, oder wenn es excessiv dünn ist.

Das letztere Resultat erregte in hohem Grade die Aufmerksamkeit Arago's und liess ihn glauben, dass die doppeltbrechenden Körper aus einfachbrechenden, durch leere oder mit Luft erfüllte Zwischenräume getrennten, Lamellen zusammengesetzt seien, und dass die Farben dünner Krystallblättchen in der Art hervorgebracht würden, wie die Newton'schen Farben dünner Blättchen.

Man sieht schliesslich, dass das Zustandekommen des Phänomens an drei Bedingungen geknüpft ist:

1. Die Polarisation des einfallenden Lichtes.
2. Die Anwesenheit eines doppeltbrechenden Blättchens.
3. Das Vorhandensein eines Analyseurs.

Es ist nicht nöthig, dass Polariseur und Analyseur im Stande sind, das Licht vollständig zu polarisiren. Je unvollständiger jedoch die Polarisation ist, desto weniger gesättigt erscheinen die Farben.

Als Arago eine senkrecht zur Achse geschnittene Quarzplatte benutzte, beobachtete er eigenthümliche Erscheinungen, welche ihn zur Entdeckung der Rotationspolarisation führten. Wir lassen diese Er-

scheinungen vorläufig bei Seite und schliessen zunächst Blättchen aus Quarz oder Krystallen von analogen Eigenschaften von unseren Betrachtungen aus.

222. Biot's Gesetze.

Gleich nach der Entdeckung der Erscheinungen der chromatischen Polarisation durch Arago ergab sich Biot, 1812, 1813 und 1814, dem Studium dieses Gegenstandes. Er stellte die experimentellen Gesetze auf und entwickelte eine Theorie auf dem Boden der Emanationstheorie.

1. Lässt man das vom Polariseur kommende Licht normal durch ein doppeltbrechendes Krystallblättchen und sodann durch einen doppeltbrechenden Analyseur treten, so erhält man zwei complementär gefärbte Bilder. Dreht man das Krystallblättchen oder den Analyseur um die Achse des Apparates, so ändern die Bilder ihren Sättigungsgrad, und indem sie durch Weiss hindurchgehen, wechseln sie gegenseitig die Farbe. Ist also beispielsweise ursprünglich eines der Bilder grün, das andere roth, so gewahrt man während der Drehung keine andere Farbe als Grün und Roth, doch erscheint bald das erste Bild grün, und das zweite roth, bald umgekehrt.

Dieses Gesetz gilt nicht mehr für Krystalle, welche die Polarisationsebene drehen, wie eine normal zur Achse geschnittene Quarzplatte.

2. Die beiden Bilder erscheinen farblos, wenn der Hauptschnitt des Krystallblättchens parallel oder normal entweder zur Polarisationsebene des einfallenden Lichtes, oder zum Hauptschnitte des Analyseurs liegt. Das Krystallblättchen zeigt also im Allgemeinen in vier Lagen farblose Bilder.

Liegt der Hauptschnitt des Analyseurs parallel oder normal zur ursprünglichen Polarisationsebene, so reduciren sich die vier Lagen auf zwei. In jeder dieser beiden Lagen verschwindet eines der Bilder und erscheint das andere weiss.

Bildet der Hauptschnitt des Analyseurs mit der ursprünglichen Polarisationsebene einen Winkel von 45°, und ist der Hauptschnitt des Krystallblättchens zur ursprünglichen Polarisationsrichtung parallel oder normal, so sind die beiden weissen Bilder gleich hell.

3. Alles Uebrige constant erhalten, variirt die Farbe der beiden Bilder mit der Dicke des Blättchens. Die Farbenfolge ist die der Newton'schen Ringe, d. h. die Dicke des Krystallblättchens ist proportional der Dicke einer Luftlamelle, welche dieselbe Farbe durch Reflexion oder Transmission giebt.

Steht der Hauptschnitt des Analyseurs auf der ursprünglichen Polarisationsebene senkrecht, und bildet der Hauptschnitt des Blättchens mit derselben Ebene einen Winkel von 45°, so entsprechen die Farben

des ordentlichen Bildes den durch Transmission, und jene des ausserordentlichen den durch Reflexion hervorgebrachten Ringen.

Die Dicke eines Krystallblättchens, welches eine gewisse Farbe giebt, ist stets ungleich beträchtlicher als jene der entsprechenden Luftlamelle. Für Glimmer ist das Verhältniss der Dicken 440 zu 1, für Kalkspath 13 zu 1, im Allgemeinen ist das Verhältniss um so grösser, je geringer die doppeltbrechende Kraft des Krystalls ist.

Um den Einfluss der Dicke des Krystallblättchens zu studiren, benutzte Biot zunächst das Krystallblättchen als Polariseur. Auf eine dunkle Unterlage wurde eine grosse Zahl verschieden dicker Glimmerblättchen gelegt und Sonnenstrahlen unter dem Polarisationswinkel auf dieselben geworfen. Die reflectirten Strahlen traten durch einen doppeltbrechenden Analyseur und zeigten die gefärbten Bilder. Die Strahlen durchdringen das Blättchen, werden an der zweiten Begrenzungsfläche vollständig polarisirt zurückgeworfen, treten an der ersten Begrenzungsfläche wieder aus und geben durch den Analyseur tretend die farbigen Bilder. Die an der ersten Begrenzungsfläche reflectirten Strahlen sind senkrecht zu jenen Strahlen polarisirt und können vollständig dadurch eliminirt werden, dass man den Hauptschnitt des Analyseurs der Einfallsebene parallel stellt und nur das ausserordentliche Bild beobachtet. Ueberdies sind die an der ersten Begrenzungsfläche reflectirten Strahlen stets weiss und vermögen nur den Sättigungsgrad der gefärbten Bilder zu beeinflussen.

Statt zahlreicher Blättchen von verschiedener Dicke kann man auch ein einziges Blättchen von variabler Dicke benutzen. Zu diesem Zwecke kann man aus einem Krystalle ein vierseitiges, rechtwinkeliges Prisma schneiden und dieses mittelst eines durch zwei einander gegenüberliegende Kanten geführten Schnittes in zwei dreiseitige Prismen zerlegen. Lässt man diese beiden Prismen mit den Hypotenusenflächen

Fig. 12.

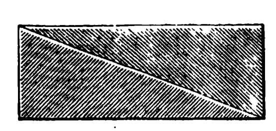
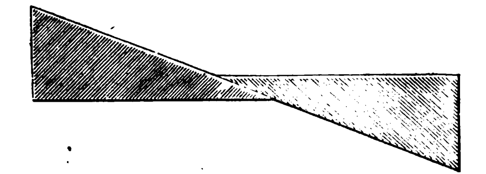


Fig. 13.



an einander gleiten, Fig. 12 und Fig. 13, so hat man eine Platte von variabler Dicke.

4. Neigt man das Blättchen gegen die einfallenden Strahlen, so ändern die Bilder ihre Farbe, und zwar in der Weise, als hätte sich die Dicke der Platte vergrössert oder verkleinert. Hat man beispielsweise eine parallel zur Achse geschnittene einachsige Krystallplatte und dreht man sie um diese Achse, so erhält man Farben, welche Newton'schen

Ringen immer höherer Ordnung entsprechen, als würde die Dicke der Platte zunehmen. Dreht man aber um eine Linie senkrecht zur Achse, so entsprechen die Farben bei wachsender Neigung Newton'schen Ringen immer niedrigerer Ordnung, als würde die Dicke der Platte abnehmen.

5. Alles Uebrige constant erhalten, hängen die Farben von der Richtung ab, in welcher die Platte aus dem Krystalle geschnitten ist. Handelt es sich um einachsige Krystalle, so erscheinen die Farben entsprechend Newton'schen Ringen von um so kleinerer Ordnungszahl, je mehr sich der Winkel der Schnittebene mit der Achse einem rechten Winkel nähert. Wird dieser Winkel genau ein rechter, so verschwindet die Färbung der Bilder. Man weiss in der That, dass ein einachsiger Krystall sich in der Richtung seiner Achse wie ein einfachbrechender Körper verhält.

6. Zwei gleichartige Krystallblättchen, deren Hauptschnitte parallel stehen, wirken wie ein einziges Blättchen, dessen Dicke der Summe der Dicken jener beiden gleichkommt. Stehen aber die Hauptschnitte auf einander senkrecht, so entsprechen die Erscheinungen der Differenz der beiden Dicken.

Im letzteren Falle kann man die Farbenerscheinungen mittelst sehr dicker Platten erhalten.

Hat man zwei ungleichartige Blättchen, so muss man unterscheiden, ob sie attractiv oder repulsiv sind. Haben beide dasselbe Zeichen, so verhalten sie sich wie gleichartige Blättchen, haben sie verschiedene Zeichen, so wirken sie entsprechend der Differenz oder der Summe der Dicken, je nachdem die Hauptschnitte parallel stehen, oder einen rechten Winkel einschliessen.

223. Abwechselnde Polarisation und Depolarisation im Krystallblättchen.

Biot hat aus dem Umstande, dass die Farben der Bilder mit der Dicke des Blättchens wie die Newton'schen Farben variiren, besondere Consequenzen gezogen.

Nehmen wir an, der Hauptschnitt des Blättchens sei gegen die ursprüngliche Polarisationsebene um 45^0, und jener des Analyseurs um 90^0 gedreht; die Farben des ordentlichen Bildes variiren dann mit wachsender Dicke des Blättchens wie die durchgelassenen Newton'schen Farben, die des ausserordentlichen wie die reflectirten. Erreicht also in diesem Falle eine Farbe im ausserordentlichen Bilde ihr Intensitätsmaximum, und fehlt sie folglich im ordentlichen, so sind die Strahlen dieser Farbe nach ihrem Austritte aus dem Blättchen in der ursprünglichen Ebene polarisirt; hat hingegen die Farbe ihr Maximum im

ordentlichen Bilde und fehlt im ausserordentlichen, so sind die Strahlen dieser Farbe senkrecht zur ursprünglichen Ebene polarisirt; erscheinen endlich beide Bilder gleich hell, so bleiben sie es auch, wenn man den Analyseur dreht, und folglich ist die entsprechende Farbe beim Austritt aus dem Blättchen vollständig depolarisirt. Da die Farbe des ausserordentlichen Bildes wie die der reflectirten Newton'schen Ringe mit der Dicke des Blättchens variiren, so sieht man, dass immer, wenn die Dicke des Blättchens ein ganzes Vielfaches einer gewissen von der Farbe abhängigen Dicke e beträgt, die Strahlen einer gegebenen Farbe in der ursprünglichen Ebene polarisirt sind; und da die Farben des ordentlichen Bildes wie die der durchgelassenen Newton'schen Ringe variiren, so sieht man ferner, dass wenn die Dicke des Blättchens ein ungerades Vielfaches von $\frac{e}{2}$ beträgt, die Strahlen derselben Farbe senkrecht zur ursprünglichen Ebene polarisirt sind; beträgt schliesslich die Dicke des Blättchens ein ungerades Vielfaches von $\frac{e}{4}$, so zeigt die betrachtete Farbe in beiden Bildern dieselbe Intensität, und die Strahlen dieser Farbe sind vollständig depolarisirt.

Biot wurde so dahin geführt, unter Anwendung homogenen Lichtes die Existenz dieses Wechsels von Polarisation und Depolarisation experimentell darzustellen. Um die ganze Allgemeinheit der Resultate zu wahren, setzen wir voraus, der Hauptschnitt des Blättchens bilde mit der ursprünglichen Polarisationsebene einen beliebigen Winkel und bezeichnen diesen durch i. Lässt man die Dicke des Blättchens variiren, so gelangt man zu den folgenden Resultaten:

1. Man findet eine Reihe von Blättchendicken, für welche das homogene Licht nach seinem Austritte aus dem Blättchen vollständig in der ursprünglichen Ebene polarisirt ist, und diese Dicken sind alle ganze Vielfachen einer gewissen Dicke e, welche von der Farbe des Lichtes abhängt und um so kleiner ist, je stärker die Doppelbrechung des Blättchens.

2. Ist die Dicke des Blättchens ein ungerades Vielfaches von $\frac{e}{2}$, so ist das austretende Licht noch vollständig polarisirt, jedoch in einer Ebene, welche mit der ursprünglichen Polarisationsebene in Bezug auf den Hauptschnitt des Blättchens symmetrisch liegt, oder kurz gesagt in einer Ebene vom Azimuthe $2i$.

3. Ist die Dicke des Blättchens ein ungerades Vielfaches von $\frac{e}{4}$, und bildet der Hauptschnitt des Blättchens mit der ursprünglichen Polarisationsebene einen Winkel von 45^0, so zeigt das austretende Licht keine Spur von Polarisation. Gleichwohl unterscheidet es sich vom natürlichen: Lässt man nämlich dieses austretende Licht durch ein

zweites Blättchen von der Dicke $\frac{e}{4}$ treten, so erscheint es wieder vollständig polarisirt im Gegensatze zum natürlichen Lichte. Biot hat deshalb dem so modificirten Lichte einen besonderen Namen beigelegt und dasselbe total depolarisirtes Licht genannt.

4. Ist die Dicke des Blättchens kein ungerades Vielfaches von $\frac{e}{4}$, oder ist dies der Fall, aber der Hauptschnitt des Blättchens nicht unter 45^0 gegen die ursprüngliche Polarisationsebene geneigt, so verhält sich das austretende Licht beim Durchgange durch den Analyseur wie partiell polarisirtes Licht, es giebt stets zwei Bilder von ungleicher Intensität. Gleichwohl unterscheidet sich dieses Licht vom partiell polarisirten: Lässt man dasselbe nach dem Austritte aus dem Blättchen durch ein zweites Blättchen treten, dessen Dicke die Dicke des ersten Blättchens zu einem geraden oder ungeraden Vielfachen von $\frac{e}{2}$ ergänzt, so verwandelt sich das Licht in total polarisirtes Licht, was bei partiell polarisirtem Lichte nicht eintritt. Biot nannte dieses Licht partiell depolarisirtes Licht.

Biot bemerkte, dass die Wechsel von Polarisation und Depolarisation bei dickeren Blättchen verschwinden und glaubte daher, dass dicke Blättchen anders wirken als dünne. Allein Biot's Licht war nicht hinreichend homogen und er befand sich in einem ähnlichen Irrthum, wie Fresnel, als er glaubte, dass Strahlen nicht mehr interferiren, wenn die Wegdifferenz einige hundert Wellenlängen beträgt.

224. Theorie der mobilen Polarisation.

In der Emissionstheorie hat man zur Erklärung der Polarisation den Lichtmolecülen eine Gestalt zugeschrieben, welche um eine Achse symmetrisch sein sollte. Bei natürlichem Lichte haben die Achsen der auf einander folgenden Molecüle alle möglichen Richtungen senkrecht zum Strahle, beim polarisirten Lichte sind die Achsen parallel zu einer bestimmten Richtung.

Um die Erscheinungen der chromatischen Polarisation zu erklären, erfand Biot die Theorie der „mobilen Polarisation".

Wenn ein polarisirter Strahl in einen doppeltbrechenden Krystall eintritt, gerathen die Achsen der Lichtmolecüle in schwingende Bewegungen um ihre spätere Gleichgewichtslage im Hauptschnitte und senkrecht zu demselben. Rechnet man die Azimuthe von der ursprünglichen Polarisationsebene, und schliesst der Hauptschnitt des Blättchens mit dieser Ebene einen Winkel gleich i ein, so schwingen die Achsen

der Molecüle des ordentlichen Strahles zwischen den Azimuthen 0 und $2i$, die des ausserordentlichen Strahles zwischen 0 und $180^0 - 2i$.

Nimmt man eine Ebene senkrecht zum Strahle zur Ebene der Figur, Fig. 14, S. 69, bedeuten PP' und SS' die ursprüngliche Polarisations-ebene und den Hauptschnitt des Blättchens, und QQ' eine mit PP' bezüglich SS' symmetrische Ebene, so schwingen die Achsen der Molecüle des ordentlichen Strahles nach Biot's Theorie innerhalb des Winkels POQ, jene des ausserordentlichen innerhalb des Winkels POQ'. Biot nahm die Schwingungsdauer für alle Molecüle einer Farbe als constant, und für Molecüle verschiedener Farbe als verschieden an; er nahm ferner an, dass in einer gewissen Tiefe die Schwingungen aufhören und die Polarisationsachsen eines Theiles der Molecüle die eine, die des anderen Theiles die andere von zwei auf einander senkrechten Richtungen annehmen.

Nach dieser Theorie erklären sich die Wechsel der Polarisation und Depolarisation in der folgenden Weise. Hat das Blättchen eine solche Dicke, dass die Strahlen sich innerhalb des Blättchens während eines ganzen Vielfachen einer Schwingungsdauer bewegen, so haben die Achsen aller Molecüle des austretenden Strahles die Richtung PP', der Strahl ist in der ursprünglichen Richtung polarisirt. Entspricht die Dicke des Blättchens einer ungeraden Zahl halber Schwingungen, so ist der austretende Strahl längs QQ' polarisirt, d. i. unter dem Azimuth $2i$. Entspricht die Dicke des Blättchens einer ungeraden Zahl von Viertelschwingungen, so sind die Achsen der Lichtmolecüle beim Austritte mit dem Hauptschnitte des Blättchens theils parallel, theils stehen sie auf demselben senkrecht; ist überdies $i = 45^0$, so bilden die Molecüle zu gleichen Theilen den ordentlichen und den ausserordentlichen Strahl und das austretende Licht verhält sich beim Durchgange durch den Analyseur wie natürliches Licht. Für jede andere Dicke sind die Polarisationsachsen beim Austritte aus dem Blättchen theils der einen, theils der anderen von zwei Ebenen parallel, deren Winkel mit der ursprünglichen Polarisationsrichtung im Grössenverhältnisse der Winkel i und $90^0 - i$ stehen, und das so modificirte Licht muss sich im Analyseur wie partiell polarisirtes Licht verhalten. Die Erklärung der Farben bei Anwendung weissen Lichtes bereitet keine Schwierigkeit. Die Schwingungsdauer ist für die verschiedenen einfachen Farben verschieden, folglich finden sich verschiedenfarbige Strahlen beim Austritte aus dem Blättchen in verschiedenen Phasen der Polarisation, und können in den Bildern des Analyseurs in anderen Intensitätsverhältnissen auftreten, als im weissen Lichte.

225. Young's Theorie.

Young versuchte die Erscheinungen der chromatischen Polarisation nach der Wellentheorie zu erklären und dieselben insbesondere auf die

Interferenz zurückzuführen [1]). Indem er Biot's numerische Resultate benützte, fand er die folgende bemerkenswerthe Thatsache: Geben ein Krystallblättchen und eine Luftlamelle im durchgehenden Lichte dieselbe Farbe, so stehen ihre Dicken in solcher Beziehung, dass der Gangunterschied des ordentlichen und ausserordentlichen Strahles beim Austritte aus dem Krystallblättchen gleich ist dem Gangunterschiede der beiden interferirenden Strahlen der Luftlamelle, von welchen der eine direct durch die Lamelle gegangen ist, während der andere im Inneren derselben zwei Reflexionen erlitten hat. Aus dieser Thatsache erklärt sich, warum die Dicke des Krystallblättchens beträchtlich grösser ist als die einer Luftlamelle, welche dieselbe Farbe giebt, ferner, warum das Krystallblättchen um so dicker sein muss, je geringer der Grad seiner Doppelbrechung ist. Young wurde so dahin geführt, die von Arago und Biot beobachteten Erscheinungen der chromatischen Polarisation auf eine Interferenz des ordentlichen und ausserordentlichen, im Krystallblättchen entstehenden Strahles zurückzuführen. Diese beiden Strahlen haben in der That beim Austritte aus dem Blättchen eine Phasendifferenz, welche sie zur Interferenz befähigen würde, wenn die gewöhnlichen Interferenzgesetze auch auf die in verschiedenen Ebenen polarisirten Strahlen anwendbar wären. Da die Phasendifferenz für verschiedene Farben verschieden ist, ergiebt sich die Färbung der Bilder.

Young erkannte indessen selbst die Unvollkommenheit seiner Theorie, welche nicht zu erklären vermag, warum das einfallende Licht polarisirt sein muss, warum das austretende Licht neuerdings polarisirt werden muss und warum die beiden Bilder complementär gefärbt sind.

226. Fresnel's Theorie.

Wie Young, hatte auch Fresnel einerseits die Analogie zwischen den Farben dünner Blättchen und jenen der Krystallblättchen, andererseits die Unzulänglichkeit dieser Analogie zur Erklärung des letzteren Phänomens erkannt. Er ging jedoch weiter und forschte nach den Ursachen dieser Unzulänglichkeit. Er stellte sich zunächst die Frage, ob die ihm bekannten Gesetze der Interferenz auf das polarisirte Licht anwendbar seien. Wir wissen, zu welchen Resultaten (139) Fresnel's und Arago's Forschungen geführt haben, und es ist ersichtlich, wie sich aus den Gesetzen der Interferenz des polarisirten Lichtes die Phänomene der chromatischen Polarisation erklären. Der ordentliche und der ausserordentliche aus dem Krystallblättchen tretende Strahl sind rechtwinkelig polarisirt, sie können also nicht interferiren, so lange sie nicht

[1]) *Guarterly Review, avril* 1814.

auf dieselbe Polarisationsebene gebracht sind: daher die Nothwendigkeit des Analyseurs. Zwei rechtwinkelig polarisirte und auf dieselbe Polarisationsebene gebrachte Strahlen interferiren ferner nur dann, wenn sie von polarisirtem Lichte herrühren: daher die Nothwendigkeit des Polariseurs. Um schliesslich das Resultat der Interferenz zu erhalten, hat man entweder die Wegdifferenz in Rechnung zu ziehen, oder die um eine halbe Wellenlänge vermehrte Wegdifferenz, je nachdem die schliessliche Polarisationsebene mit der ursprünglichen parallel oder winkelrecht ist: daher sind bei Benutzung eines doppeltbrechenden Analyseurs die beiden Bilder complementär gefärbt.

Das Studium der Gesetze der Interferenz polarisirter Strahlen führte Fresnel auf das Princip der Transversalität der Lichtschwingungen. Er berechnete sodann das Resultat der Superposition rechtwinkelig polarisirter Strahlen mit beliebigen Gangunterschieden, erklärte die durch den Analyseur hervorgebrachten Farbenerscheinungen und den von Biot entdeckten Wechsel von Polarisation und Depolarisation, indem er zeigte, dass dieser Wechsel stets aus der Combination zweier im Hauptschnitte des Blättchens und senkrecht zu demselben polarisirter Strahlen hervorgeht, und dass kein specifischer Unterschied zwischen den Wirkungen dünner und dicker Blättchen besteht. Die Erscheinungen, welche sich zeigen, wenn polarisirtes Licht eine oder mehrere totale Reflexionen erfährt, und welche den durch die Krystallblättchen hervorgebrachten durchaus analog sind, bildeten eine Bestätigung der Theorie Fresnel's. Schliesslich erkannte Fresnel das Vorhandensein zweier, von der gewöhnlichen Polarisation verschiedener Arten der Polarisation, der circularen und der elliptischen Polarisation [1]).

227. Die gekreuzten Rhomboëder.

Um zu zeigen, dass die durch Krystallblättchen hervorgebrachten Erscheinungen nur von dem durch das Blättchen zwischen dem ordentlichen und dem ausserordentlichen Strahle hervorgebrachten Gangunterschiede herrühren, und nicht, wie Biot glaubte, von einer besonderen, dem Blättchen innewohnenden Kraft, erfand Fresnel das Experiment der gekreuzten Rhomboëder. Polarisirtes Licht tritt successive durch zwei identische Kalkspathrhomboëder, deren Hauptschnitte unter einander einen Winkel von 90^0 und mit der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes einen Winkel von 45^0 bilden. Das austretende Licht geht durch einen Analyseur und eine Loupe. Man nimmt sehr lebhafte Interferenzstreifen wahr senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Bilder der Lichtquelle. Diese Streifen können nur durch Interferenz der Strahlen

[1]) *OEuvres complètes*, t. I, p. 147, 609. *Ann. de chim. et de phys.* (2), XVII, 102, 167, 312.

entstehen, welche aus dem zweiten Rhomboëder rechtwinkelig polarisirt austreten und durch den Analyseur auf dieselbe Polarisationsrichtung gebracht werden. Die Wegdifferenzen sind sehr klein, da die beiden Rhomboëder gleich dick sind und jeder Strahl sich in einem derselben als ordentlicher, im anderen als ausserordentlicher Strahl fortpflanzt [1]).

Dieses Experiment beweist, dass die dicken Platten analoge Erscheinungen bringen können, wie die dünnen, wenn die Wegdifferenz hinreichend klein ist, und dass das Verschwinden der Erscheinungen der chromatischen Polarisation bei dicken Platten seinen Grund nicht in einem specifischen Unterschiede der Wirkungsweise dünner und dicker Platten hat, sondern im Mangel der Homogenität des Lichtes, nicht anders, als dies bei den gewöhnlichen Interferenzstreifen in einer gewissen Entfernung von der Centralfranse oder bei den Newton'schen Ringen von höherer Ordnungszahl der Fall ist.

228. Experiment von Fizeau und Foucault.

Fizeau und Foucault wendeten dieselbe Methode der spectralen Zerlegung, mittelst welcher es ihnen gelang, Interferenzen bei grossen Gangunterschieden nachzuweisen, auch auf die Erscheinungen der chromatischen Polarisation an; sie zeigten, dass polarisirtes Licht, nachdem es durch eine dicke Krystallplatte gegangen ist, keineswegs als natürliches oder theilweise polarisirtes Licht austritt, sondern dass jeder homogene Strahl für sich nach denselben Gesetzen modificirt wird, welche auch für die dünnen Platten gelten [2]).

Ein Bündel paralleler und vollständig polarisirter Sonnenstrahlen trat erst durch eine Krystallplatte, zu dick, um Farben zu zeigen, dann durch ein Nicol'sches Prisma. Das durch das Nicol'sche Prisma tretende ausserordentliche Strahlenbündel fiel auf eine Spalte, hinter welcher ein Prisma und eine Linse derart angebracht waren, dass ein reines Spectrum wahrgenommen wurde. Ist der Hauptschnitt des Nicol's mit der ursprünglichen Polarisationsebene parallel, so zeigt das Spectrum eine grosse Zahl schwarzer Streifen, entsprechend den im ausserordentlichen Bilde fehlenden, also in der ursprünglichen Ebene polarisirten Farben.

Bringt man den Hauptschnitt des Nicol's in das Azimuth $2i$, also in eine bezüglich des Hauptschnittes des Krystallblättchens mit der ursprünglichen Polarisationsebene symmetrische Lage, so gewahrt man ebenfalls ein System schwarzer Streifen, welche aber nicht mehr dieselbe Lage im Spectrum haben. Die nunmehr den schwarzen Streifen ent-

[1]) *Mémoire sur l'influence réciproque des rayons polarisés, OEuvres complètes,* I. 426. [2]) *Ann. de chim. et de phys.* (3) XXVI, 138; XXX, 146.

sprechenden Farben sind nothwendig im Azimuthe $2i$ polarisirt. Bei jeder anderen Lage des Analyseurs entstehen keine vollständig dunklen Streifen, sondern nur Minima der Intensität, woraus man schliessen muss, dass die Azimuthe 0 und $2i$ die einzigen sind, für welche vollständige Polarisation eintritt. Ist endlich $i = 45^0$, so behalten gewisse Farben eine constante Intensität, während der Analyseur gedreht wird, so dass eine Reihe von Farben sich als vollständig depolarisirt erweist. Diese Farben liegen zwischen den unter den Azimuthen 0 und $2i$ polarisirten.

Aus diesen Experimenten erhellt die wahre Natur des aus der Krystallplatte tretenden Strahlenbündels. Dieses zeigt, mittelst eines gewöhnlichen Analyseurs untersucht, die Eigenschaften des gewöhnlichen oder des theilweise polarisirten Lichtes. In Wirklichkeit jedoch hat jede einfache Farbe des Bündels ihren eigenen Polarisationszustand, und dieser variirt in Folge der grossen Wegdifferenz ungemein rasch mit der Farbe.

XXIII.

Circulare und elliptische Polarisation.

229. Zusammensetzung rechtwinkelig polarisirter Strahlen.

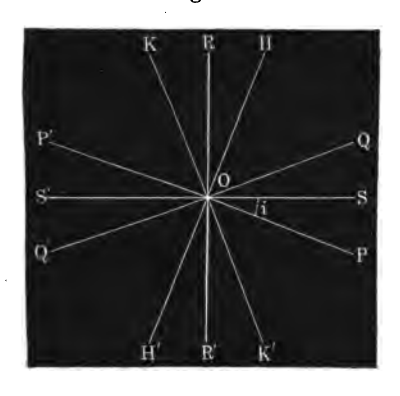
Es falle ein polarisirter Strahl senkrecht auf eine Krystallplatte; ist diese einachsig, so zerlegt sich der Strahl in zwei Strahlen, von welchen der eine ordentlich gebrochen wird und im Hauptschnitte polarisirt ist, der andere ausserordentlich und merklich senkrecht zum Hauptschnitte polarisirt; ist die Platte zweiachsig, so giebt es keinen ordentlichen Strahl; wir wollen jedoch der Einfachheit wegen immer noch jenen Strahl den ordentlichen nennen, welcher sich dem Cartesius'schen Gesetze mehr nähert, und seine Polarisationsebene möge der Hauptschnitt heissen. Da in den zweiachsigen Krystallen die Polarisationsebenen der beiden gebrochenen Strahlen stets nahezu auf einander senkrecht stehen, können wir auch hier noch sagen, dass der eintretende polarisirte Strahl sich in zwei, im Hauptschnitte und senkrecht zu demselben polarisirte Strahlen spaltet.

In allen Fällen also spaltet sich der polarisirte Strahl beim Durchgange durch die Krystallplatte in zwei rechtwinkelig polarisirte Strahlen. Ist die Platte dünn, so trennen sich die beiden Strahlen nicht merklich, da sie sich jedoch im Krystalle mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen, zeigen sie bei ihrem Austritte einen der Dicke der Platte proportionalen Gangunterschied. Es folgt, dass sich aus der Uebereinanderlegung dieser beiden rechtwinkelig polarisirten Strahlen im Allgemeinen nicht mehr geradlinige Schwingungen ergeben, sondern Schwingungen, deren Bahnen verschiedene Gestalt haben können. Mit

der Ermittelung der Gestalt dieser Bahnen wollen wir uns nun beschäftigen.

Nehmen wir zur Ebene der Figur (Fig. 14) eine Ebene senkrecht zum Strahle; seien PP' und SS' die ursprüngliche Polarisationsebene und der Hauptschnitt der Krystallplatte, HH' und RR' zwei Gerade senkrecht auf PP' und SS', und bezeichnen wir durch i den Winkel SOP. Derselbe möge links von der Polarisationsebene positiv gerechnet werden. Die Schwingungen des einfallenden Strahles gehen parallel mit HH' vor sich und man kann dieselben durch die Gleichung ausdrücken:

Fig. 14.



$$\sigma = a \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

wo σ die Verrückung eines Moleculs bedeutet.

Sind ξ und η die Composanten dieser Verrückung parallel und senkrecht zum Hauptschnitte der Platte, also die Projectionen von σ auf SS' und RR', so haben wir

$$\xi = a \sin i \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

$$\eta = a \cos i \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Die Schwingungen parallel zu SS' entsprechen dem ausserordentlichen Strahle, die Schwingungen parallel zu RR' dem ordentlichen. Da die Incidenz als normal vorausgesetzt ist, kann man annehmen, dass die Amplituden der beiden Strahlen durch die mit dem Ein- und Austritte verbundenen beiden Reflexionen im selben Verhältnisse vermindert werden, und kann folglich diese beiden Amplituden nach dem Austritte durch $a \sin i$ und $a \cos i$ ausdrücken. Seien O und E die Dicken zweier Luftschichten, welche von dem ordentlichen und dem ausserordentlichen Strahle in derselben Zeit durchsetzt werden, wie die Krystallplatte; dann hat man für den Austritt des ausserordentlichen Strahles

$$\xi = a \sin i \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{E}{\lambda}\right),$$

wenn λ die Wellenlänge in Luft ist, und für den des ordentlichen Strahles

$$\eta = a \cos i \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O}{\lambda}\right).$$

Diese beiden Gleichungen können auch geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= a \sin i \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O}{\lambda} + \frac{O-E}{\lambda}\right)\\ \eta &= a \cos i \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O}{\lambda}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

230. Geradlinige Polarisation des austretenden Strahles.

Damit der austretende Strahl geradlinig polarisirt sei, muss $\frac{\eta}{\xi}$ unabhängig von der Zeit sein.

Diese Bedingung ist für jede Dicke der Platte erfüllt, wenn $i = 0$, und wenn $i = 90^0$. Ist also die ursprüngliche Polarisationsebene parallel oder senkrecht zum Hauptschnitte des Krystalls, so ist der austretende Strahl stets in der ursprünglichen Ebene polarisirt.

Ist i weder Null noch 90^0, so muss, damit der austretende Strahl geradlinig polarisirt sei,

$$\frac{\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O}{\lambda} + \frac{O-E}{\lambda}\right)}{\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O}{\lambda}\right)} = K,$$

wo K eine Constante bedeutet.

Das giebt

$$\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O}{\lambda}\right) \cos 2\pi \frac{O-E}{\lambda} + \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O}{\lambda}\right) \sin 2\pi \frac{O-E}{\lambda}$$
$$= K \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O}{\lambda}\right).$$

Diese Gleichung erscheint für alle Werthe von t nur dann befriedigt, wenn

$$\sin 2\pi \frac{O-E}{\lambda} = 0$$

oder

$$O - E = n \frac{\lambda}{2},$$

wo n eine beliebige ganze Zahl ist.

Ist n gerade, so wird

$$\frac{\eta}{\xi} = \cot i;$$

in diesem Falle gehen die Schwingungen längs HH' vor sich, der austretende Strahl ist in der ursprünglichen Ebene polarisirt.

Ist n ungerade, so wird

$$\frac{\eta}{\xi} = - \cot i;$$

die Schwingungen gehen längs KK' vor sich, welche Linie mit HH' bezüglich RR' symmetrisch liegt, der Strahl ist unter dem Azimuthe $2i$ polarisirt.

Man sieht also, dass der austretende Strahl immer dann geradlinig polarisirt ist, wenn der Gangunterschied zwischen dem ordentlichen und ausserordentlichen Strahle gleich $n\frac{\lambda}{2}$ ist. Je nachdem n gerade oder ungerade ist, erscheint der austretende Strahl parallel zur ursprünglichen Ebene oder unter dem Azimuthe $2i$ polarisirt.

231. Circulare Polarisation des austretenden Strahles.

Wir setzen nun voraus, dass der Winkel i der ursprünglichen Polarisationsebene und des Hauptschnittes der Krystallplatte 45^0 betrage und dass die Dicke der Platte einem Gangunterschiede des ordentlichen und ausserordentlichen Strahles gleich $(2n + 1)\frac{\lambda}{4}$ entspreche, also dass

$$O - E = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}.$$

Es ergiebt sich unter dieser Voraussetzung

$$\xi = \pm \frac{a}{\sqrt{2}} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O}{\lambda}\right)$$

$$\eta = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O}{\lambda}\right),$$

und hieraus

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2.$$

Die Trajectorie des Molecüls ist ein Kreis und wird von dem Molecüle, wie aus den für ξ und η gefundenen Ausdrücken hervorgeht, continuirlich und stets im selben Sinne beschrieben. Solche Strahlen heissen circular polarisirte Strahlen, und die Modification, welche sie erfahren haben, Circularpolarisation. Diese ist identisch mit Biot's totaler Depolarisation.

Es handelt sich noch um den Sinn, in welchem die Bewegung vor sich geht. Zu diesem Zwecke wollen wir festsetzen, dass künftig stets der Winkel i vom Hauptschnitte der Krystallplatte aus und von der Seite des Beobachters von rechts nach links gerechnet werde. Bei der Entstehung der Circularpolarisation kann der Winkel i gleich $+ 45^0$

oder gleich — 45° sein, wie dies Fig. 15 und Fig. 16 darstellen. Nehmen wir zunächst an, i sei gleich + 45°, und die Krystallplatte sei

Fig. 15.

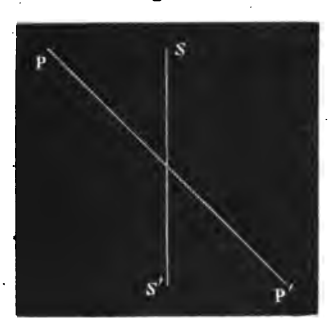


Fig. 16.

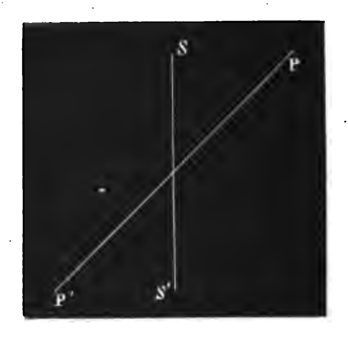
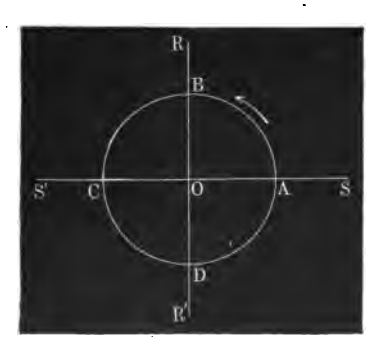


Fig. 17.



repulsiv oder negativ. $O-E$ ist dann positiv, und es muss in dem Ausdrucke für ξ das Zeichen + oder — genommen werden, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Ist n gerade, so bewegt sich das Molecül von rechts nach links (Fig. 17); wenn ungerade, so im entgegengesetzten Sinne. Ist die Krystallplatte attractiv oder positiv, so ist $O-E$ negativ, man hat in dem Ausdrucke für ξ das Zeichen + oder — zu nehmen, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Alle diese Resultate kehren sich um, wenn der Winkel i gleich — 45° wird.

Das folgende Tableau stellt die Bedingungen dar, unter welchen die eine oder die andere Art der Circularpolarisation entsteht.

	$i = +45^0$	Circularpolarisation
Repulsive Platte	$O-E = (4m+1)\frac{\lambda}{4}$	von rechts nach links
	$O-E = (4m-1)\frac{\lambda}{4}$	von links nach rechts
Attractive Platte	$O-E = (4m+1)\frac{\lambda}{4}$	von links nach rechts
	$O-E = (4m-1)\frac{\lambda}{4}$	von rechts nach links

$i = -45^0$		Circularpolarisation
Repulsive Platte	$O - E = (4m+1)\frac{\lambda}{4}$	von links nach rechts
	$O - E = (4m-1)\frac{\lambda}{4}$	von rechts nach links
Attractive Platte	$O - E = (4m+1)\frac{\lambda}{4}$	von rechts nach links
	$O - E = (4m-1)\frac{\lambda}{4}$	von links nach rechts

Eine Krystallplatte, welche zwischen dem ordentlichen und dem ausserordentlichen Strahle einen Gangunterschied gleich $\frac{\lambda}{4}$ hervorbringt, heisst ein $\frac{\lambda}{4}$-Plättchen.

232. Eigenschaften des circularpolarisirten Lichtes.

Dem circularpolarisirten Lichte kommen zwei charakteristische Eigenschaften zu:

1. Tritt das circularpolarisirte Licht durch einen doppeltbrechenden Analyseur, so giebt es für jede Stellung des Analyseurs zwei gleich helle Bilder.

2. Tritt das circularpolarisirte Licht durch ein $\frac{\lambda}{4}$-Plättchen, so verwandelt es sich in geradlinig polarisirtes Licht.

Die erste dieser beiden Eigenschaften hat das circularpolarisirte Licht mit dem natürlichen Lichte gemein; durch die zweite unterscheidet es sich von demselben. Letzteres giebt, soweit sich die beiden austretenden Strahlenbündel decken, wieder natürliches Licht.

Um die Eigenschaften des circularpolarisirten Lichtes theoretisch herzuleiten, können wir für das circularpolarisirte Licht statt der Gleichungen (1) schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \pm\, a \cos 2\pi \frac{t}{T} \\ \eta &= \, a \sin 2\pi \frac{t}{T} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

wo sich das Doppelzeichen $\pm$ auf die beiden Arten der Circularpolarisation bezieht.

Diese beiden Gleichungen besagen, dass ein circularpolarisirter Strahl als Uebereinanderlagerung zweier gleich intensiver geradlinig

polarisirter Strahlen angesehen werden kann, deren Polarisationsebenen einen rechten Winkel einschliessen und welche einen Gangunterschied gleich $\frac{\lambda}{4}$ haben.

Tritt ein circularpolarisirter Strahl durch einen doppeltbrechenden Analyseur, so kann man unbeschadet der Allgemeinheit die Richtung des Hauptschnittes des Analyseurs als mit der ξ-Richtung zusammenfallend annehmen. Die Schwingungen des ordentlichen Strahles sind also gegeben durch η, jene des ausserordentlichen durch ξ.

Betrachten wir nun den Durchgang durch ein $\frac{\lambda}{4}$-Plättchen. Im Momente des Eintrittes ist die Bewegung durch die Gleichung (2) gegeben. Beim Austritte hat man, wenn der Hauptschnitt des Plättchens parallel zur ξ-Richtung angenommen wird,

$$\xi = \pm\, a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O}{\lambda} + \frac{O - E}{\lambda}\right)$$

$$\eta = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O}{\lambda}\right);$$

da ferner

$$O - E = \frac{\lambda}{4},$$

so hat man weiter

$$\xi = \mp\, a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O}{\lambda}\right)$$

und schliesslich

$$\frac{\eta}{\xi} = \mp 1.$$

Der austretende Strahl ist daher geradlinig und unter einem Winkel von 45^0 mit dem Hauptschnitte des $\frac{\lambda}{4}$-Plättchens polarisirt.

Man sieht leicht, wie ein $\frac{\lambda}{4}$-Plättchen dazu dienen kann, das Vorhandensein der Circularpolarisation nachzuweisen und die Art derselben zu bestimmen.

233. Elliptische Polarisation des austretenden Strahles.

Sei immer noch

$$O - E = (2n + 1)\frac{\lambda}{4},$$

habe hingegen i eine beliebige Grösse. Die aus der Krystallplatte tretende Bewegung hat dann parallel und senkrecht zum Hauptschnitte der Platte die Composanten

$$\xi = \pm\, a \sin i \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O}{\lambda}\right)$$

$$\eta = a \cos i \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O}{\lambda}\right),$$

woraus folgt

$$\frac{\xi^2}{\sin^2 i} + \frac{\eta^2}{\cos^2 i} = a^2.$$

Die Schwingungen gehen sonach in Ellipsen vor sich, das Licht ist elliptisch polarisirt, oder nach Biot partiell depolarisirt. Unter den gemachten Voraussetzungen sind die Achsen der Ellipse parallel und senkrecht zum Hauptschnitte der Krystallplatte und der Länge nach proportional $\sin i$ und $\cos i$.

Wie es zwei Arten der Circularpolarisation giebt, so giebt es auch zwei Arten der elliptischen Polarisation, und man gelangt leicht zu dem folgenden Tableau:

	i zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$	Elliptische Polarisation
Repulsive Platte	$O - E = (4m + 1)\frac{\lambda}{4}$	von rechts nach links
	$O - E = (4m - 1)\frac{\lambda}{4}$	von links nach rechts
Attractive Platte	$O - E = (4m + 1)\frac{\lambda}{4}$	von links nach rechts
	$O - E = (4m - 1)\frac{\lambda}{4}$	von rechts nach links

	i zwischen π und $\frac{\pi}{2}$	Elliptische Polarisation
Repulsive Platte	$O - E = (4m + 1)\frac{\lambda}{4}$	von links nach rechts
	$O - E = (4m - 1)\frac{\lambda}{4}$	von rechts nach links
Attractive Platte	$O - E = (4m + 1)\frac{\lambda}{4}$	von rechts nach links
	$O - E = (4m - 1)\frac{\lambda}{4}$	von links nach rechts

Gehen wir nun zum allgemeinen Falle über, wo die Dicke der Platte beliebig ist. Beim Austritte aus der Platte sind die Bewegungscomposanten parallel und senkrecht zum Hauptschnitte der Platte nach (1)

$$\xi = a \sin i \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O}{\lambda}\right) \cos 2\pi \frac{O-E}{\lambda}$$

$$+ a \sin i \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O}{\lambda}\right) \sin 2\pi \frac{O-E}{\lambda},$$

$$\eta = a \cos i \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O}{\lambda}\right).$$

Wenn man aus diesen Gleichungen t eliminirt, so erhält man

$$\frac{\eta^2}{a^2 \cos^2 i} + \frac{\left(\xi \cos i - \eta \sin i \cos 2\pi \frac{O-E}{\lambda}\right)^2}{a^2 \cos^2 i \sin^2 i \sin^2 2\pi \frac{O-E}{\lambda}} = 1$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} \xi^2 \cos^2 i + \eta^2 \sin^2 i - 2\xi\eta \sin i \cos i \cos 2\pi \frac{O-E}{\lambda} \\ \quad = a^2 \sin^2 i \cos^2 i \sin^2 2\pi \frac{O-E}{\lambda} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (3)$$

die Gleichung einer Ellipse.

Die allgemeinste Gestalt der Bahn eines schwingenden Aethertheilchens eines Strahles, welcher aus der Superposition zweier rechtwinkelig polarisirter Strahlen hervorgeht, ist also die einer Ellipse, deren Achsen beliebig orientirt sind. Aus der Gleichung (3) dieser Ellipse geht ferner hervor, dass ihre Achsen nur dann parallel und senkrecht zum Hauptschnitte der Platte sind, wenn $O - E = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}$.

Mittelst der Gleichung (1) kann man den Sinn bestimmen, in welchem die Ellipse vom Aethertheilchen durchlaufen wird, und gelangt zu dem folgenden Tableau:

	i zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$				Elliptische Polarisation
Repulsive Platte	$O - E$ zwischen	$2m\frac{\lambda}{2}$	und	$(2m+1)\frac{\lambda}{2}$	von rechts nach links
	$O - E$ „	$(2m+1)\frac{\lambda}{2}$	„	$(2m+2)\frac{\lambda}{2}$	von links nach rechts
Attractive Platte	$O - E$ „	$2m\frac{\lambda}{2}$	„	$(2m+1)\frac{\lambda}{2}$	von links nach rechts
	$O - E$ „	$(2m+1)\frac{\lambda}{2}$	„	$(2m+2)\frac{\lambda}{2}$	von rechts nach links

	i zwischen π und $\frac{\pi}{2}$	Elliptische Polarisation
Repulsive Platte	$O-E$ zwischen $2m\frac{\lambda}{2}$ und $(2m+1)\frac{\lambda}{2}$	von links nach rechts
	$O-E$ „ $(2m+1)\frac{\lambda}{2}$ „ $(2m+2)\frac{\lambda}{2}$	von rechts nach links
Attractive Platte	$O-E$ „ $2m\frac{\lambda}{2}$ „ $(2m+1)\frac{\lambda}{2}$	von rechts nach links
	$O-E$ „ $(2m+1)\frac{\lambda}{2}$ „ $(2m+2)\frac{\lambda}{2}$	von links nach rechts

234. Eigenschaften des elliptisch polarisirten Lichtes.

Die Eigenschaften des elliptisch polarisirten Lichtes sind:

1. Beim Durchgange durch einen doppeltbrechenden Analyseur giebt das elliptisch polarisirte Licht zwei im Allgemeinen ungleich helle Bilder, von welchen keines bei irgend einer Lage des Analyseurs vollständig verschwindet.

2. Das elliptisch polarisirte Licht verwandelt sich beim Durchgange durch eine $\frac{\lambda}{4}$-Platte, deren Hauptschnitt einer der Achsen der Vibrationsellipse parallel ist, in geradlinig polarisirtes Licht.

Die erste dieser beiden Eigenschaften hat das elliptisch polarisirte Licht mit dem partiell polarisirten gemein, durch die zweite unterscheidet es sich von demselben. Das partiell polarisirte Licht giebt nach seinem Durchgange durch eine Krystallplatte von irgend einer Dicke immer wieder partiell polarisirtes Licht.

Um die Eigenschaften eines elliptisch polarisirten Strahles theoretisch zu entwickeln, bemerken wir, dass die den Achsen der Ellipse parallelen Bewegungscomposanten stets ausgedrückt werden können durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \pm\, a \cos 2\pi \frac{t}{T} \\ \eta &= b \sin 2\pi \frac{t}{T} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

wo a und b die Halbachsen der Vibrationsellipse sind und das Zeichen $+$ oder $-$ zu nehmen ist, je nachdem die Bewegung von rechts nach links oder umgekehrt erfolgt, vorausgesetzt, dass in der Figur die positive ξ-Achse rechts und die positive η-Achse oben liegt.

Ein elliptisch polarisirter Strahl kann also stets als eine Superposition zweier geradlinig und rechtwinkelig polarisirter Strahlen von

ungleicher Intensität angesehen werden, zwischen welchen ein Gangunterschied gleich $\frac{\lambda}{4}$ besteht.

Trete ein elliptisch polarisirter Strahl durch einen doppeltbrechenden Analyseur, dessen Hauptschnitt einen Winkel s mit der ξ-Achse bilde. Man hat dann auf dem ordentlichen Strahle eine Verrückung gleich

$$\xi \sin s - \eta \cos s$$

oder

$$\pm a \sin s \cos 2\pi \frac{t}{T} - b \cos s \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

und auf dem ausserordentlichen eine solche gleich

$$\xi \cos s + \eta \sin s$$

oder

$$\pm a \cos s \cos 2\pi \frac{t}{T} + b \sin s \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Nennt man ω^2 die Intensität des ordentlichen Bildes, ε^2 jene des ausserordentlichen, so erhält man

$$\omega^2 = a^2 \sin^2 s + b^2 \cos^2 s$$

$$\varepsilon^2 = a^2 \cos^2 s + b^2 \sin^2 s.$$

Ist $a < b$, so kann man diese Ausdrücke auf die Form bringen:

$$\omega^2 = a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 s$$

$$\varepsilon^2 = a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2 s.$$

Man sieht, dass die Intensität jedes der Bilder zwischen a^2 und b^2 variirt, und für keinen Werth von s der Null gleich wird.

Die Intensität des ordentlichen Bildes ist ein Maximum für $s = 0$, d. i. wenn der Hauptschnitt des Analyseurs mit der kleinen Achse der Vibrationsellipse parallel ist, die des ausserordentlichen für $s = 90^0$, d. i. wenn der Hauptschnitt des Analyseurs mit der grossen Achse der Vibrationsellipse parallel ist. Endlich sind die beiden Bilder gleich hell, wenn $s = 45^0$. Die Variationen der Intensität der beiden Bilder eines elliptisch polarisirten Strahles in einem doppeltbrechenden Analyseur können also dazu dienen, die Lage der Achsen der Vibrationsellipse zu bestimmen.

Möge nun ein elliptisch polarisirter Strahl durch eine $\frac{\lambda}{4}$-Platte treten, deren Hauptschnitt einer der Achsen der Vibrationsellipse parallel sei. Nehmen wir beispielsweise an, die $\frac{\lambda}{4}$-Platte sei repulsiv, ihr Hauptschnitt parallel der ξ-Richtung oder der kleineren Achse der Vibrationsellipse, und der Strahl von rechts nach links polarisirt. Für den Eintritt des Strahles in die Platte hat man dann

$$\xi = a \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

$$\eta = b \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Ist O die Dicke einer Luftschicht, welche in derselben Zeit durchsetzt wird, wie die $\frac{\lambda}{4}$-Platte vom ordentlichen Strahle, so hat man für den Austritt des Lichtes aus der $\frac{\lambda}{4}$-Platte

$$\xi = -\, a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O}{\lambda}\right)$$

$$\eta = \quad b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O}{\lambda}\right)$$

und

$$\frac{\eta}{\xi} = -\frac{b}{a}.$$

Das austretende Licht ist also geradlinig polarisirt, und seine Polarisationsebene bildet mit dem Hauptschnitte der $\frac{\lambda}{4}$-Platte einen Winkel, dessen Tangente $\frac{a}{b}$ ist. Ist der Hauptschnitt der Platte der grossen Achse der Ellipse parallel, so ist das austretende Licht ebenfalls geradlinig polarisirt, und es bildet die Polarisationsebene mit dem Hauptschnitte der $\frac{\lambda}{4}$-Platte einen Winkel, dessen Tangente $\frac{b}{a}$ ist.

Der absolute Werth der Tangente des Winkels der Polarisationsebene des austretenden Lichtes und des Hauptschnittes der $\frac{\lambda}{4}$-Platte ist immer $\frac{a}{b}$, wenn der Hauptschnitt der Platte der kleinen Achse der Ellipse parallel ist, $\frac{b}{a}$, wenn der grossen. Allein das Vorzeichen der Tangente dieses Winkels hängt von dem Sinne ab, in welchem das Licht elliptisch polarisirt ist, und von der Natur der Platte, wie das folgende Tableau zeigt, in welchem die Winkel vom Hauptschnitte der Platte aus von rechts nach links für den das Licht empfangenden Beobachter rechnen.

Repulsive Platte	Elliptische Polarisation	Tangente des Winkels der Polarisationsebene mit dem Hauptschnitte der $\frac{\lambda}{4}$-Platte
Hauptschnitt der Platte parallel der kleinen Achse der Ellipse	von rechts nach links	$+\frac{a}{b}$
	von links nach rechts	$-\frac{a}{b}$
Hauptschnitt parallel der grossen Achse der Ellipse	von rechts nach links	$+\frac{b}{a}$
	von links nach rechts	$-\frac{b}{a}$

Attractive Platte	Elliptische Polarisation	Tangente des Winkels der Polarisationsebene mit dem Hauptschnitte der $\frac{\lambda}{4}$-Platte
Hauptschnitt der Platte parallel der kleinen Achse der Ellipse	von rechts nach links	$-\frac{a}{b}$
	von links nach rechts	$+\frac{a}{b}$
Hauptschnitt der Platte parallel der grossen Achse der Ellipse	von rechts nach links	$-\frac{b}{a}$
	von links nach rechts	$+\frac{b}{a}$

Mittelst einer $\frac{\lambda}{4}$-Platte kann man also das Verhältniss der Achsen der Vibrationsellipse eines elliptisch polarisirten Strahles ermitteln und erkennen, in welchem Sinne die Ellipse durchlaufen wird.

235. Zusatz zur Beschreibung des Experimentes von Fizeau und Foucault.

Wir können nun die Beschreibung des Experimentes vervollständigen, durch welches Fizeau und Foucault zeigten, dass dicke und dünne Krystallplatten wesentlich in derselben Weise wirken.

Wir geben dem Hauptschnitte des als Analyseur dienenden Nicols die Lage parallel zur ursprünglichen Polarisationsebene und dem Hauptschnitte der Krystallplatte jene Lage, in welcher er mit der ursprünglichen Polarisationsebene einen Winkel von 45° einschliesst. Die schwarzen Streifen, welche im Spectrum des ausserordentlichen Bil-

des auftreten, entsprechen nun Strahlen, welche in der ursprünglichen Ebene polarisirt sind, und für welche der Wegunterschied $O - E$ einer geraden Zahl halber Wellen gleichkommt; die Maxima der Helligkeit zwischen den dunklen Streifen entsprechen senkrecht zur ursprünglichen Ebene polarisirten Strahlen, für welche die Wegdifferenz $O - E$ eine ungerade Zahl halber Wellen beträgt; endlich entsprechen die Wellen in der Mitte zwischen einem Maximum und einem benachbarten Minimum einer Wegdifferenz $O - E$ gleich einer ungeraden Zahl von Viertelundulationen, d. i. circularpolarisirten Strahlen. Jedes Minimum liegt zwischen zwei in entgegengesetztem Sinne circularpolarisirten Strahlen.

Um dieses Resultat der Theorie experimentell zu prüfen, genügt es, die aus der Krystallplatte tretenden Strahlen noch durch eine $\frac{\lambda}{4}$-Platte gehen zu lassen, deren Hauptschnitt mit jenem des Analyseurs einen Winkel von 45° bildet. Die Strahlen, welche geradlinig polarisirt waren, verwandeln sich hierdurch in circularpolarisirte Strahlen und umgekehrt, so dass im Spectrum die dunklen Linien um den vierten Theil des Abstandes zweier dunkler Linien verschoben erscheinen, und zwar in einem Sinne, welcher stets leicht vorauszusehen ist.

Fizeau und Foucault haben gleicherweise constatirt, dass sich zwischen den geradlinig und circularpolarisirten Farben solche von elliptischer Polarisation befinden.

XXIV.

Natürliches und partiell polarisirtes Licht.

236. Natürliches und partiell polarisirtes Licht.

Die allgemeinste Gestalt der Curve, welche das Aethermolecül beschreiben kann, ist die Ellipse (51); gleichwohl zeigt weder das elliptisch polarisirte, noch das kreisförmig oder geradlinig polarisirte Licht die Eigenschaften des natürlichen oder partiell polarisirten Lichtes.

Um das natürliche oder das partiell polarisirte Licht zu erklären, hat Fresnel die Annahme gemacht, dass in jedem Punkte eines natürlichen Strahles Form und Orientation der Vibrationsellipse, sowie die Phase sehr rasch auf einander folgende Veränderungen erfahren, Intensität und Schwingungsdauer jedoch constant bleiben. In der That:

Geht ein so beschaffener Strahl durch einen doppeltbrechenden Analyseur, so muss die Intensität jedes der beiden Bilder von Moment zu Moment wechseln, jedoch wegen der Raschheit der Aufeinanderfolge der Veränderungen als eine gleichmässige erscheinen, und zwar kann die Intensität je nach der Art der auf einander folgenden Schwingungsarten von der Stellung des Analyseurs abhängen oder nicht, niemals aber Null werden. Man sieht weiter, wie ein solcher Strahl seine Eigenschaften beibehält, wenn er durch eine Krystallplatte tritt, welche hinreichend dünn ist, so dass die beiden Strahlenbündel sich nach dem Austritte decken. Diese beiden Eigenschaften sind nun gerade dem natürlichen und partiell polarisirten Lichte eigenthümlich.

Der Strahl wird ein natürlicher oder ein partiell polarisirter sein, je nachdem die verschiedenen rasch auf einander folgenden Polarisationen sich vollständig oder nur unvollständig compensiren. Man könnte aber mit demselben Erfolge das natürliche Licht auch in anderer Weise erklären:

Schon früher, als es sich um die Erklärung der Nichtinterferenz von Lichtstrahlen handelte, welche von verschiedenen Lichtquellen herrühren (28), hatten wir Gelegenheit, von den rasch auf einander fol-

genden Veränderungen des Schwingungszustandes der Lichtquelle zu sprechen. Wir können nun die Eigenschaften des natürlichen und partiell polarisirten Lichtes genau so wie die Nichtinterferenz der von verschiedenen Lichtquellen stammenden Strahlen doppelt erklären, einerseits indem wir annehmen, dass die Schwingungsweise jedes Punktes der Lichtquelle sehr rasch auf einander folgende Veränderungen erfährt, andererseits aber auch, indem wir annehmen, dass sehr nahe neben einander liegende Stellen der Lichtquelle gleichzeitig verschieden schwingen. Benachbarte Molecüle eines glühenden Gases werden in einem gegebenen Momente Schwingungszustände verschiedener Polarisation aussenden, und schon eine äusserst kleine Ausdehnung der Flamme wird zu einer vollständigen gegenseitigen Compensation der verschiedenen Polarisationen genügen. Betrachtet man also eine Flamme durch einen doppeltbrechenden Analyseur, so wird in einem gegebenen Momente die Intensität auf jedem der beiden Bilder in der That von Punkt zu Punkt variabel sein, allein wegen der äusserst geringen Ausdehnung dieser Maxima und Minima der Intensität wird eine gleichmässige Helligkeit wahrgenommen werden. Die Dauer der Lichtquelle könnte also beliebig abnehmen, ohne dass sich Polarisation zeigen würde. Die Versuche von Fizeau und Foucault über die Zeitdauer, innerhalb deren man die Schwingungsweise einer Lichtquelle als constant ansehen kann, lassen es wahrscheinlich erscheinen, dass man zur Erklärung der Abwesenheit der Polarisation des von äusserst kurz dauernden elektrischen Funken kommenden Lichtes auf die besprochenen räumlichen Variationen der Schwingungsweise zurückkommen muss.

Man kann also die Eigenschaften des natürlichen und des partiell polarisirten Lichtes auf zwei Ursachen zurückführen, auf eine Succession und eine Coexistenz verschieden polarisirter Schwingungen. Wir werden uns im folgenden darauf beschränken, die Wirkungen einer raschen Aufeinanderfolge verschieden polarisirter Strahlen zu betrachten; die Wirkung einer Coexistenz solcher Strahlen ist im Wesentlichen dieselbe.

237. Natürliches Licht.

Das natürliche Licht ist durch zwei Eigenschaften charakterisirt:

1. Fällt ein natürlicher Lichtstrahl senkrecht auf einen doppeltbrechenden Krystall, so theilt er sich in zwei Strahlen, deren Intensitäten von der Orientation des Krystalls unabhängig sind [1]).

[1]) Man pflegt diese Intensitäten als genau gleich anzunehmen; dies ist jedoch theoretisch nicht der Fall, und die Ungleichheit der Intensitäten kann experimentell nachgewiesen werden. Wilde, *Ann. de chim. et de phys.* [3] LXIX, 238.

2. Ein natürlicher Strahl behält diese Eigenschaft nach seinem Durchgange durch eine planparallele Krystallplatte, welche hinreichend dünn ist, so dass die beiden Strahlenbündel nach ihrem Austritte sich decken und hinreichend schwach doppelbrechend, so dass die beiden Bilder als gleich hell angesehen werden können.

Indem wir nun annehmen, dass das natürliche Licht durch eine Folge verschiedenartiger Schwingungen entsteht, stellen wir die Frage, welchen Bedingungen diese Schwingungen genügen müssen, damit jene beiden experimentell festgestellten Eigenschaften des natürlichen Lichtes begreiflich werden.

Wir legen zu diesem Zwecke senkrecht zum Lichtstrahle eine Ebene und in diese ein rechtwinkeliges Coordinatensystem. Für die sehr kurze Zeit eines Intervalles, während dessen die Lichtbewegung unverändert bleibt, kann diese Bewegung dargestellt werden durch

$$x = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \alpha\right)$$

$$y = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \beta\right)$$

oder, wenn

$$2\pi \left(\frac{t}{T} + \alpha\right) = \varphi, \qquad 2\pi (\beta - \alpha) = \delta$$

gesetzt wird, durch

$$x = a \sin \varphi \qquad y = b \sin (\varphi + \delta).$$

Man beeinträchtigt die Allgemeinheit der Betrachtung nicht, wenn man a und b als positiv voraussetzt, wenn man nur δ zwischen 0 und 2π rechnet. Die Werthe zwischen 0 und π entsprechen einer elliptischen Polarisation von links nach rechts, jene zwischen π und 2π einer solchen von rechts nach links.

Wir wollen nun die Bewegung auf ein anderes Coordinatensystem in derselben Ebene beziehen. Wir finden

$$x' = x \cos \omega + y \sin \omega,$$

$$y' = - x \sin \omega + y \cos \omega,$$

wenn ω den Winkel der Axen x' und x bedeutet.

Wir entwickeln in den letzten Gleichungen die Werthe von x und y und erhalten

$$x' = (a \cos \omega + b \cos \delta \sin \omega) \sin \varphi + b \sin \delta \sin \omega \cos \varphi$$

$$y' = (- a \sin \omega + b \cos \delta \cos \omega) \sin \varphi + b \sin \delta \cos \omega \cos \varphi.$$

Tritt der Strahl normal durch einen doppeltbrechenden Krystall, so dass die beiden entstehenden Strahlen parallel den Richtungen x' und y' schwingen, so sind die Intensitäten dieser beiden Strahlen proportional den Intensitäten der durch die letzterhaltenen Ausdrücke gegebenen Schwingungen, also gleich

$$m^2(a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega + 2ab\cos\delta\sin\omega\cos\omega)$$

und

$$n^2(a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega - 2ab\cos\delta\sin\omega\cos\omega),$$

wo m und n zwei nahe der Einheit gleiche Coëfficienten sind. Diese Ausdrücke erscheinen als von ω abhängig und ändern sich von einem Moment zum andern mit den Parametern a, b, δ.

Soll nun die erste der beiden Eigenschaften des natürlichen Lichtes erhalten werden, so müssen die Mittelwerthe dieser beiden Ausdrücke, genommen für eine sehr kurze Zeit, welche aber eine sehr grosse Zahl Perioden enthält, von ω unabhängig werden. Bezeichnen wir also allgemein durch $M(z)$ einen solchen Mittelwerth, so müssen die Ausdrücke

$$M(a^2)\cos^2\omega + M(b^2)\sin^2\omega + 2M(ab\cos\delta)\sin\omega\cos\omega$$

und

$$M(a^2)\sin^2\omega + M(b^2)\cos^2\omega - 2M(ab\cos\delta)\sin\omega\cos\omega$$

von ω unabhängig werden, d. h. es muss

$$M(a^2) = M(b^2), \qquad M(ab\cos\delta) = 0.$$

Das natürliche Licht besitzt aber auch die zweite Eigenschaft, diese eben in Rechnung gezogene Eigenschaft beim Durchgange durch einen Krystall nicht zu verlieren. Um die aus dieser zweiten Eigenschaft entspringenden Bedingungen zu den schon erhaltenen zu fügen, nehmen wir zunächst an, eine Achse des Coordinatensystems sei dem Hauptschnitte des Krystalls parallel. Indem der Strahl durch den Krystall tritt, verwandelt sich die Phasendifferenz δ in $\delta + \varepsilon$. Soll also das natürliche Licht seine erste Eigenschaft beim Durchgange durch den Krystall nicht verlieren, so muss

$$M[ab\cos(\delta + \varepsilon)] = 0$$

oder

$$M(ab\cos\delta) = 0, \qquad M(ab\sin\delta) = 0.$$

Wir gelangen so zu den folgenden drei Bedingungen, welchen eine rasche Aufeinanderfolge verschiedener Schwingungsarten genügen muss, wenn die Eigenschaften des natürlichen Lichtes resultiren sollen:

$$\left.\begin{array}{l} M(a^2) = M(b^2) \\ M(ab\cos\delta) = 0 \\ M(ab\sin\delta) = 0 \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

Es ist leicht zu zeigen, dass, wenn diese Bedingungen für ein Achsensystem $0xy$ erfüllt sind, sie auch für jedes andere Achsensystem $0x'y'$ erfüllt sein müssen. Stellt man die Bewegung für das neue Achsensystem dar durch

$$x' = a'\sin\varphi', \qquad y' = b'\sin(\varphi' + \delta'),$$

so hat man wie früher

$$a' \sin\varphi' = (a\cos\omega + b\cos\delta\sin\omega)\sin\varphi + b\sin\delta\sin\omega\cos\varphi$$
$$b' \sin(\varphi' + \delta') = (-a\sin\omega + b\cos\delta\cos\omega)\sin\varphi + b\sin\delta\cos\omega\cos\varphi$$

und folglich nach den Regeln der Interferenzlehre

$$a'^2 = a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega + 2ab\cos\delta\sin\omega\cos\omega$$
$$b'^2 = a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega - 2ab\cos\delta\sin\omega\cos\omega,$$
$$tg(\varphi' - \varphi) = \frac{b\sin\delta\sin\omega}{a\cos\omega + b\cos\delta\sin\omega}$$
$$tg(\varphi' + \delta' - \varphi) = \frac{b\sin\delta\cos\omega}{-a\sin\omega + b\cos\delta\cos\omega}.$$

Es folgt hieraus leicht

$$a'b'\cos\delta' = ab\cos\delta\,(\cos^2\omega - \sin^2\omega) - (a^2 - b^2)\sin\omega\cos\omega$$
$$a'b'\sin\delta' = ab\sin\delta,$$

und man sieht, dass, wenn die Bedingungen (1) erfüllt sind, für jedes ω, d. i. für jede neue Lage des Coordinatensystems ebenfalls:

$$M(a'^2) = M(b'^2)$$
$$M(a'b'\cos\delta') = 0$$
$$M(a'b'\sin\delta') = 0.$$

238. Einfachste Schwingungen, welche dem natürlichen Lichte entsprechen.

Man kann die Bedingungen, welchen die Schwingungen des natürlichen Lichtes genügen müssen, auf unendlich viele Arten erfüllen, und es ist interessant, unter diesen die einfachsten aufzusuchen.

Da Licht von constanter Polarisation die Eigenschaften des natürlichen Lichtes nicht besitzt, müssen wir wenigstens zwei alternirende Schwingungsarten annehmen. Seien also $a_1\, b_1\, \delta_1\; a_2\, b_2\, \delta_2$ die Parameter dieser beiden Schwingungsarten, τ die Zeitdauer, für welche die Mittel der Grössen a^2, b^2, $ab\cos\delta$, $ab\sin\delta$ genommen werden, m_1 und m_2 die den beiden Schwingungsarten zukommenden Theile dieser Zeitdauer.

Man hat dann

$$M(a^2) = m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2$$
$$M(b^2) = m_1 b_1^2 + m_2 b_2^2$$
$$M(ab\cos\delta) = m_1 a_1 b_1 \cos\delta_1 + m_2 a_2 b_2 \cos\delta_2$$
$$M(ab\sin\delta) = m_1 a_1 b_1 \sin\delta_1 + m_2 a_2 b_2 \sin\delta_2.$$

Sollen also die Eigenschaften des natürlichen Lichtes erhalten werden, so müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 = m_1 b_1^2 + m_2 b_2^2 \\ m_1 a_1 b_1 \cos\delta_1 + m_2 a_2 b_2 \cos\delta_2 = 0 \\ m_1 a_1 b_1 \sin\delta_1 + m_2 a_2 b_2 \sin\delta_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Man findet hieraus leicht

$$\tang\delta_1 = \tang\delta_2,$$

also

$$\delta_1 = \delta_2 \quad \text{oder} \quad \delta_1 = \pi + \delta_2.$$

Von der ersten dieser Hypothesen ausgehend erhält man

$$m_1 a_1 b_1 + m_2 a_2 b_2 = 0,$$

und da m_1, m_2, a_1, a_2, b_1, b_2 positiv sind,

$$b_1 = 0, \qquad a_2 = 0$$

oder

$$b_2 = 0, \qquad a_1 = 0,$$

d. h. die beiden Schwingungen sind geradlinig und rechtwinkelig polarisirt, und ihre Intensitäten sind ihren Zeitdauern verkehrt proportional.

Geht man von der zweiten Hypothese aus, so erhält man Schwingungen, welche in entgegengesetztem Sinne elliptisch polarisirt sind und überdies der Gleichung

$$m_1 a_1 b_1 = m_2 a_2 b_2$$

genügen.

Man findet leicht durch Verbindung dieser Gleichung mit der ersten der Gleichungen (2):

$$m_1 m_2 a_1^2 a_2^2 + m_2^2 a_2^4 = m_1 m_2 a_2^2 b_1^2 + m_1^2 a_1^2 b_1^2$$

$$(m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2)(m_2 a_2^2 - m_1 b_1^2) = 0,$$

also

$$m_1 b_1^2 = m_2 a_2^2$$

und

$$m_1 a_1^2 = m_2 b_2^2.$$

Die Gleichungen dieser beiden Schwingungsarten, deren Wechsel ebenfalls natürliches Licht giebt, sind

$$x_1 = a_1 \sin\varphi \qquad\qquad x_2 = b_1 \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \sin\varphi$$

$$y_1 = b_1 \sin(\varphi + \delta_1) \qquad\qquad y_2 = - a_1 \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \sin(\varphi + \delta_1),$$

und stellen Schwingungen vor, welche in entgegengesetztem Sinne elliptisch polarisirt sind; die Ellipsen sind einander ähnlich, jedoch um 90° gegen einander gedreht, und die Intensitäten sind den Zeiten verkehrt proportional, während welcher die Schwingungen andauern.

Man sieht leicht, wie dieser zweite Fall den ersten in sich begreift.

Das Resultat dieser Betrachtung ist:

Das natürliche Licht kann durch das Zusammenwirken zweier alternirender Schwingungsarten entstehen, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Intensitäten der beiden Schwingungsarten müssen ihrer verhältnissmässigen Dauer verkehrt proportional sein.

2. Die Ellipsen, in welchen die beiden Bewegungen vor sich gehen, müssen einander ähnlich und gegen einander um 90° gedreht sein.

3. Die beiden Ellipsen müssen von den schwingenden Molecülen im entgegengesetzten Sinne durchlaufen werden.

Stokes hat vorgeschlagen, elliptisch polarisirte Strahlen, welche den beiden letzteren Bedingungen genügen, entgegengesetzt polarisirte Strahlen zu nennen. Nehmen wir diese Bezeichnung an, so können wir sagen, dass die einfachste Art, natürliches Licht herzustellen, darin besteht, zwei entgegengesetzt polarisirte Strahlen so alterniren zu lassen, dass die Dauer des Bestehens eines Strahles seiner Intensität verkehrt proportional ist. Allein auch eine Aufeinanderfolge von Strahlenpaaren, von welchen jedes einzelne jenen Bedingungen genügt, muss die Eigenschaften des natürlichen Lichtes zeigen.

Wir wollen nun sehen, ob sich natürliches Licht auf verschiedene Weise durch eine Folge lediglich geradlinig polarisirter Strahlen herstellen lässt.

Betrachten wir ein System von $p - 1$ beliebig geradlinig polarisirten Schwingungen. Ein solches System erfüllt stets die Bedingung:

$$M(a\, b \sin \delta) = 0,$$

da δ nur gleich 0 oder gleich π ist.

Bezeichnen wir nun durch A, B, C die drei Grössen $M(a^2)$, $M(b^2)$, $M(a\, b \cos \delta)$, d. i.

$$m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 + \cdots + m_{p-1} a^2_{p-1} = A$$
$$m_1 b_1^2 + m_2 b_2^2 + \cdots + m_{p-1} b^2_{p-1} = B$$
$$\pm m_1 a_1 b_1 \pm m_2 a_2 b_2 \pm \cdots \pm m_{p-1} a_{p-1} b_{p-1} = C.$$

Damit das System dem natürlichen Lichte entspreche, genügt es nun, noch eine $p$te, den Parametern a_p, b_p, m_p entsprechende, geradlinig polarisirte Vibration hinzuzufügen, welche so beschaffen ist, dass:

$$m_p a_p^2 + A = m_p b_p^2 + B$$
$$\pm m_p a_p b_p + C = 0.$$

Diese Gleichungen erscheinen befriedigt, wenn $m_p a_p^2$ und $m_p b_p^2$ die positiven Wurzeln der Gleichungen

$$z^2 + (A - B) z - C^2 = 0$$
$$z^2 - (A - B) z - C^2 = 0$$

sind, und überdies $\delta = 0$ oder $\delta = \pi$ genommen wird, je nachdem C positiv oder negativ ist.

Man kann also auf unendlich viele Arten das natürliche Licht aus geradlinig polarisirten Vibrationen zusammensetzen.

Eine ganz ähnliche Rechnung zeigt, dass man das natürliche Licht auch auf unendlich viele Arten aus elliptischen Vibrationen von bestimmter Form und a fortiori aus solchen von beliebiger Form zusammensetzen kann.

Es ist jedoch stets unerlässlich, dass die beiden entgegengesetzten Arten elliptischer Schwingung (von rechts nach links oder von links nach rechts) gleichzeitig bestehen. Schwingungen nur einer Art könnten nie der Bedingung

$$M(a\,b\,\sin\delta) = 0$$

genügen, da $a\,b\,\sin\delta$ stets positiv oder stets negativ ist, je nachdem δ zwischen 0 und π oder zwischen π und 2π liegt, oder je nachdem die Vibrationen von links nach rechts oder von rechts nach links vor sich gehen.

239. Nachahmung des natürlichen Lichtes.

Dove[1]) liess einen natürlichen Lichtstrahl durch einen rasch rotirenden Nicol treten; der austretende Strahl zeigte alle Eigenschaften des natürlichen Lichtes. Tritt der Strahl auch noch durch ein Glimmerblättchen, welches mit derselben Geschwindigkeit und im selben Sinne rotirt, so zeigt der austretende Strahl, welcher ein rotirender, elliptisch polarisirter Strahl ist, dieselben Erscheinungen der chromatischen Polarisation, wie ein circular polarisirter Strahl. Giebt man dem Nicol eine feste Lage und lässt nur das Glimmerblättchen rotiren, so ändert die elliptische Polarisation bei jeder halben Drehung den Sinn.

Indessen hat Airy[2]) die scharfsinnige Bemerkung gemacht, dass strenge genommen durch einen gleichmässig rotirenden polarisirten Strahl niemals natürliches Licht erhalten wird, dass vielmehr ein solcher Strahl anzusehen ist als ein Zusammenbestehen zweier entgegengesetzt circularpolarisirter Strahlen von verschiedener Schwingungsdauer.

In der That, sind

$$x = a\cos\omega\,\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \alpha\right)$$

$$y = a\sin\omega\,\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \alpha\right)$$

die Gleichungen einer geradlinigen Vibration, welche mit der Achse den Winkel ω bildet, und wächst ω proportional mit der Zeit, so dass

$$\omega = p + r\,t,$$

[1]) Pogg. Ann. LXXI, 97. — [2]) *Undulatory Theory of Light.*

so hat man

$$x = a \cos(\mu + \nu t) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \alpha\right)$$

$$y = a \sin(\mu + \nu t) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \alpha\right),$$

und nach einer bekannten Transformation:

$$x = \frac{a}{2} \sin \left[\left(\frac{2\pi}{T} + \nu\right) t + 2\pi\alpha + \mu\right]$$
$$+ \frac{a}{2} \sin \left[\left(\frac{2\pi}{T} - \nu\right) t + 2\pi\alpha - \mu\right],$$
$$y = -\frac{a}{2} \cos \left[\left(\frac{2\pi}{T} + \nu\right) t + 2\pi\alpha + \mu\right]$$
$$+ \frac{a}{2} \cos \left[\left(\frac{2\pi}{T} - \nu\right) t + 2\pi\alpha - \mu\right].$$

Diese Gleichungen stellen ersichtlich zwei circularpolarisirte Vibrationen von verschiedener Schwingungsdauer dar, deren Gleichungen sind:

$$x_1 = \frac{a}{2} \sin \left[\left(\frac{2\pi}{T} + \nu\right) t + 2\pi\alpha + \mu\right]$$
$$y_1 = -\frac{a}{2} \cos \left[\left(\frac{2\pi}{T} + \nu\right) t + 2\pi\alpha + \mu\right]$$

und

$$x_2 = \frac{a}{2} \sin \left[\left(\frac{2\pi}{T} - \nu\right) t + 2\pi\alpha - \mu\right]$$
$$y_2 = -\frac{a}{2} \cos \left[\left(\frac{2\pi}{T} - \nu\right) t + 2\pi\alpha - \mu\right].$$

Dieselben Bemerkungen lassen sich in Bezug auf die beiden Composanten einer elliptischen Bewegung und folglich auch in Bezug auf diese Bewegung selbst machen.

Die Schwingungszahlen der beiden Strahlen sind $\frac{1}{T} + \frac{\nu}{2\pi}$ und $\frac{1}{T} - \frac{\nu}{2\pi}$. Macht also der Nicol in der Secunde 1000 Umdrehungen, so verhalten sich die Schwingungszahlen für $\lambda = 0{\cdot}0005$ mm wie 600 Billionen mehr eins zu 600 Billionen weniger eins.

Der experimentelle Nachweis des Vorhandenseins der beiden so beschaffenen Strahlen erschien als absolut unerreichbar, bis in neuester Zeit A. Righi auf dem Wege der Interferenzen mittelst jener beiden Strahlen Lichtschwebungen darstellte, d. i. jene Lichtinterferenzerscheinung, welche dem akustischen Phänomen der Schwebungen oder Stösse analog ist.

240. Lichtschwebungen.

Wie eben erörtert, hatte Airy gezeigt, dass der aus einem rotirenden Nicol tretende Strahl in zwei entgegengesetzt circularpolarisirte Strahlen zerlegt werden kann, deren Schwingungszahlen $N \pm n$ und $N \mp n$ sind, wenn N die Schwingungszahl des in den Nicol tretenden natürlichen Strahles, und n die Rotationszahl des Nicols sind. Die Schwingungszahl des eintretenden Strahles erscheint vermehrt oder vermindert, je nachdem die Rotation des austretenden Theilstrahles mit jener des Nicols übereinstimmt oder nicht.

Ehe wir auf das Experiment A. Righi's[1]) eingehen, wollen wir nebenbei kurz die Resultate einiger dem Airy'schen analogen Fälle anführen, zu welchen Righi ebenfalls auf theoretischem Wege gelangte.

1. Ein natürlicher Strahl von N Schwingungen, welcher durch einen rotirenden Circularpolariseur von n Umdrehungen geht, verwandelt sich in einen Circularstrahl, dessen Schwingungszahl $N + n$ oder $N - n$ ist, je nachdem der Polariseur im selben oder entgegengesetzten Sinne rotirt, wie der austretende Strahl.

2. Ein Circularstrahl verwandelt sich durch einen rotirenden Nicol in zwei entgegengesetzt schwingende Circularstrahlen. Jener derselben, welcher im Sinne des eintretenden Strahles rotirt, hat die Schwingungszahl N, der andere die Schwingungszahl $N + 2n$ oder $N - 2n$, je nachdem das Nicol im entgegengesetzten oder im selben Sinne rotirt, wie der eintretende Strahl.

3. Ein Circularstrahl verändert sich durch einen rotirenden Circularpolariseur nicht, wenn ein anderer Circularstrahl, welcher beim Durchgange natürlichen Lichtes entstände, desselben Sinnes ist wie der einfallende; ist er aber entgegengesetzten Sinnes, so verwandelt sich der einfallende Circularstrahl in einen Circularstrahl von entgegengesetztem Sinne und entweder $N + 2n$ oder $N - 2n$ Schwingungen, je nachdem der Polariseur im entgegengesetzten oder gleichen Sinne rotirt wie der einfallende Strahl.

4. Ein Circularstrahl verwandelt sich beim Durchgange durch ein in seiner eigenen Ebene rotirendes $\frac{\lambda}{4}$-Plättchen wie unter 2.

5. Geht ein geradlinig polarisirter Strahl durch ein $\frac{\lambda}{2}$-Plättchen, welches in seiner eigenen Ebene rotirt, so verwandelt sich der Strahl in

[1]) *Sui cambiamenti di lunghezza d'onda ottenuti colla rotatione d'un polarizzatore e sul fenomeno dei battimenti prodotto colle vibrazioni luminose, Accademia delle scienze Bologna 1883. — Journ. de Phys. 1883.*

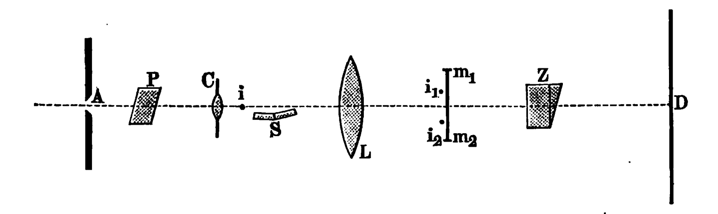
zwei entgegengesetzt circularpolarisirte Strahlen von $N + 2n$ und $N - 2n$ Schwingungen, je nachdem der austretende Theilstrahl im Sinne des $\frac{\lambda}{2}$-Plättchens rotirt oder im entgegengesetzten.

6. Ein Circularstrahl verwandelt sich beim Durchgange durch ein rotirendes $\frac{\lambda}{2}$-Plättchen in einen im entgegengesetzten Sinne des einfallenden Strahles rotirenden Circularstrahl von $N + 2n$ oder $N - 2n$ Schwingungen, je nachdem die Rotation des $\frac{\lambda}{2}$-Plättchens im entgegengesetzten oder im selben Sinne vor sich geht, wie jene des einfallenden Strahles.

Ohne auf die Begründung dieser Sätze einzugehen, wenden wir uns zu einem der vielen Experimente Righi's, welches sich auf den von Airy betrachteten Fall bezieht.

Es sei, Fig. 18, *A* eine verticale Spaltöffnung im Fensterladen, durch welche in horizontaler Richtung Sonnenstrahlen eintreten. Dieselben gehen durch einen Polariseur, z. B. ein Nicol *P*, dann eine Cylin-

Fig. 18.



derlinse *C*, bringen bei *i* ein verticales Bild der Spaltöffnung hervor, werden von einem Fresnel'schen Spiegelpaare *S* reflectirt, gehen durch eine achromatische Sammellinse *L*, um die beiden Bilder i_1 und i_2 hervorzubringen. Die von i_1 und i_2 ausgehenden Strahlen treten getrennt durch je einen Theil einer Bravais'schen Platte $m_1\,m_2$. Diese ist von zwei $\frac{\lambda}{4}$-Plättchen gebildet, welche in einer verticalen Ebene liegen, und in einer verticalen Linie so an einander grenzen, dass die Hauptschnitte auf einander senkrecht stehen und mit der Verticalen Winkel von 45^0 bilden. Nachdem schliesslich die Strahlen noch durch einen doppeltbrechenden Analyseur *Z* getreten sind, fallen sie auf einen Schirm *D*.

Setzen wir nun voraus, der Polariseur *P* sei in Rotation versetzt im Sinne ↺ und mache n Umdrehungen in der Secunde, das einfallende Licht sei homogen und mache N Schwingungen. Das den Polariseur *P* verlassende Licht kann angesehen werden als bestehend aus zwei circularpolarisirten Strahlen, von welchen der eine im Sinne ↺ rotirt und $N + n$

Schwingungen macht, während der andere im Sinne ↺ rotirt und $N - n$ Schwingungen macht. Die beiden Strahlen $N + n$ ↻, $N - n$ ↺, welche von i_1 ausgehen, durchsetzen das Glimmerblättchen m_1 und verwandeln sich hierbei in zwei Strahlen $N + n$ ↑, $N - n$ ←, von welchen der eine vertical, und der andere horizontal polarisirt ist. Von i_2 gehen zwei eben solche Strahlen aus, durchsetzen das Glimmerblättchen m_2 und verwandeln sich ebenfalls in zwei geradlinig polarisirte Strahlen $N + n$ ←, $N - n$ ↑. Da die beiden Hauptschnitte der Glimmerblättchen einen rechten Winkel bilden, so verwandelt sich im Glimmerblättchen m_1 der Strahl ↻ in einen vertical polarisirten, hingegen im Blättchen m_2 der Strahl ↺. Von m_1 kommt sonach vertical schwingendes Licht von $N + n$, und horizontal schwingendes von $N - n$ Vibrationen, hingegen von m_2 vertical schwingendes von $N - n$, und horizontal schwingendes von $N + n$ Vibrationen.

Es wird also der von m_1 kommende, vertical schwingende Strahl von $N + n$ Vibrationen mit dem von m_2 kommenden, vertical schwingenden Strahle von $N - n$ Vibrationen zur Interferenz kommen, und der von m_1 kommende horizontal schwingende Strahl von $N - n$ Vibrationen mit dem von m_2 kommenden horizontal schwingenden Strahle von $N + n$ Vibrationen. Der doppeltbrechende Analyseur Z trennt die beiden Fransensysteme von einander und projicirt sie getrennt auf den Schirm D, eines unter dem anderen. Nun zeigt sich, worauf es ankommt: Die Interferenzfransen befinden sich in gleichmässiger Bewegung auf dem Schirme, und zwar bewegen sich die Fransen der beiden Bilder in entgegengesetzter Richtung. Durch einen gegebenen Punkt des Schirmes gehen $2n$ Fransen in der Secunde, entsprechend der Differenz $2n$ der Schwingungszahlen der interferirenden Strahlen.

241. Homogenes natürliches Licht.

Wir gelangen zu einer Consequenz unserer Betrachtungen, welche von Airy bemerkt worden ist: Die Veränderungen der Gestalt und Lage der Vibrationsellipse des natürlichen Lichtes können, wenn dieses absolut homogen sein soll, nicht als continuirlich gedacht werden. In der That besteht jede continuirliche Veränderung der Vibrationsellipse aus einer Reihe unendlich kleiner Drehungen und Grössenveränderungen der Achsen der Ellipse, und es kann daher während jedes sehr kleinen Zeittheilchens die Bewegung angesehen werden als resultirend aus zwei Bewegungen von verschiedener Schwingungsdauer. Eine absolute Homo-

geneität des Lichtes ist also nur verträglich mit der Annahme durchaus plötzlicher Veränderungen der Schwingungsweise. Zwar erscheint eine nahezu vollkommene Homogeneität vereinbar mit einer allmäligen Veränderung der Schwingungsweise, so lange diese Veränderung im Vergleiche mit den Schwingungen selbst sehr langsam vor sich geht; sobald dies jedoch nicht mehr zutrifft und die Raschheit der beiden Bewegungen vergleichbar wird, hat man in der That eine Superposition zweier verschieden brechbarer und verschieden polarisirter Strahlen.

242. Partiell polarisirtes Licht.

Wenn die Bedingungen des natürlichen Lichtes nicht erfüllt sind, so hat man für ein beliebiges Achsensystem:

$$M(a^2) = A$$
$$M(b^2) = B$$
$$M(a\,b\cos\delta) = C$$
$$M(a\,b\sin\delta) = D.$$

Sind A', B', C', D' die entsprechenden Werthe für ein anderes Coordinatensystem, dessen x-Achse mit jener des ersteren Coordinatensystems einen Winkel ω einschliesst, so hat man nach früheren Ausführungen:

$$A' = A\cos^2\omega + B\sin^2\omega - 2\,C\sin\omega\cos\omega$$
$$B' = A\sin^2\omega + B\cos^2\omega - 2\,C\sin\omega\cos\omega$$
$$C' = C(\cos^2\omega - \sin^2\omega) - (A - B)\sin\omega\cos\omega$$
$$D' = D.$$

Geht das Licht durch eine doppeltbrechende Krystallplatte, deren Hauptschnitt der beliebig angenommenen x-Achse des zweiten Coordinatensystems parallel ist, so bleiben A' und B' ungeändert, während δ zu $\delta + \varepsilon$ wird, und man hat nach dem Durchgange durch die Platte:

$$A'' = A'$$
$$B'' = B'$$
$$C'' = C'\cos\varepsilon - D\sin\varepsilon$$
$$D'' = C'\sin\varepsilon + D\cos\varepsilon.$$

Es giebt stets zwei um 90° verschiedene Werthe von ω, für welche $C' = 0$ wird. Diese Werthe werden durch Auflösung der Gleichung

$$\tan^2\omega + \frac{A - B}{C}\tan\omega - 1 = 0,$$

erhalten.

Wie immer also das Licht beschaffen sei, man findet stets zwei rechtwinkelige Achsen, für welche $M(a\,b\,\cos\delta)$ der Null gleich ist. Für diese Achsen nehmen $M(a^2)$ und $M(b^2)$ ihre grössten und kleinsten Werthe an, wie aus den obigen Gleichungen hervorgeht. Beziehen sich die Bezeichnungen A_1, B_1, ω_1 auf dieses Coordinatensystem, so hat man

$$A_1 = A\cos^2\omega_1 + B\sin^2\omega_1$$
$$B_1 = A\sin^2\omega_1 + B\cos^2\omega_1.$$

Nehmen wir an, A_1 und B_1 seien ungleich. Man nennt dann Polarisationsebene jene Ebene, welche durch den Strahl und die x- oder y-Achse geht, je nachdem $A_1 < B_1$ oder $A_1 > B_1$.

Nehmen wir an, A_1 und B_1 seien gleich. Es folgt dann, dass $A = B$, und folglich $C = 0$ für jede beliebige Richtung des Coordinatensystems. Sobald also für jede beliebige Achsenrichtung

$$M(a^2) = M(b^2),$$

muss nothwendig auch

$$M(a\,b\,\cos\delta) = 0$$

sein.

Kehren wir zu dem allgemeinen Falle zurück, wo A_1 und B_1 ungleich sind, und lassen wir das Licht durch einen doppeltbrechenden Analyseur treten, dessen Hauptschnitt mit der Polarisationsebene einen Winkel θ bildet. Die Intensität des ordentlichen Bildes ist

$$A_1\sin^2\theta + B_1\cos^2\theta,$$

die des ausserordentlichen

$$A_1\cos^2\theta + B_1\sin^2\theta.$$

Die Intensitäten der beiden Bilder sind von der Orientation des Analyseurs abhängig. Die Intensität des ordentlichen Bildes ist ein Minimum für $\theta = 90^0$ und gleich B_1, die des ausserordentlichen Bildes ist ein Minimum für $\theta = 0$ und gleich A_1. Keines der Bilder verschwindet vollständig.

Kehren wir zu dem besonderen Falle zurück, wo $A_1 = B_1$. Dann ist für jedes Coordinatensystem $M(a^2) = M(b^2)$ und $M(a\,b\,\cos\delta) = 0$, oder $A = B$, $C = 0$. Wäre auch $D = 0$, so hätten wir natürliches Licht. Dies ist aber im Allgemeinen nicht der Fall, und folglich unterscheidet sich dieses Licht von dem natürlichen. In der That, lässt man dieses Licht durch eine Krystallplatte treten, so wird δ zu $\delta + \varepsilon$, C hört auf, der Null gleich zu sein, und folglich hört auch die Gleichheit von A_1 und B_1 auf, derart, dass dieses Licht nach seinem Durchgange durch eine Krystallplatte im Allgemeinen in einem doppeltbrechenden Analyseur zwei ungleich helle Bilder giebt. Ist das Licht hingegen natürliches, so ist stets $D = 0$, folglich bleibt nach dem Durchgange durch die Krystallplatte $C = 0$ und $A_1 = B_1$, derart, dass das natürliche Licht nach dem Durchgange durch die Krystallplatte immer noch im Analyseur zwei gleich helle Bilder giebt.

243. Arten des partiell polarisirten Lichtes.

Man hat

$$AB = (m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 + \cdots)(m_1 b_1^2 + m_2 b_2^2 + \cdots)$$

$$C^2 + D^2 = (m_1 a_1 b_1 \cos\delta_1 + m_2 a_2 b_2 \cos\delta_2 + \cdots)^2 + (m_1 a_1 b_1 \sin\delta_1 + m_2 a_2 b_2 \sin\delta_2 + \cdots)^2$$

oder

$$AB = m_1^2 a_1^2 b_1^2 + m_2^2 a_2^2 b_2^2 + \cdots + m_1 m_2 (a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2) + \cdots + m_p m_q (a_p^2 b_q^2 + a_q^2 b_p^2)$$

$$C^2 + D^2 = m_1^2 a_1^2 b_1^2 + m_2^2 a_2^2 b_2^2 + \cdots + m_1 m_2 a_1 a_2 b_1 b_2 \cos(\delta_1 - \delta_2) + \cdots + m_p m_q a_p b_q a_q b_p \cos(\delta_p - \delta_q) + \cdots$$

Es ergiebt sich hieraus für

$$AB - (C^2 + D^2)$$

ein Ausdruck, welcher aus Gliedern von der Form

$$m_p m_q [a_p^2 b_q^2 + a_q^2 b_p^2 - a_p b_q a_q b_p \cos(\delta_p - \delta_q)]$$

besteht. Jedes dieser Glieder ist grösser als

$$m_p m_q (a_p b_q - a_q b_p)^2,$$

welch letztere Grösse nicht negativ sein kann.

Es folgt

$$AB - (C^2 + D^2) \geqq 0.$$

Wir haben also zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Es ist $AB = C^2 + D^2$.
2. Es ist $AB > (C^2 + D^2)$.

Betrachten wir zunächst die Systeme von Schwingungsarten, welche dem ersteren Falle entsprechen, wo $AB = C^2 + D^2$. Dem Vorhandensein einer einzigen Schwingungsart entsprechen die Gleichungen:

$$A = ma^2, \quad B = mb^2, \quad C = mab\cos\delta, \quad D = mab\sin\delta.$$

Da nun

$$ma^2 . mb^2 = m^2 a^2 b^2 \cos^2\delta + m^2 a^2 b^2 \sin^2\delta,$$

so ist ersichtlich, dass das Vorhandensein einer einzigen Schwingungsart die Bedingung $AB = C^2 + D^2$ erfüllt. Ueberdies geht aus den vorhergehenden Formeln hervor, dass eine Folge mehrerer Schwingungsarten mit dieser Bedingung unverträglich ist. Also: Der Annahme $AB = C^2 + D^2$ entspricht nur das Vorhandensein einer einzigen Schwingungsart, welche übrigens vollständig beliebig ist.

Gehen wir zu dem zweiten Falle über, wo $AB > C^2 + D^2$. Man kann dieser Bedingung auf unendlich viele Arten genügen. Man kann unendlich viele Paare A', B' angeben, so dass

$$A' < A \qquad B' < B \qquad A'B' = C^2 + D^2.$$

A', B', C, D stellen eine beliebige elliptische Vibration dar. Lässt man nun diese Schwingungsart mit einer zweiten abwechseln, für welche

$$M(a^2) = A - A' \qquad M(b^2) = B - B'$$
$$M(a\,b\cos\delta) = 0, \qquad M(a\,b\sin\delta) = 0,$$

so hat man eine Schwingungsart, welche durch die Parameter A, B, C, D charakterisirt ist.

Unter den unendlich vielen Vibrationssystemen, welche einem gegebenen Systeme A, B, C, D von Parametern entsprechen und die Bedingung $AB > C^2 + D^2$ erfüllen, betrachten wir jenes näher, welches auch noch der Bedingung $A - A' = B - B'$ genügt. Die beiden alternirenden Strahlen sind dann ein elliptischer und ein natürlicher, und zwar sind beide Strahlen vollkommen bestimmt. Ist

$$A - A' = B - B' = H,$$

so folgt $(A - H)(B - H) = C^2 + D^2$ und

$$H = \frac{A + B}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A - B)^2 + 4(C^2 + D^2)}.$$

Beide Wurzeln dieser Gleichung sind positiv; da jedoch die grössere derselben grösser ist als A und als B, so ist allein die kleinere Wurzel zu nehmen, so dass man hat

$$H = \frac{A + B}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(A - B)^2 + 4(C^2 + D^2)}.$$

Das Doppelte dieser Grösse giebt die Intensität des natürlichen Lichtbündels, welches mit dem elliptisch polarisirten abwechselt. Diese Intensität ist Null, wenn

$$AB = C^2 + D^2.$$

Andererseits ist das elliptisch polarisirte Lichtbündel bestimmt durch

$$a^2 = A - H = \frac{A - B}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(A - B)^2 + 4(C^2 + D^2)}$$

$$b^2 = B - H = -\frac{A - B}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(A - B)^2 + 4(C^2 + D^2)}$$

$$\cos\delta = \frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}} \qquad \sin\delta = \frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}}.$$

Die elliptische Polarisation dieses Bündels verwandelt sich in eine geradlinige, wenn $D = 0$, in eine kreisförmige, wenn $A = B$ und folglich $C = 0$. Jedes homogene Lichtbündel kann also angesehen werden

als bestehend theils aus natürlichem Lichte, theils aus geradlinig, kreisförmig oder elliptisch polarisirtem Lichte. Man kann sagen, dass jeder Strahl ein natürlicher, polarisirter oder partiell polarisirter Strahl ist. Die Eigenthümlichkeiten des vollständig polarisirten und des vollständig unpolarisirten Lichtes sind bekannt. Jene der verschiedenen Arten des partiell polarisirten Lichtes sind leicht anzugeben:

1. Besteht das Licht aus natürlichem und geradlinig polarisirtem Lichte, so zeigen die beiden Bilder, welche beim senkrechten Durchtritte der Strahlen durch einen doppeltbrechenden Krystall entstehen, Helligkeiten, welche mit der Orientation des Krystalls variiren. Die Intensität jedes der beiden Bilder ist ein Maximum, wenn seine Vibrationsebene mit jener des geradlinig polarisirten Bestandtheiles des einfallenden Lichtes zusammenfällt, ein Minimum, wenn sie auf jener senkrecht steht. Der Durchgang durch einen Krystall, dessen Hauptschnitt mit der Ebene der partiellen Polarisation zusammenfällt, oder auf ihr senkrecht steht, verändert die Eigenschaften eines solchen Strahlenbündels nicht; für jede andere Orientation der Krystallplatte jedoch verwandelt sich der geradlinig polarisirte Bestandtheil des Lichtes in kreisförmig oder elliptisch polarisirtes Licht, und die Eigenschaften des Strahlenbündels finden sich folglich verändert.

2. Besteht das Strahlenbündel aus natürlichem und kreisförmig polarisirtem Lichte, so sind die Helligkeiten der beiden Bilder, welche beim Durchtritte durch eine Krystallplatte entstehen, von der Orientation der letzteren unabhängig, so wie bei natürlichem oder kreisförmig polarisirtem Lichte; allein ein $\frac{\lambda}{4}$-Plättchen verwandelt dieses Licht in theilweise geradlinig polarisirtes, während natürliches Licht unverändert bleibt und kreisförmig polarisirtes zu vollständig geradlinig polarisirtem wird.

3. Besteht das einfallende Strahlenbündel aus natürlichem und elliptisch polarisirtem Lichte, so variiren die Helligkeiten der beiden durch die Krystallplatte hervorgebrachten Bilder mit der Orientation dieser letzteren, ohne je Null zu werden, wie dies auch im Falle theilweise geradlinig polarisirten und in jenem vollständig elliptisch polarisirten Lichtes zutrifft. Allein ein $\frac{\lambda}{4}$-Plättchen, dessen Hauptschnitt mit einer der Achsen der Ellipse zusammenfällt, verwandelt die theilweise elliptische Polarisation in theilweise geradlinige Polarisation, während unter denselben Umständen die vollständige elliptische Polarisation zur vollständig geradlinigen wird. Bildet der Hauptschnitt des $\frac{\lambda}{4}$-Plättchens mit der Polarisationsebene theilweise geradlinig polarisirten Lichtes einen Winkel von 45°, so erhält man theilweise kreisförmig polarisirtes Licht, was bei theilweise elliptisch polarisirtem Lichte nicht zutrifft.

XXIV.

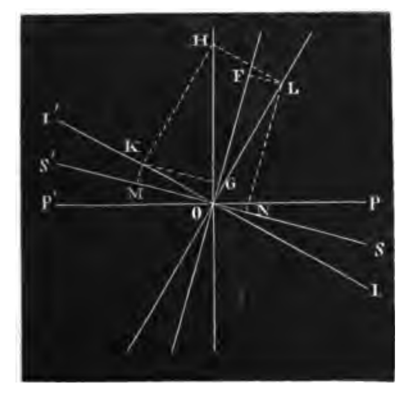
Chromatische Polarisation des parallelen Lichtes.

---

244. Färbung der Bilder im Analyseur.

Nehmen wir eine auf der Richtung der Strahlen senkrechte Ebene zur Ebene der Figur, sei PP' (Fig. 19) die Polarisationsebene des einfallenden parallelen Strahlenbündels, II' der Hauptschnitt der Krystallplatte, SS' jener des Analyseurs, und mögen durch i und s die Winkel der Hauptschnitte der Krystallplatte und des Analyseurs mit der ursprünglichen Polarisationsebene bezeichnet werden.

Fig. 19.



Das vom Polariseur kommende Licht möge dargestellt sein durch

$$sin\, 2\,\pi\, \frac{t}{T},$$

die Schwingungen vollziehen sich senkrecht zu PP'. Indem der Strahl die Krystallplatte durchdringt, zerlegt er sich in zwei Strahlen. Einer derselben, dessen Schwingungen senkrecht zu II' vor sich gehen, ist gegeben durch

$$cos\, i\, sin\, 2\,\pi\, \frac{t}{T},$$

es ist der ordentliche Strahl, der andere, dessen Schwingungen parallel zu II' vor sich gehen, ist gegeben durch

$$- \sin i \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

und dieser ist der ausserordentliche Strahl.

Bezeichnet man, wie wir dies schon früher gethan haben, durch O und E die Dicken zweier Luftschichten, welche vom ordentlichen und ausserordentlichen Strahle in derselben Zeit durchsetzt werden, in welcher diese Strahlen die Krystallplatte durchsetzen, so können die beiden Strahlen nach ihrem Austritte aus der Krystallplatte dargestellt werden, der ordentliche durch

$$\cos i \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

und der ausserordentliche durch

$$- \sin i \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{O - E}{\lambda}\right).$$

In Fig. 19 bedeutet OL die Bewegung des ordentlichen, OK jene des ausserordentlichen Strahles nach dem Austritte aus der Krystallplatte. Projicirt man diese beiden Linien auf SS' und auf eine zu SS' senkrechte Gerade, so ist die Bewegung senkrecht zu SS', d. i. die des ordentlichen aus dem Analyseur tretenden Strahles gegeben durch $OF + OG$, d. i. durch

$$\sin i \sin (i - s) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{O - E}{\lambda}\right) + \cos i \cos (i - s) \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

und gleicherweise ist die Bewegung parallel zu SS', welche dem ausserordentlichen, aus dem Analyseur tretenden Strahle angehört, gegeben durch $OM - ON$ oder

$$- \sin i \cos (i - s) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{O - E}{\lambda}\right) + \cos i \sin (i - s) \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Man hat also für die Intensitäten ω^2 und ε^2 des ordentlichen und ausserordentlichen Strahles nach dem Durchgange durch den Analyseur

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \sin^2 i \sin^2 (i - s) + \cos^2 i \cos^2 (i - s) \\ &\quad + 2 \sin i \cos i \sin (i - s) \cos (i - s) \cos 2\pi \frac{O - E}{\lambda}, \\ \varepsilon^2 &= \cos^2 i \sin^2 (i - s) + \sin^2 i \cos^2 (i - s) \\ &\quad - 2 \sin i \cos i \sin (i - s) \cos (i - s) \cos 2\pi \frac{O - E}{\lambda}. \end{aligned}$$

Ersetzt man $\cos 2\pi \frac{O - E}{\lambda}$ durch $1 - 2 \sin^2 \pi \frac{O - E}{\lambda}$, so vereinfachen sich diese Ausdrücke und werden

$$\left.\begin{aligned} \omega^2 &= \cos^2 s - \sin 2i \sin 2(i - s) \sin^2 \pi \frac{O - E}{\lambda} \\ \varepsilon^2 &= \sin^2 s + \sin 2i \sin 2(i - s) \sin^2 \pi \frac{O - E}{\lambda} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (1)$$

Diese Ausdrücke erscheinen als Functionen von λ, und hieraus ergiebt sich die Färbung der Bilder im Allgemeinen.

Da stets

$$\omega^2 + \varepsilon^2 = 1,$$

so folgt, dass die beiden Bilder stets complementär gefärbt sind.

Die Färbung der Bilder hängt nur von den zweiten Gliedern der für ω^2 und ε^2 gefundenen Ausdrücke ab, da die ersten Glieder von λ unabhängig erscheinen. Lässt man nun i und s variiren, so variiren diese zweiten Glieder in den Ausdrücken für die Intensität; allein man bemerkt, dass diese Variationen für alle einfachen Farben proportional vor sich gehen. Jedes der beiden Bilder zeigt daher stets dieselbe Farbe, wenigstens so lange das zweite Glied im Ausdrucke für die Intensität dieses Bildes das Vorzeichen nicht ändert. Verändert sich dieses Vorzeichen in Folge der Variationen von i und s, so geht die Farbe des Bildes in die complementäre Farbe über. Jedes der beiden Bilder kann also nur zwei verschiedene, und zwar complementäre Farben zeigen.

Ist das zweite Glied in den Ausdrücken für ω^2 und ε^2 für alle λ der Null gleich, d. i. hat man

$$\sin 2 i \sin 2 (i - s) = 0,$$

so werden die Ausdrücke für ω^2 und ε^2 unabhängig von λ, die beiden Bilder erscheinen farblos. Dies ist der Fall, wenn entweder

$$\sin 2 i = 0$$

oder

$$\sin 2 (i - s) = 0.$$

Die Bilder erscheinen also farblos, wenn der Hauptschnitt der Krystallplatte entweder parallel oder senkrecht zur ursprünglichen Polarisationsebene ist, und ferner, wenn der Hauptschnitt des Analyseurs parallel oder senkrecht zum Hauptschnitte der Krystallplatte ist, ein Resultat, welches leicht vorauszusehen war.

Hat man $s = 0$ oder $s = 90^0$, ist also der Hauptschnitt des Analyseurs parallel oder senkrecht zur ursprünglichen Polarisationsebene, so reduciren sich die vier Lagen, welche im Allgemeinen farblose Bilder geben, auf zwei, und zwar ist in jeder dieser Lagen die Intensität eines der beiden Bilder Null.

Man sieht ferner, dass für jedes der Bilder des Analyseurs der Uebergang zur Complementärfarbe dann stattfindet, wenn das Product $\sin 2 i \sin 2 (i - s)$ der Null gleich wird; jedes Bild erscheint also im Momente des Farbenwechsels weiss.

Da die Färbung der Bilder einzig von dem zweiten Gliede der Ausdrücke für ω^2 und ε^2 abhängt, so ist die Färbung am lebhaftesten, wenn $\sin 2 i \sin 2 (i - s)$ ein Maximum wird. Bei einem bestimmten Werthe von i tritt also das Maximum der Färbung ein für $2 (i - s) = 90^0$ oder $i - s = 45^0$, also wenn die Hauptschnitte der Krystallplatte und des Analyseurs einen Winkel von 45^0 bilden. Das Maximum der Fär-

bung wird möglichst intensiv sein, wenn überdies $2i = 90^0$ oder $i = 45^0$, also wenn die ursprüngliche Polarisationsebene und der Hauptschnitt der Krystallplatte einen Winkel von 45^0 bilden.

Dass bei Anwendung natürlichen Lichtes keine Färbung eintritt, erklärt sich aus dem Umstande, dass ein Bündel natürlichen Lichtes nach seinem Durchgange durch eine doppeltbrechende Krystallplatte, sobald nur die Platte hinreichend dünn ist, um die beiden Bündel nicht getrennt austreten zu lassen, die Eigenschaft bewahrt, in einem doppeltbrechenden Analyseur zwei gleich helle Bilder zu geben; diese müssen weiss sein, da die Intensität jeder einfachen Farbe die Hälfte ihrer ursprünglichen Intensität beträgt.

Dass die Färbung verschwindet, wenn die Krystallplatte eine gewisse Dicke überschreitet, hat denselben Grund, aus welchem bei Anwendung nicht homogenen Lichtes die Interferenzfransen verschwinden, sobald die Wegdifferenz eine grössere Zahl Wellenlängen beträgt. Habe eine einfache Farbe die Wellenlänge λ. Ist das Product $\sin 2i \sin 2(i - s)$ positiv, so ist die Intensität dieser Farbe im ordentlichen Bilde ein Minimum, und im ausserordentlichen ein Maximum, wenn $O - E = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$, und umgekehrt im ordentlichen Bilde ein Maximum und im ausserordentlichen ein Minimum, wenn $O - E = 2n\frac{\lambda}{2}$. Ist $\sin 2i \sin 2(i - s)$ negativ, so verhält es sich umgekehrt. Die Wegdifferenz $O - E$ hängt nun zwar von der Wellenlänge ab; ist jedoch, wie dies bei den meisten bekannten doppeltbrechenden Krystallen zutrifft, die Dispersion sehr schwach im Vergleiche mit der Brechung, so kann man ohne merklichen Fehler $O - E$ als von der Wellenlänge unabhängig annehmen, und gleich

$$O - E = m\varepsilon$$

setzen, wo m eine Constante und ε die Dicke der Krystallplatte ist. Ist nun die Krystallplatte dick, d. h. ist in dem Ausdrucke

$$O - E = 2n\frac{\lambda}{2}$$

n eine grosse Zahl, so hat man für eine sehr nahe benachbarte Farbe

$$O - E = (2n + 1)\frac{\lambda'}{2}.$$

Ist also die Krystallplatte dick, so genügt eine sehr geringe Aenderung in der Wellenlänge, um in einem der Bilder die Intensität von einem Maximum zu einem Minimum zu führen oder umgekehrt. Es folgt, wie bei den Interferenzerscheinungen, dass die Bilder weiss erscheinen müssen. Zerlegt man jedoch das Licht nach dem Vorgange von Fizeau und Foucault, so erhält man ein von dunklen Linien durchzogenes Spectrum.

Bei den Newton'schen Farbenringen hat man für ein Maximum der Helligkeit

$$2e = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$$

oder

$$2e = 2n\frac{\lambda}{2},$$

je nachdem die Ringe im reflectirten oder durchgelassenen Lichte entstehen. Vernachlässigt man also die Dispersion im Vergleiche mit der Doppelbrechung und setzt demgemäss

$$O - E = m\varepsilon,$$

so ergiebt sich für das ordentliche Bild: Ist $\sin 2i \sin 2(i - s)$ positiv oder negativ, so sind die den Maximis der Helligkeit einer bestimmten Farbe entsprechenden Dicken der Krystallplatte proportional den Dicken der Newton'schen Luftlamelle, welche im durchgelassenen oder reflectirten Lichte den Maximis der Helligkeit derselben Farbe entsprechen. Aehnliches ergiebt sich für das ausserordentliche Bild. Lässt man die Dicke der Krystallplatte zunehmen, so verändern sich bei Anwendung weissen Lichtes die Farben der beiden Bilder nach denselben Gesetzen wie die Newton'schen Farben, d. h. die Dicken der Krystallplatte, welche irgend welchen Farben entsprechen, sind proportional den Dicken der Newton'schen Luftlamelle, welchen dieselben Farben im reflectirten oder durchgelassenen Lichte entsprechen. Ist $\sin 2i \sin 2(i - s)$ positiv, so entsprechen die Farben des ordentlichen Bildes den durchgelassenen, und die des ausserordentlichen den reflectirten Newton'schen Farben. Ist $\sin i \sin 2(i - s)$ negativ, so verhält es sich umgekehrt.

Ist $\sin i \sin 2(i - s)$ positiv, und stimmt die Farbe des ordentlichen Bildes mit der Farbe des durchgehenden Lichtes einer Luftlamelle überein, so hat man

$$2e = O - E.$$

Man findet so das von Young aufgestellte Gesetz wieder, welches der Ausgangspunkt der Studien über die chromatische Polarisation gewesen war.

245. Wirkung einer dicken Krystallplatte.

Geht polarisirtes Licht durch eine dicke Krystallplatte, so zeigt sich im Analyseur keinerlei Färbung, hingegen zeigt das aus der Krystallplatte tretende Licht je nach der Grösse des Winkels i Eigenschaften des natürlichen oder des partiell polarisirten Lichtes.

Ist die Krystallplatte dick, so wandert der Factor $sin^2 \pi \frac{O-E}{\lambda}$ schon innerhalb eines sehr enge begrenzten Theiles des Spectrums durch alle Werthe zwischen 0 und 1. Wir setzen daher für diesen Theil des Spectrums

$$sin^2 \pi \frac{O-E}{\lambda} = \frac{1}{2}.$$

Da ferner dasselbe von allen ebenso begrenzten Theilen des Spectrums gilt, schreiben wir die Gleichungen für die Intensitäten:

$$\omega^2 = cos^2 s - \frac{1}{2} sin\, 2i\, sin\, 2\,(i-s)$$

$$\varepsilon^2 = sin^2 s + \frac{1}{2} sin\, 2i\, sin\, 2\,(i-s).$$

Ist $i = 45^0$, so hat man

$$\omega^2 = cos^2 s - \frac{1}{2} cos\, 2s = \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon^2 = sin^2 s + \frac{1}{2} cos\, 2s = \frac{1}{2}.$$

In diesem Falle sind also die Helligkeiten der beiden Bilder unabhängig von s und je der halben Helligkeit des einfallenden Lichtbündels gleich. Das aus der Krystallplatte tretende Licht zeigt also die charakteristische Eigenschaft des natürlichen Lichtes, im Analyseur zwei Bilder zu geben, deren Helligkeiten von der Orientation des Hauptschnittes des Analyseurs unabhängig sind. Um das so erhaltene Licht gleichwohl von dem natürlichen Lichte zu unterscheiden, muss man die spectrale Auflösung anwenden.

Ist i von 45^0 verschieden, so können die Ausdrücke für ω^2 und ε^2 auf die Form gebracht werden:

$$\omega^2 = cos^2 i\, cos^2 (i-s) + sin^2 i\, sin^2 (i-s)$$

$$\varepsilon^2 = cos^2 i\, sin^2 (i-s) + sin^2 i\, cos^2 (i-s).$$

Man sieht, dass die Intensitäten der beiden Bilder mit dem Winkel s variiren, und dass diese Intensitäten niemals der Null gleich werden. Das Licht, welches die Krystallplatte verlässt, zeigt also die charakteristische Eigenschaft des partiell polarisirten Lichtes. Die Polarisationsebene des aus der Krystallplatte tretenden Lichtes ist parallel oder senkrecht zum Hauptschnitte der Krystallplatte, je nachdem $cos^2 i > sin^2 i$ oder $cos^2 i < sin^2 i$, also je nachdem der Winkel i kleiner oder grösser ist, als 45^0. Das auf den Analyseur fallende Lichtbündel kann als bestehend angesehen werden aus einem Antheile gleich $cos^2 i - sin^2 i$ polarisirten Lichtes, und einem solchen gleich $2\, sin^2 i$ natürlichen Lichtes. Man kann in dieser Art partiell polarisirtes Licht von

bekannter Zusammensetzung erhalten, und man kann hiervon bei der Graduirung der Polarimeter Gebrauch machen.

246. Combination zweier Krystallplatten.

Wir wollen nun den Fall betrachten, wo das Licht nach einander durch zwei Krystallplatten tritt, ehe es durch den Analyseur geht. Bezeichnen wir mit s den Winkel der ursprünglichen Polarisationsebene mit dem Hauptschnitte des Analyseurs, durch i den Winkel der ursprünglichen Polarisationsebene mit dem Hauptschnitte der ersten Krystallplatte und schliesslich durch a den Winkel, welchen die Hauptschnitte der beiden Krystallplatten unter einander bilden. In Fig. 20, deren Ebene senkrecht zur Richtung der einfallenden Strahlen gedacht ist, bedeuten PP' die ursprüngliche Polarisationsebene, II' und JJ' die Hauptschnitte der ersten und zweiten Krystallplatte, SS' den Hauptschnitt des Analyseurs.

Fig. 20.

Beim Austritte aus der ersten Platte ist die Bewegung des ordentlichen Strahles, welche längs O_i vor sich geht, gegeben durch

$$\cos i \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O}{\lambda}\right),$$

und jene des ausserordentlichen Strahles, welche längs OI vor sich geht, durch

$$-\sin i \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{E}{\lambda}\right).$$

Bezeichnet man durch O' und E' dasselbe für die zweite Platte, was O und E für die erste bedeuten, so sieht man, dass beim Austritte aus der zweiten Platte der ordentliche Strahl, welcher längs O_j schwingt, gegeben ist durch

$$\cos i \cos a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O + O'}{\lambda}\right) - \sin a \sin i \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{E + O'}{\lambda}\right),$$

und der ausserordentliche Strahl, welcher längs OJ schwingt, durch

$$\sin i \cos a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{E + E'}{\lambda}\right) + \cos i \sin a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O + E'}{\lambda}\right).$$

Schliesslich ist im Analyseur die Bewegung des ordentlichen Strahles, welche längs O_s vor sich geht, gegeben durch

$$\cos i \cos a \cos(a + i - s) \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{O + O'}{\lambda}\right)$$
$$- \sin i \sin a \cos(a + i - s) \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{E + O'}{\lambda}\right)$$
$$+ \sin i \cos a \sin(a + i - s) \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{E + E'}{\lambda}\right)$$
$$+ \cos i \sin a \sin(a + i - s) \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{O + E'}{\lambda}\right).$$

Man findet hieraus für die Intensität ω^2 des ordentlichen Strahles:

$$\omega^2 = \Big[\cos i \cos a \cos(a + i - s) \cos 2\pi \frac{O + O'}{\lambda}$$
$$- \sin i \sin a \cos(a + i - s) \cos 2\pi \frac{E + O'}{\lambda}$$
$$+ \sin i \cos a \sin(a + i - s) \cos 2\pi \frac{E + E'}{\lambda}$$
$$+ \cos i \sin a \sin(a + i - s) \cos 2\pi \frac{O + E'}{\lambda}\Big]^2$$
$$+ \Big[\cos i \cos a \cos(a + i - s) \sin 2\pi \frac{O + O'}{\lambda}$$
$$- \sin i \sin a \cos(a + i - s) \sin 2\pi \frac{E + O'}{\lambda}$$
$$+ \sin i \cos a \sin(a + i - s) \sin 2\pi \frac{E + E'}{\lambda}$$
$$+ \cos i \sin a \sin(a + i - s) \sin 2\pi \frac{O + E'}{\lambda}\Big]^2.$$

Ferner nach leichter Umformung:

$$\omega^2 = \cos^2 s + \sin 2i \sin 2a \cos 2(a + i - s) \sin^2 \pi \frac{O - E}{\lambda}$$
$$- \cos 2i \sin 2a \sin 2(a + i - s) \sin^2 \pi \frac{O' - E'}{\lambda}$$
$$- \sin 2i \cos^2 a \sin 2(a + i - s) \sin^2 \pi \frac{O - E + O' - E'}{\lambda}$$
$$+ \sin 2i \sin^2 a \sin 2(a + i - s) \sin^2 \pi \frac{O - E - (O' - E')}{\lambda}.$$

Die Intensität des ausserordentlichen Strahles ergiebt sich daraus, dass stets

$$\omega^2 + \varepsilon^2 = 1,$$

also

$$\varepsilon^2 = \sin^2 s. - \sin 2i \sin 2a \cos^2 (a + i - s) \sin^2 \pi \frac{O - E}{\lambda}$$

$$+ \cos 2i \sin 2a \sin 2 (a + i - s) \sin^2 \pi \frac{O' - E'}{\lambda}$$

$$+ \sin 2i \cos^2 a \sin 2 (a + i - s) \sin^2 \pi \frac{O - E + O' - E'}{\lambda}$$

$$- \sin 2i \sin^2 a \sin 2 (a + i - s) \sin^2 \pi \frac{O - E - (O' - E')}{\lambda}.$$

Diese Ausdrücke für ω^2 und ε^2 zeigen, dass die Färbungen der Bilder im Analyseur von i, a und s abhängen, d. i. sich verändern, wenn der Analyseur oder eine der beiden Krystallplatten gedreht wird, und ferner, dass die Wirkung einer solchen Doppelplatte im Allgemeinen keineswegs der Wirkung einer einfachen Krystallplatte äquivalent ist.

Sind die Hauptschnitte der beiden Platten parallel, so hat man

$$a = 0$$

und

$$\omega^2 = \cos^2 s - \sin 2i \sin 2 (i - s) \sin^2 \pi \frac{O - E + O' - E'}{\lambda}$$

$$\varepsilon^2 = \sin^2 s + \sin 2i \sin 2 (i - s) \sin^2 \pi \frac{O - E + O' - E'}{\lambda}.$$

Sind die Hauptschnitte rechtwinkelig gekreuzt, so hat man

$$a = \frac{\pi}{2}$$

und

$$\omega^2 = \cos^2 s - \sin 2i \sin 2 (i - s) \sin^2 \pi \frac{O - E - (O' - E')}{\lambda}$$

$$\varepsilon^2 = \sin^2 s + \sin 2i \sin 2 (i - s) \sin^2 \pi \frac{O - E - (O' - E')}{\lambda}.$$

Man sieht, dass in diesen beiden besonderen Fällen die Wirkung der Doppelplatte allerdings der Wirkung einer einzigen Platte äquivalent ist. Sind die Hauptschnitte parallel, so ist die Hinzufügung einer zweiten Platte äquivalent einer Vermehrung oder Verminderung der Dicke der ersten Platte, je nachdem die beiden Krystalle gleichen Zeichens sind, d. h. beide attractiv oder beide repulsiv, oder ungleichen Zeichens. Sind die Hauptschnitte senkrecht gekreuzt, so ist die Hinzufügung der zweiten Platte einer Verminderung der Dicke der ersten Platte äquivalent, wenn die beiden Platten gleichen Zeichens sind, einer Vermehrung, wenn ungleichen Zeichens.

Es ergiebt sich hieraus ein einfaches Mittel zu erkennen, ob ein Krystall attractiv oder repulsiv ist. Man schneide aus dem Krystalle eine Platte, bemerke die Farben, welche dieselbe im polarisirten Lichte zeigt, lege sodann auf dieselbe eine zweite Platte von bekanntem Zeichen

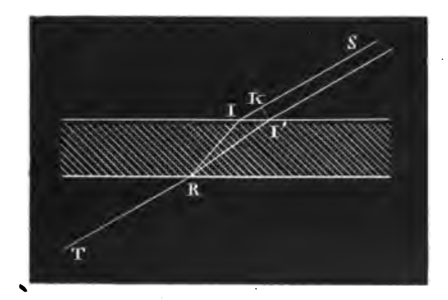
so, dass die Hauptschnitte parallel liegen, und beobachte, ob hierdurch die Farben in der Newton'schen Farbenfolge höher oder tiefer gerückt sind. Im ersteren Falle haben die beiden Krystalle gleiches Zeichen, im letzteren ungleiches.

Sind die Hauptschnitte der beiden Platten parallel, so sind die Erscheinungen von der Aufeinanderfolge der beiden Platten unabhängig. Allein im allgemeinen Falle trifft dies nicht zu; ändert man die Aufeinanderfolge der Platten, so muss man in den Formeln i ersetzen durch $a + i$ und a durch $- a$, wodurch ω^2 und ε^2 ihre Werthe ändern.

247. Schiefe Incidenz.

Die Theorie, mittelst welcher wir die Färbungen der Bilder im Falle der senkrechten Incidenz erklärt haben, lässt sich auf den Fall der schiefen Incidenz übertragen, wenn auch hier die einfallenden Strahlen als unter einander parallel vorausgesetzt werden. Die einzige Schwierigkeit, welche sich zeigt, besteht in der Berechnung der Grösse $O - E$. Diese Grösse ist die Wegdifferenz bezogen auf Luft eines ordentlichen und eines ausserordentlichen Strahles, welche sich nach dem Austritte aus der Krystallplatte längs ein und derselben Geraden fortpflanzen. Diese Wegdifferenz rührt jetzt nicht mehr allein von den ungleichen Wegen und Geschwindigkeiten der beiden Strahlen im Krystalle her, sondern auch von der Ungleichheit der in der Luft vor dem Eintritte in die Krystallplatte zurückgelegten Wege. Längs einer Geraden RT (Fig. 21) parallel den einfallenden Strahlen pflanzen sich zwei Strahlen fort, ein ordentlich gebrochener IR, und ein ausserordentlich gebrochener $I'R$, entsprechend den beiden einfallenden Strahlen SI und SI'. Fällt man von I' eine Senkrechte $I'K$ auf SI, nimmt die Geschwindigkeit des Lichtes in der Luft zur Einheit und bezeichnet durch v und v' die Geschwindigkeit des ordentlichen Strahles längs IR und die des ausserordentlichen Strahles längs $I'R$, so hat man für die Wegdifferenz bezogen auf Luft der beiden sich längs RT fortpflanzenden Strahlen

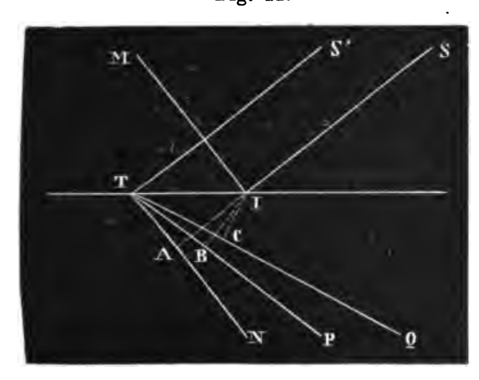
Fig. 21.



$$O - E = IK + \frac{IR}{v} - \frac{I'R}{v'}.$$

Um die weitere Rechnung zu vereinfachen, betrachten wir statt der Fortpflanzung der Strahlen jene der ebenen Wellen. Dem einfallenden Strahlenbündel entspricht eine ebene Welle senkrecht zu den Strahlen; diese Welle giebt zwei gebrochene Wellen, eine ordentlich und eine ausserordentlich gebrochene, welche nach ihrem Austritte aus der Krystallplatte wieder unter einander parallel und senkrecht zu den austretenden Strahlen werden. Die Wegdifferenz der beiden austretenden Wellen, welche von einer einzigen einfallenden Welle herrühren, ist offenbar gleich der Wegdifferenz $O - E$ der beiden austretenden, sich längs RT fortpflanzenden Strahlen. Seien SI (Fig. 22) ein einfallender Strahl und IM die durch I gehende einfallende Welle. Am Ende einer Zeiteinheit nimmt die einfallende Welle die Lage NT ein, die ordentlich gebrochene Welle die Lage PT und die ausserordentlich gebrochene Welle die Lage QT. Aus der Huyghens'schen Construction geht hervor, dass diese drei Wellen sich in einer durch T gehenden und in der Trennungsebene liegenden Geraden schneiden. Fällt man also von I drei Senkrechte auf die drei Wellen, so liegen diese Senkrechten IA, IB, IC in einer einzigen Ebene. IA ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in Luft, IB und IC sind die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Normalen der ordentlichen und der ausserordentlichen Welle im Krystalle, welche Geschwindigkeiten wir durch u und u' bezeichnen wollen. Sind I der Incidenzwinkel, R und R' die Winkel der Normalen der ordentlich und der ausserordentlich gebrochenen Welle mit dem Einfallslothe, so hat man

Fig. 22.



$$IT = \frac{1}{\sin I} = \frac{u}{\sin R} = \frac{u'}{\sin R'},$$

also

$$\left.\begin{aligned} \sin R &= u \sin I \\ \sin R' &= u' \sin I \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

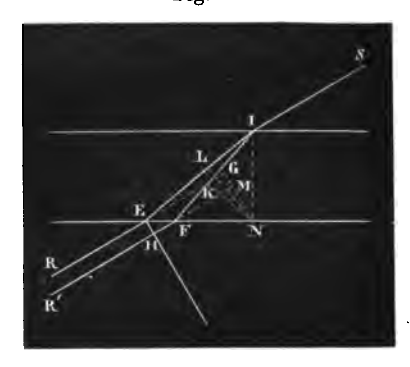
Seien nun, (Fig. 23 a. f. S.), IF und IE die gebrochenen Wellennormalen. Die Wegdifferenz, bezogen auf Luft der beiden Wellen von jener Lage, in welcher sie durch I gehen, bis zur Lage EH, ist

$$O - E = \frac{IF}{u} + FH - \frac{IE}{u'}.$$

Ziehen wir noch die in Fig. 23 angedeuteten Linien, so wird

$$O - E = \frac{IK + KF}{u} + FH - \frac{IL + LE}{u'}.$$

Fig. 23.



Betrachtet man EH als einfallende Welle, so erhält man

$$\frac{EL}{u'} = EG = FH + FM$$

$$FM = \frac{FK}{\omega}.$$

Hieraus folgt

$$O - E = \frac{IK}{u} - \frac{IL}{u'}.$$

Ist ε die Dicke der Krystallplatte, so hat man also

$$O - E = \varepsilon \left(\frac{\cos R}{u} - \frac{\cos R'}{u'} \right),$$

oder mit Rücksicht auf (1)

$$O - E = \varepsilon \sin I (\cot R - \cot R') \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

wo I der Incidenzwinkel, R und R' die Winkel der ordentlichen und ausserordentlichen Wellennormale mit dem Einfallslothe im Krystalle sind.

248. Wegdifferenz in den einachsigen Krystallen.

Für die einachsigen Krystalle wird die Gleichung der Wellenfläche

$$(x^2 + y^2 + z^2 - b^2)\,(a^2 x^2 + b^2\,[y^2 + z^2] - a^2 b^2) = 0.$$

Die Geschwindigkeit der ordentlichen Welle ist b, und man hat

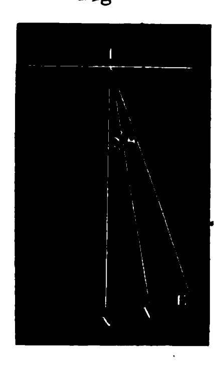
$$\sin R = b \sin I.$$

Andererseits erhält man, wenn θ der Winkel der Achse des Krystalls mit dem Einfallslothe, und u' die normale Fortpflanzungsgeschwindigkeit der ausserordentlichen Welle sind, mittelst der Gleichung der Elasticitätsfläche (154):

$$u'^2 = a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \theta.$$

In Fig. 24 stellt IN das Einfallsloth dar, IA die Achse des Krystalls, IE die Normale der ausserordentlichen Welle. Wir haben, wenn wir durch ω den Winkel der Ebenen NIA, NIE, und durch δ den Winkel NIA des Einfallslothes mit der Achse bezeichnen,

Fig. 24.



$$\cos \theta = \cos \delta \cos R' + \sin \delta \sin R' \cos \omega.$$

Demnach ist:

$$\left.\begin{aligned} O - E &= \varepsilon \sin I (\cot R - \cot R') \\ \sin R &= b \sin I \\ \sin R' &= u' \sin I \\ u'^2 &= a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \theta \\ \cos \theta &= \cos \delta \cos R' + \sin \delta \sin R' \cos \omega \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Aus diesen Gleichungen kann man R, R', u', θ eliminiren, und erhält $O - E$ als Function von ε, I, δ, ω.

249. Platte senkrecht zur Achse geschnitten.

Wir gehen nun auf einige besondere Fälle ein und nehmen zuerst an, die Achse des Krystalls stehe auf den Begrenzungsflächen der Platte senkrecht. Nun ist $\delta = 0$, und wir erhalten aus (3):

$$\cos \theta = \cos R'$$

$$\theta = R'$$

$$u'^2 = a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 R' = \frac{\sin^2 R'}{\sin^2 I}$$

$$\cot R' = \sqrt{\frac{1 - a^2 \sin^2 I}{b \sin I}}$$

$$\cot R = \sqrt{\frac{1 - b^2 \sin^2 I}{b \sin I}}$$

und schliesslich

$$O - E = \frac{\varepsilon}{b} \left(\sqrt{1 - b^2 \sin^2 I} - \sqrt{1 - a^2 \sin^2 I} \right).$$

Man sieht, die Wegdifferenz ist positiv oder negativ, je nachdem $b < a$ oder $b > a$, d. i. je nachdem der Krystall repulsiv oder attractiv ist.

Wir bringen den Ausdruck für die Wegdifferenz auf die Form

$$O - E = \frac{\varepsilon}{b} \frac{(a^2 - b^2) \sin^2 I}{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 I} + \sqrt{1 - a^2 \sin^2 I}}$$

und ersehen, dass die Wegdifferenz ihrem absoluten Werthe nach mit dem Incidenzwinkel wächst, sowie, dass sie bei normaler Incidenz Null ist.

250. Platte parallel zur Achse geschnitten.

Bei einer der Achse parallelen Platte hat man zu unterscheiden, ob die Einfallsebene der Achse parallel ist, auf ihr senkrecht steht oder eine andere Lage hat.

1. Die Einfallsebene ist der Achse parallel.

Man hat

$$\delta = \frac{\pi}{2}, \quad \omega = 0.$$

Aus (3) erhält man

$$\cos\theta = \sin R'$$

$$u'^2 = a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 R' = \frac{\sin^2 R'}{\sin^2 I}$$

$$\sin^2 R' = \frac{a^2 \sin^2 I}{1 + (a^2 - b^2) \sin^2 I}$$

$$\cot R' = \frac{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 I}}{a \sin I}$$

und

$$O - E = \varepsilon \sqrt{1 - b^2 \sin^2 I} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right).$$

Man sieht, dass die Wegdifferenz positiv oder negativ ist, je nachdem der Krystall repulsiv oder attractiv ist, und dass der absolute Werth der Wegdifferenz mit wachsendem Incidenzwinkel abnimmt. Lässt man also den Incidenzwinkel von Null an wachsen, so ist die Wirkung äquivalent einer Verringerung der Plattendicke, es erfolgt ein Zurückgehen der Bilder in der Farbenfolge.

2. Die Einfallsebene ist senkrecht zur Achse.

Man hat:

$$\delta = \frac{\pi}{2}, \quad \omega = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\theta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$u' = a \quad \sin R' = a \sin I \quad \cot R' = \frac{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 I}}{a \sin I}$$

und

$$O - E = \frac{\varepsilon}{a b}\left(a\sqrt{1 - b^2 \sin^2 I} - b\sqrt{1 - a^2 \sin^2 I}\right).$$

Dieser Ausdruck ist positiv oder negativ, je nachdem der Krystall repulsiv oder attractiv ist. Bringt man denselben auf die Form

$$O - E = \frac{\varepsilon}{ab}\,\frac{a^2 - b^2}{a\sqrt{1 - b^2 \sin^2 I} + b\sqrt{1 - a^2 \sin^2 I}},$$

so sieht man, dass sein absoluter Werth zunimmt, wenn der Incidenzwinkel zunimmt. Lässt man also den Incidenzwinkel von Null an wachsen, so entspricht die Wirkung einer wachsenden Plattendicke und einem Ansteigen der Bilder in der Farbenfolge. Man findet so das von Biot experimentell gefundene Gesetz wieder, nach welchem eine Neigung der Platte die Bilder in der Farbenfolge ansteigen oder absteigen lässt, je nachdem die Drehung der Platte um eine zur Achse des Krystalls parallele oder senkrechte Gerade stattfindet.

3. Die Einfallsebene hat eine beliebige Lage.

In diesem Falle ist immer noch $\delta = 90^0$, allein ω ist beliebig. Man hat also

$$\cos\theta = \sin R' \cos\omega$$

$$u'^2 = a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2 R' \cos^2\omega = \frac{\sin^2 R'}{\sin^2 I}$$

$$\sin^2 R' = \frac{a^2 \sin^2 I}{1 + (a^2 - b^2)\sin^2 I \cos^2\omega}$$

$$\cot R' = \frac{\sqrt{1 + (a^2 - b^2)\sin^2 I \cos^2\omega - a^2 \sin^2 I}}{a \sin I}$$

und

$$O - E = \varepsilon\left[\frac{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 I}}{b} - \frac{\sqrt{1 - (a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega)\sin^2 I}}{a}\right].$$

Wie dieser Ausdruck sich mit I verändert, kann nicht im Allgemeinen angegeben werden. Setzt man jedoch den Differentialquotienten der Wegdifferenz in Bezug auf den Incidenzwinkel der Null gleich, so erhält man:

$$\sin I \cos I \left[\frac{a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega}{a\sqrt{1-(a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega)\sin^2 I}} + \frac{b}{\sqrt{1-b^2 \sin^2 I}}\right] = 0.$$

Für einen gegebenen Werth von ω giebt es also stets einen von 0 und $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Werth des Incidenzwinkels, für welchen eine kleine Variation der Incidenz die Farben der Bilder nicht merklich ändert.

Für kleine Incidenzwinkel hat man näherungsweise

$$O - E = \frac{\varepsilon}{ab}\left[a - b + \frac{1}{2}\sin^2 I[b(a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega - ab^2]\right]$$

$$= \frac{\varepsilon}{ab}\left[a - b + \frac{b \sin^2 I}{2}[(a^2 - b^2)\sin^2 \omega + b^2 - ab]\right]$$

$$= \varepsilon\,\frac{a-b}{ab}\left[1 + \frac{b \sin^2 I}{2}[(a+b)\sin^2 \omega - b]\right]$$

$$= \varepsilon\,\frac{a-b}{ab}\left[1 + \frac{b \sin^2 I}{2}(a \sin^2 \omega - b \cos^2 \omega)\right].$$

Ist also

$$\tang^2 \omega = \frac{b}{a},$$

so sind die Farben der Bilder für kleine Incidenzwinkel von der Grösse dieses Winkels unabhängig.

251. Eine beliebige Platte.

Im allgemeinen Falle vereinfachen sich die Gleichungen (3) nicht und man hat

$$\sin^2 R' = \sin^2 I\,[a^2 - (a^2 - b^2)(\cos\delta \cos R' + \sin\delta \sin R' \cos\omega)^2],$$

woraus

$$\frac{1}{1+\cot^2 R'} = \sin^2 I\left[a^2 - \frac{(a^2-b^2)(\cos\delta \cot R' + \sin\delta\cos\omega)^2}{1+\cot^2 R'}\right]$$

und

$$\cot^2 R' \sin^2 I\,(a^2 \sin^2 \delta + b^2 \cos^2 \delta)$$
$$- 2\cot R' \sin^2 I\,(a^2 - b^2)\sin\delta\cos\delta\cos\omega$$
$$+ \sin^2 I\,[a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2\delta\cos^2\omega] - 1 = 0.$$

Diese Gleichung giebt zwei Werthe für $\cot R' \sin I$. Man sieht leicht, dass diese beiden Werthe reell sind und entgegengesetzte Vorzeichen haben. In der That ist das Glied, welches die Unbekannte

nicht enthält, stets negativ, wenigstens wenn das äussere Mittel das minder brechende ist. Hat man nämlich $b < a$, so wird

$$a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \delta \cos^2 \omega < a^2 < 1,$$

und ist $b > a$, so wird

$$a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \delta \cos^2 \omega < a^2 - (a^2 - b^2) < 1;$$

es ist also

$$\sin^2 I \, [a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \delta \cos^2 \omega] - 1$$

stets negativ.

Da R' und I stets kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind, muss $\cot R' \sin I$ positiv sein, und man hat folglich bei der Auflösung der obigen Gleichung zweiten Grades die Wurzel mit dem positiven Vorzeichen zu nehmen.

Man findet so den Werth von $\cot R' \sin I$ und hat andererseits

$$\cot R \sin I = \frac{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 I}}{b}.$$

Setzt man diese Werthe in die erste der Gleichungen (3), so erhält man die Wegdifferenz $O - E$ als Function von I, ε und δ.

252. Allgemeine Formeln.

Auch für die zweiachsigen Krystalle hat man, wenn $O - E$ die Wegdifferenz der beiden gebrochenen Wellen, R', R'' die Winkel der beiden gebrochenen Wellenanomalen mit dem Einfallslothe sind,

$$O - E = \varepsilon \, (\cot R' \sin I - \cot R'' \sin I) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die Geschwindigkeiten u', u'' entsprechen immer noch den Gleichungen

$$\sin R' = u' \sin I \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\sin R'' = u'' \sin I \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und werden in diesem Falle (155) durch Auflösung der Gleichung

$$\frac{\cos^2 l}{u^2 - a^2} + \frac{\cos^2 m}{u^2 - b^2} + \frac{\cos^2 n}{u^2 - c^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

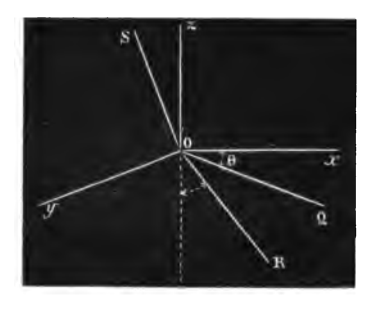
erhalten, in welcher l, m, n die Winkel der gebrochenen Wellennormale mit den Elasticitätsachsen des Mittels sind.

Wir werden uns im Folgenden auf die Betrachtung einiger specieller Fälle beschränken, und hierbei stets voraussetzen, dass $a > b > c$ und ferner, dass a, b, c stets kleiner als Eins, oder dass das äussere Mittel das minder brechende sei.

253. Platte senkrecht zur Achse der kleinsten Elasticität.

Falle die Normale der Platte auf die z-Achse, und sei θ der Winkel der Einfallsebene, welche stets die gebrochene Wellennormale enthält, mit der xz-Ebene, welche die Achse der grössten und der kleinsten Elasticität enthält, R der Winkel der gebrochenen Wellennormale mit der z-Achse.

Fig. 25.



Aus Fig. 25 ergiebt sich:

$$\cos l = \cos R\,O\,x = \sin R \cos\theta$$
$$\cos m = \cos R\,O\,y = \sin R \sin\theta$$
$$\cos n = \cos R,$$

so dass

$$\cos l = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\cot^2 R}},$$

$$\cos m = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1+\cot^2 R}}, \qquad \cos n = \frac{\cot R}{\sqrt{1+\cot^2 R}}.$$

Die Gleichung

$$u \sin I = \sin R$$

kann auf die Form

$$u = \frac{1}{\sin I\sqrt{1+\cot^2 R}}$$

gebracht werden.

Setzt man die für u, l, m, n gefundenen Werthe nach (4), so erhält man

$$\frac{1}{\sin^4 I(1+\cot^2 R)^2} - \frac{1}{\sin^2 I(1+\cot^2 R)}\left[\frac{(b^2+c^2)\cos^2\theta+(a^2+c^2)\sin^2\theta+(a^2+b^2)\cot^2 R}{1+\cot^2 R}\right.$$
$$\left. + \frac{b^2c^2\cos^2\theta+a^2c^2\sin^2\theta+a^2b^2\cot^2 R}{1+\cot^2 R}\right] = 0,$$

oder wenn man nach $\cot R$ ordnet,

$$a^2b^2\sin^4 I\cot^4 R + \sin^2 I\cot^2 R[\sin^2 I(a^2b^2 + b^2c^2\cos^2\theta$$
$$+ a^2c^2\sin^2\theta) - (a^2+b^2)]$$
$$+ \sin^4 I(b^2c^2\cos^2\theta + a^2c^2\sin^2\theta)$$
$$- \sin^2 I[(b^2+c^2)\cos^2\theta + (a^2+c^2)\sin^2\theta] + 1 = 0.$$

Bemerkt man ferner, dass

$$a^2b^2 + b^2c^2\cos^2\theta + a^2c^2\sin^2\theta = a^2b^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$
$$+ b^2c^2\cos^2\theta + a^2c^2\sin^2\theta$$
$$= a^2(b^2+c^2)\sin^2\theta + b^2(a^2+c^2)\cos^2\theta,$$

so erhält man schliesslich

$$\left.\begin{array}{l} a^2 b^2 \cot^4 R \sin^4 I \\ + \cot^2 R \sin^2 I \{\sin^2 I [a^2(b^2+c^2)\sin^2\theta + b^2(a^2+c^2)\cos^2\theta] - (a^2+b^2)\} \\ \quad + \sin^4 I (b^2 c^2 \cos^2\theta + a^2 c^2 \sin^2\theta) \\ \quad - \sin^2 I [(b^2+c^2)\cos^2\theta + (a^2+c^2)\sin^2\theta] + 1 = 0 \end{array}\right\} \quad (5)$$

Diese Gleichung giebt für $\cot^2 R \sin^2 I$ zwei Wurzeln, welche, wie wir zeigen wollen, reell und positiv sind.

In der That, lösen wir die Gleichung (5) auf, so ergiebt sich für die Grösse unter dem Wurzelzeichen

$$\begin{array}{l} \{\sin^2 I [a^2(b^2+c^2)\sin^2\theta + b^2(a^2+c^2)\cos^2\theta] - (a^2+b^2)\}^2 \\ \quad - 4a^2b^2\{1 - \sin^2 I[(b^2+c^2)\cos^2\theta + (a^2+c^2)\sin^2\theta] \\ \quad + \sin^4 I (b^2c^2\cos^2\theta + a^2c^2\sin^2\theta)\}, \end{array}$$

oder nach $\sin I$ geordnet,

$$\begin{array}{l} \sin^4 I\{[a^2(b^2+c^2)\sin^2\theta + b^2(a^2+c^2)\cos^2\theta]^2 \\ \qquad - 4a^2b^2(b^2c^2\cos^2\theta + a^2c^2\sin^2\theta)\} \\ \quad - 2\sin^2 I\{(a^2+b^2)[b^2(a^2+c^2)\cos^2\theta + a^2(b^2+c^2)\sin^2\theta] \\ \qquad - 2a^2b^2[(b^2+c^2)\cos^2\theta + (a^2+c^2)\sin^2\theta]\} \\ \quad + (a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2. \end{array}$$

Der Coefficient von $\sin^4 I$ ist gleich

$$b^4(a^2-c^2)\cos^4\theta + a^4(b^2-c^2)\sin^4\theta + 2a^2b^2(a^2-c^2)(b^2-c^2)\sin^2\theta\cos^2\theta,$$

oder

$$[b^2(a^2-c^2)\cos^2\theta + a^2(b^2-c^2)\sin^2\theta]^2;$$

der Coefficient von $\sin^2 I$ kann auf die Form

$$(a^2-b^2)[b^2(a^2-c^2)\cos^2\theta - a^2(b^2-c^2)\sin^2\theta]$$

gebracht werden, oder auf die Form

$$(a^2-b^2)[b^2(a^2-c^2)\cos^2\theta + a^2(b^2-c^2)\sin^2\theta] - 2a^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)\sin^2\theta.$$

Schliesslich ist das dritte Glied gleich

$$(a^2-b^2)^2.$$

Demnach nimmt der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen die Form

$$\begin{array}{l} \{a^2 - b^2 - \sin^2 I[b^2(a^2-c^2)\cos^2\theta + a^2(b^2-c^2)\sin^2\theta]\}^2 \\ \quad + 4a^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)\sin^2\theta\sin^2 I, \end{array}$$

an und ist eine wesentlich positive Grösse. Die beiden Wurzeln der Gleichung (5) sind also stets reell.

Der von der Unbekannten freie Theil der linken Seite der Gleichung (5) ist positiv, denn man hat

$$1 - \sin^2 I[(b^2 + c^2)\cos^2\theta + (a^2 + c^2)\sin^2\theta]$$
$$+ \sin^4 I(b^2 c^2 \cos^2\theta + a^2 c^2 \sin^2\theta)$$
$$= (1 - c^2 \sin^2 I)[1 - \sin^2 I(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)]$$
$$= (1 - c^2\sin^2 I)\{1 - \sin^2 I[a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\theta]\},$$

wo

$$a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\theta < a^2 < 1.$$

Es folgt, dass die beiden Wurzeln der Gleichung (5) dasselbe Vorzeichen haben.

Schliesslich ist der Coefficient von $\cot^2 R \sin^2 I$ negativ, denn er kann auf die Form

$$-\{a^2 + b^2 - \sin^2 I[a^2(b^2 + c^2)\sin^2\theta + b^2(a^2 + c^2)\cos^2\theta]\}$$

gebracht werden, und man hat

$$a^2(b^2 + c^2)\sin^2\theta < a^2(a^2 + b^2)\sin^2\theta$$
$$b^2(a^2 + c^2)\cos^2\theta < a^2(a^2 + b^2)\cos^2\theta,$$

und folglich

$$a^2 + b^2 - \sin^2 I[a^2(b^2 + c^2)\sin^2\theta + b^2(a^2 + c^2)\cos^2\theta]$$
$$> (a^2 + b^2)(1 - a^2\sin^2 I) > 0.$$

Die Wurzeln der Gleichung (5) sind also beide positiv. Zieht man aus diesen beiden Wurzeln die Quadratwurzeln, indem man die letztere positiv nimmt, so hat man zwei Werthe für $\cot R \sin I$, welche für $\cot R' \sin I$ und $\cot R'' \sin I$ nach (1) gesetzt dazu dienen, $O - E$ als Function von I und θ darzustellen.

Die Wegdifferenz ist Null, wenn die beiden Wurzeln der Gleichung (5) unter einander gleich sind, d. i., wenn in der Auflösung der Gleichung (5) die Grösse unter dem Wurzelzeichen der Null gleich ist. Dies ist der Fall, wenn

$$\{a^2 - b^2 - \sin^2 I[b^2(a^2 - c^2)\cos^2\theta + a^2(b^2 - c^2)\sin^2\theta]\}^2$$
$$+ 4a^2(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)\sin^2\theta\sin^2 I = 0,$$

welche Bedingung nur durch

$$\sin\theta = 0$$

erfüllt werden kann. In diesem Falle hat man

$$\sin^2 I = \frac{a^2 - b^2}{b^2(a - c^2)},$$

und folglich

$$\sin^2 R = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}.$$

Es giebt also in der zur Achse der mittleren Elasticität senkrechten Ebene zwei Richtungen von der Beschaffenheit, dass, wenn eine gebrochene Welle auf einer dieser Richtungen senkrecht steht, die zweite gebrochene Welle mit der ersteren zusammenfällt. Diese beiden Rich-

tungen sind nichts Anderes, als die Achsen der inneren conischen Refraction. Wir gelangen so neuerdings zu dem Satze (190), dass bei einer planparallel begrenzten Krystallplatte jene Strahlen, welche im Inneren des Krystalls den Conus bilden, beim Austritte keine Gangunterschiede zeigen.

R ist stets reell, nicht aber I. Wird $\frac{a^2 - b^2}{b^2(a^2 - c^2)}$ grösser als eins, so giebt es keinen Einfallswinkel, für welchen die gebrochene Welle auf einer der Achsen der inneren conischen Refraction senkrecht stände.

Wir wollen nun einige Fälle betrachten, in welchen sich der Ausdruck für die Wegdifferenz besonders vereinfacht. Setzen wir voraus, θ sei der Null gleich, oder die Einfallsebene falle auf die xz-Ebene, welche wir als Hauptschnitt des Krystalls bezeichnen. Man erhält dann durch Auflösung der Gleichung (5)

$$\cot R' \sin I = \frac{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 I}}{b}$$

$$\cot R'' \sin I = \frac{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 I}}{a}.$$

Der erste dieser beiden Ausdrücke ist identisch mit jenem, welchen wir für den ordentlichen Strahl bei einachsigen Krystallen erhalten haben, er entspricht einem nach dem Cartesius'schen Gesetze gebrochenen Strahle vom Brechungsexponenten $\frac{1}{b}$. Dieser Strahl steht senkrecht auf der Achse der mittleren Elasticität, seine Schwingungen sind parallel zu dieser Achse und senkrecht zum Hauptschnitte. Man kann diesen Strahl als einen ordentlich gebrochenen ansehen.

Der Ausdruck für die Wegdifferenz wird in diesem Falle

$$O - E = \varepsilon\left(\frac{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 I}}{b} - \frac{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 I}}{a}\right),$$

und reducirt sich für die senkrechte Incidenz auf

$$O - E = \varepsilon\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right).$$

Dieser letztere Ausdruck ist identisch mit jenem, welchen wir für eine einachsige, parallel der Achse geschnittene Platte gefunden haben. Da überdies $a > b$, so ist $O - E$ positiv, also dass eine zweiachsige, senkrecht zur Achse der kleinsten Elasticität geschnittene Krystallplatte, wenn die Einfallsebene auf der Achse der mittleren Elasticität senkrecht steht, sich für kleine Einfallswinkel so verhält, wie eine einachsige repulsive, parallel der Achse geschnittene Platte.

Wächst der Einfallswinkel, so nimmt die Wegdifferenz ab; sie wird Null für

$$\sin^2 I = \frac{a^2 - b^2}{b^2(a^2 - c^2)};$$

wächst der Incidenzwinkel, welchen wir als reell voraussetzen, über diesen Werth, so ändert die Wegdifferenz das Vorzeichen, und ihr absoluter Werth wächst. Fällt also paralleles Licht auf eine senkrecht zur Achse der kleinsten Elasticität geschnittene zweiachsige Krystallplatte, und enthält die Einfallsebene die Achsen der grössten und der kleinsten Elasticität, so verhält sich die Platte wie eine repulsive oder attractive Platte, je nachdem der Incidenzwinkel kleiner oder grösser ist als jener Incidenzwinkel, welcher der optischen Achse entspricht.

Setzen wir nun voraus, der Winkel θ sei gleich $\frac{\pi}{2}$, oder die Einfallsebene stehe auf dem Hauptschnitte senkrecht und falle zusammen mit der yz-Ebene. Man hat dann

$$\cot R' \sin I = \frac{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 I}}{b}$$

$$\cot R'' \sin I = \frac{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 I}}{a}.$$

Die letzte dieser beiden Gleichungen lässt sich auf die Form

$$\frac{\sin I}{\sin R''} = \frac{1}{a}$$

bringen und entspricht sonach einem ordentlich gebrochenen Strahle. Die Wegdifferenz ist in diesem Falle:

$$O - E = \varepsilon \left(\frac{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 I}}{b} - \frac{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 I}}{a} \right)$$

und reducirt sich für die senkrechte Incidenz auf

$$O - E = \varepsilon \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right).$$

Dieser Ausdruck ist positiv, also dass sich der Krystall in der Nähe der normalen Incidenz wie ein repulsiver Krystall verhält. Andererseits kann man den Ausdruck für die Wegdifferenz auf die Form

$$O - E = \frac{\varepsilon}{a\,b} \frac{a^2 - b^2 + a^2 (b^2 - c^2) \sin^2 I}{a \sqrt{1 - c^2 \sin^2 I} + b \sqrt{1 - a^2 \sin^2 I}}$$

bringen, woraus man ersieht, dass die Wegdifferenz stets positiv bleibt und mit dem Incidenzwinkel wächst. Demnach verhält sich eine senkrecht zur Achse der kleinsten Elasticität geschnittene Krystallplatte für alle Incidenzen wie ein repulsiver Krystall, wenn die Einfallsebene die Achsen der mittleren und der kleinsten Elasticität enthält.

254. Platte senkrecht zur Achse der grössten Elasticität.

Im Falle, wo die Platte auf der Achse der grössten Elasticität senkrecht steht, haben wir einfach in den Formeln, welche sich auf den Fall beziehen, wo die Platte auf der Achse der kleinsten Elasticität senkrecht steht, c für a und a für c zu schreiben. Man findet so wieder zwei Richtungen, für welche die Wegdifferenz Null ist, nämlich wieder die Richtungen der beiden optischen Achsen.

Ist $\theta = 0$, d. h. enthält die Einfallsebene die Achsen der grössten und der kleinsten Elasticität, so hat man

$$O - E = \varepsilon\left(\frac{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 I}}{b} - \frac{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 I}}{c}\right),$$

welcher Ausdruck sich für den Fall der normalen Incidenz auf

$$O - E = \varepsilon\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$$

reducirt.

Da dieser letztere Ausdruck negativ ist, so folgt: Eine Platte senkrecht zur Achse der grössten Elasticität geschnitten, verhält sich, wenn die Einfallsebene die Achsen der kleinsten und der grössten Elasticität enthält, wie ein attractiver Krystall für Incidenzen kleiner als die der optischen Achse entsprechende, und als ein repulsiver für Incidenzen, welche grösser sind.

Ist $\theta = \frac{\pi}{2}$, d. h. enthält die Einfallsebene die Achsen der grössten und der mittleren Elasticität, so hat man

$$O - E = \varepsilon\left(\frac{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 I}}{b} - \frac{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 I}}{c}\right).$$

Dieser Ausdruck ist für alle Incidenzen negativ und wächst mit der Incidenz seinem absoluten Werthe nach. Demgemäss verhält sich eine senkrecht zur Achse der grössten Elasticität geschnittene Krystallplatte, wenn die Einfallsebene die Achsen der mittleren und der grössten Elasticität enthält, stets wie ein attractiver Krystall.

255. Platte senkrecht zur Achse der mittleren Elasticität.

Wir haben in dem nun zu betrachtenden Falle einer senkrecht zur Achse der mittleren Elasticität geschnittenen Krystallplatte in den für eine senkrecht zur Achse der kleinsten Elasticität geschnittene Platte gefundenen Formeln c für b und b für c zu setzen.

Soll die Wegdifferenz gleich Null sein, so muss

$$c \sin I = \sin R = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}}.$$

Da aber $a^2 - c^2 > a^2 - b^2$, ist R imaginär, und es giebt folglich keine Richtung, für welche die Wegdifferenz Null wäre.

Ist $\theta = 0$, d. h. enthält die Einfallsebene die Achsen der mittleren und grössten Elasticität, so hat man

$$O - E = \varepsilon \left(\frac{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 I}}{c} - \frac{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 I}}{a} \right),$$

und für die normale Incidenz

$$O - E = \varepsilon \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right).$$

Die letztere Grösse ist positiv, doch lässt sich im Allgemeinen nicht angeben, wie die Wegdifferenz sich bei wachsender Incidenz verändert.

Ist $\theta = \frac{\pi}{2}$, d. h. enthält die Einfallsebene die Achsen der mittleren und kleinsten Elasticität, so hat man

$$O - E = \varepsilon \left(\frac{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 I}}{c} - \frac{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 I}}{a} \right),$$

und für die normale Incidenz

$$O - E = \varepsilon \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right),$$

ohne dass man im Allgemeinen sagen könnte, wie die Wegdifferenz mit dem Incidenzwinkel variirt.

Man sieht, dass eine senkrecht zur Achse der mittleren Elasticität geschnittene Krystallplatte sich in der Nähe der normalen Incidenz wie ein repulsiver Krystall verhält. Bei grösseren Incidenzen verhält sie sich bald wie ein repulsiver, bald wie ein attractiver Krystall, ohne dass man eine allgemeine Regel angeben könnte.

256. Die Polariskope von Arago und Petrina.

Gleich nach der Entdeckung der Erscheinungen der chromatischen Polarisation wendete Arago dieselben an, um Lichtstrahlen auf ihre Polarisation zu prüfen. Sein Polariskop besteht aus einer Röhre, in welcher sich befinden: zwei Diaphragmen, um ein cylindrisches Strahlenbündel durchzulassen, ein Blättchen Glimmer oder Gyps und ein Analyseur. Ist das einfallende Licht polarisirt, so erscheinen die beiden

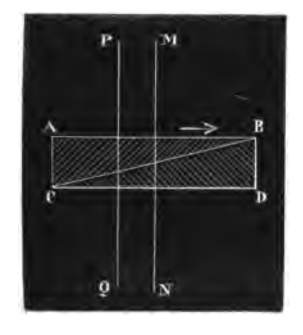
Bilder complementär gefärbt und man findet durch Drehung des Analyseurs die Lage, für welche die Färbung am lebhaftesten ist.

Petrina[1]) erfand das sogenannte Kaleidopolariskop: ein Kaleidoskop, in welchem sich Glimmer- und Gypsblättchen von verschiedener Dicke befinden, und welches mit einem Analyseur versehen ist. Ist das einfallende Licht polarisirt, so erscheinen die Krystallblättchen verschieden gefärbt. Dieses Polariskop ist empfindlicher als das Arago'sche.

257. Der Compensator von Babinet.

Der Compensator von Babinet ist noch empfindlicher. Er besteht aus zwei gleichen rechtwinkeligen Quarzprismen, ABC, BCD (Fig. 26), welche mit den Hypotenusenflächen an einander liegen und so eine Platte bilden. Jene Seitenflächen der Prismen, welche zugleich die Begrenzungsflächen der Platte sind, enthalten die Achsen, welche auf einander senkrecht stehen und so liegen, dass in einem der Prismen die Achse der Hypotenusenfläche parallel ist.

Fig. 26.



Ist also in Fig. 26 die Achse des Prismas ABC parallel mit AB, so steht die Achse des Prismas CBD auf CD senkrecht.

Lässt man einen Strahl durch den Compensator treten, so zerlegt sich derselbe in zwei Strahlen, von welchen jeder in einem der beiden Prismen als ordentlicher Strahl geht und im anderen Prisma als ausserordentlicher.

Ein Strahl MN, welcher durch die Mitte des Compensators geht, legt in den beiden Prismen gleiche Wege zurück, jeder der beiden Strahlen, in welche er sich zerlegt, durchläuft gleiche Wege als ordentlicher und als ausserordentlicher Strahl, und es folgt hieraus, dass der Polarisationszustand eines durch die Mitte des Compensators tretenden Strahles durch den Compensator nicht geändert wird.

Anders verhält es sich mit einem Strahle, welcher seitlich durch den Compensator tritt. Ein Strahl PQ durchsetzt das Prisma ABC an einer Stelle von der Dicke e, und das Prisma CDB an einer Stelle von der Dicke e'. Die beiden Composanten dieses Strahles zeigen beim Austritte eine Wegdifferenz gleich jener, welche sie zeigen würden, wenn der Strahl durch eine Quarzplatte von der Dicke $e - e'$ ginge,

[1]) Pogg. Ann. XLIX, 236.

deren Hauptschnitt mit dem Hauptschnitte jenes Prismas parallel wäre, welchem die grössere Dicke e entspricht.

Lassen wir auf die Fläche AB des Compensators ein Bündel paralleler Strahlen fallen, dessen Polarisationsebene mit den beiden Hauptschnitten des Compensators einen Winkel $= \frac{\pi}{4}$ bilde. Jeder austretende Strahl setzt sich aus zwei rechtwinkelig polarisirten Strahlen zusammen, deren Intensitäten gleich sind, während ein Gangunterschied zwischen ihnen besteht. Dieser Gangunterschied ist Null für den Strahl MN und sein absoluter Werth wächst proportional dem Abstande von MN.

Jene Strahlen, für welche die Wegdifferenz ein ungerades Vielfache von $\frac{\lambda}{2}$ ist, sind senkrecht zur ursprünglichen Polarisationsebene polarisirt, jene Strahlen, für welche ein gerades Vielfache von $\frac{\lambda}{2}$, parallel zu der ursprünglichen Polarisationsebene.

Lässt man also das austretende Bündel durch einen Analyseur treten, dessen Hauptschnitt mit der ursprünglichen Polarisationsebene parallel ist, so gewahrt man im ausserordentlichen Bilde entsprechend dem Strahle MN einen dunkeln Streifen; zu beiden Seiten befinden sich zwei weisse Streifen, auf welche gefärbte Streifen folgen. Das ordentliche Bild hingegen zeigt einen centralen weissen Streifen, auf welchen zwei dunkle, sodann farbige Streifen folgen.

Das Auftreten dieser Fransen zeigt das Vorhandensein der Polarisation des einfallenden Lichtes an; um die Lage der Polarisationsebene zu bestimmen, hat man den Analyseur zu drehen, bis die Centralfranse des ausserordentlichen Bildes am schwärzesten erscheint; der Hauptschnitt des Analyseurs steht dann parallel mit der Polarisationsebene.

258. Anwendung des Babinet'schen Compensators.

Jamin hat den Compensator Babinet's auf das Studium der elliptischen Polarisation und die Messung der den elliptisch polarisirten Strahl charakterisirenden Constanten angewendet[1]).

Ein elliptisch polarisirter Strahl kann stets in zwei rechtwinkelig polarisirten Strahlen von bestimmtem Gangunterschied zerlegt werden. Lässt man also einen elliptisch polarisirten Strahl in einen Compensator treten, so haben die nach den beiden Hauptschnitten des Compensators genommenen Composanten des Strahles schon beim Eintritte einen ge-

---

[1]) *Ann. de chim. et de phys.* (3), XIX, 296; XXIX, 263.

wissen Gangunterschied, uud es folgt, dass in den Bildern des Analyseurs die Streifensysteme Verschiebungen erfahren.

Man kann nun den Apparat so einrichten, dass er gestattet, den Gangunterschied der beiden Composanten zu messen. Zu diesem Zwecke macht man das eine Prisma des Compensators fest, das andere mittelst einer Mikrometerschraube beweglich; ein Fadenkreuz dient zur Bestimmung der Lage der Fransén.

Man lässt zunächst geradlinig unter einem Winkel $= \frac{\pi}{4}$ mit den Hauptschnitten des Compensators polarisirtes Licht einfallen und stellt den Hauptschnitt des Analyseurs parallel der ursprünglichen Polarisationsebene. Die schwarze Centralfranse des ausserordentlichen Bildes entspricht dann dem Centralstrahle MN. Man stellt das Fadenkreuz auf diese Franse ein, und dreht hierauf die Mikrometerschraube, bis das Fadenkreuz über der einer Wegdifferenz $= \frac{\lambda}{2}$ entsprechenden Franse steht. Ist L diese Verschiebung des beweglichen Prismas, so entspricht einer beliebigen Verschiebung l eine Wegdifferenz gleich $\frac{l\lambda}{2L}$.

Dies vorausgesetzt, ist leicht zu verstehen, wie der so eingerichtete Compensator zum Studium des elliptisch polarisirten Lichtes benutzt werden kann. Man beginnt damit, den Analyseur zu drehen, bis die Centralfranse des ausserordentlichen Bildes möglichst dunkel erscheint. Der Strahl, welcher dieser Franse entspricht, hat sich in zwei nach den beiden Hauptschnitten des Compensators polarisirte Strahlen zerlegt, und diese hatten eine Wegdifferenz δ. Diese Wegdifferenz wurde durch den Compensator aufgehoben und die geradlinige Polarisation wieder hergestellt. Um also die ursprüngliche Wegdifferenz der beiden Composanten zu erfahren, hat man die ihr numerisch gleiche, nur dem Vorzeichen nach entgegengesetzte, Wegdifferenz zu messen, welche der Compensator an der Stelle der dunkeln Centralfranse hervorbringt. Zu diesem Zwecke bringt man die dunkle Franse mittelst der Mikrometerschraube unter das Fadenkreuz. Ist die Verschiebung l, so ist die gesuchte Wegdifferenz $\frac{l\lambda}{2L}$.

Was das Amplitudenverhältniss der beiden Composanten des elliptisch polarisirten Strahles betrifft, so ist dasselbe gleich der Tangente des Winkels zwischen dem Hauptschnitte des Analyseurs mit einem der Hauptschnitte des Compensators. Man kann also mittelst des Compensators den Gangunterschied der beiden nach zwei rechtwinkeligen Richtungen genommenen Composanten eines elliptisch polarisirten Strahles, sowie das Verhältniss der Amplituden dieser Composanten bestimmen.

Sind die Hauptschnitte des Compensators den Achsen der Ellipse des elliptisch polarisirten Strahles parallel, so ist der Wegunterschied der beiden parallel diesen Achsen genommenen Composanten des ellip-

tisch polarisirten Strahles gleich $\frac{\lambda}{4}$. Verschiebt man also das eine Prisma mittelst der Mikrometerschraube um $\frac{L}{2}$, so dass der Compensator am Fadenkreuze eine Wegdifferenz gleich $\frac{\lambda}{4}$ hervorbringt, so genügt es zur Bestimmung der Achsenrichtungen der Vibrationsellipse, den Compensator zu drehen, bis die dunkle Centralfranse des ausserordentlichen Bildes auf das Fadenkreuz fällt. Die Hauptschnitte des Compensators sind dann parallel den Achsenrichtungen der Vibrationsellipse. Um das Achsenverhältniss der Vibrationsellipse zu finden, drehe man den Analyseur bei ungeänderter Lage des Compensators, bis die Franse am Fadenkreuz so dunkel als möglich erscheint. Die Tangente des Winkels zwischen dem Hauptschnitte des Analyseurs und einem der Hauptschnitte des Compensators giebt das gesuchte Verhältniss. Dieses Verfahren ist meist dem Gebrauche eines $\frac{\lambda}{4}$-Plättchens vorzuziehen.

259. Das Polariskop von Bravais.

Bravais hat ein Polariskop construirt, welches mit Genauigkeit geradlinig polarisirtes Licht von elliptisch polarisirtem unterscheiden lässt [1]). Der Apparat besteht aus einer Platte aus Glimmer oder Kalkspath von solcher Dicke, dass die Wegdifferenz zwischen dem ordentlichen und dem ausserordentlichen Strahle für gelbes Licht gleich $\frac{\lambda}{4}$ wird.

Lässt man das von der Platte kommende Licht durch einen Analyseur treten, dessen Hauptschnitt der ursprünglichen Polarisationsebene parallel ist, so fehlen die gelben Strahlen im ausserordentlichen Bilde, und dieses zeigt eine sogenannte sensible Farbe, indem die geringste Veränderung der Dicke der Platte oder der Polarisation des Lichtes hinreicht, um die Farbe des Bildes merklich zu verändern. Die Platte wird folgendermaassen hergestellt. Man nehme beispielsweise eine parallel zur Achse geschnittene Kalkspathplatte, zerschneide dieselbe und vereinige die beiden Theile wieder, nachdem man einen derselben um einen rechten Winkel gedreht hat. Man hat nun eine Platte, welche aus zwei neben einander liegenden Theilen besteht, deren Hauptschnitte mit einander einen rechten Winkel bilden. Eine zweiachsige Platte, z. B. eine Glimmerplatte, muss parallel einem der Hauptschnitte des Krystalls geschnitten sein.

---

[1]) *Ann. de chim. et de phys.* (3), XLIII, 129.

Lassen wir das aus der Bravais'schen Platte tretende Licht durch einen Analyseur gehen, dessen Hauptschnitt zur Winkelhalbirenden der Hauptschnitte der beiden Theile der Platte parallel ist, und fällt linear polarisirtes Licht ein, so zeigt jedes der beiden Bilder des Analyseurs zwei verschieden gefärbte Hälften. Dreht man jedoch die Bravais'sche Platte und den Analyseur bei ungeänderter gegenseitiger Lage der letzteren, so findet man stets eine Stellung, bei welcher jedes der beiden Bilder des Analyseurs nur einerlei Farbe zeigt, und zwar das ausserordentliche Bild die sensible Farbe. In dieser Stellung ist der Hauptschnitt des Analyseurs parallel zur ursprünglichen Polarisationsebene. Anders verhält es sich bei elliptisch polarisirtem Lichte: Das ausserordentliche Bild zeigt bei keiner Stellung des aus der Platte und dem Analyseur gebildeten Systems zwei gleich gefärbte Hälften. Man kann so geringe Grade der elliptischen Polarisation erkennen.

XXVI.

Chromatische Polarisation des convergenten Lichtes.

260. Historisches.

Die Erscheinungen, welche das convergente oder divergente Licht an Krystallplatten hervorbringt, wurden zuerst in den Jahren 1813 bis 1816 von verschiedenen Physikern beobachtet.

Brewster entdeckte 1813 die Ringe, welche gewisse einachsige parallel zur Achse geschnittene Krystalle zeigen, wie Beryll, Smaragd und Rubin [1]). Wollaston entdeckte diese Ringe am Kalkspath im Jahre 1814, Biot und Seebeck im Jahre 1815; keiner dieser Gelehrten scheint von den Arbeiten der anderen Kenntniss gehabt zu haben. Die vollständige Theorie der Erscheinungen, welche einachsige, senkrecht zur Achse geschnittene Krystalle zeigen, wurde von Airy im Jahre 1830 gegeben [2]).

Die Farben, welche einachsige, parallel zur Achse geschnittene Krystalle im convergenten Lichte geben, wurden experimentell studirt und theoretisch behandelt von J. Müller [3]).

Endlich machte Brewster die Entdeckung der complicirten Figuren, welche sich zeigen, wenn convergente polarisirte Strahlen auf eine zweiachsige Krystallplatte fallen, und veröffentlichte diese Entdeckung im Jahre 1844 [4]).

---

1) *Treatise on New Philosophical Instruments*, 336. 2) *On the nature of the Light in the two Rays produced by the double Refraction of Quartz, Cambr. Trans.* IV, 79, 198. 3) Erklärung der isochromatischen Curven, welche einachsige, parallel mit der Achse geschnittene Krystalle im homogenen polarisirten Lichte zeigen, Pogg. Ann. XXXIII, 283. — XXXV, 95. 4) *On the Affections of Light transmitted through Crystallized Bodies, Phil. Trans.* 1814, 185.

261. Die Turmalinzange.

Die einfachste Vorrichtung zur Hervorbringung der Erscheinungen der chromatischen Polarisation im convergenten oder divergenten Lichte ist die Turmalinzange. Dieselbe ist erfunden von Biot und besteht aus zwei parallel der Achse geschnittenen Turmalinplatten, welche sich so in paralleler Lage befinden, dass sie nach einander von dem Lichtstrahle durchsetzt werden und überdies einzeln in der eigenen Ebene gedreht werden können. Stellt man die Turmaline so, dass die Achsen sich rechtwinkelig kreuzen, so erscheint die Doppelplatte nahezu undurchsichtig, da jede Platte nur den ausserordentlichen Strahl durchlässt. Bringt man jedoch eine doppeltbrechende Krystallplatte zwischen die beiden Turmalinplatten und blickt durch das Plattensystem nach dem Himmel, so nimmt man Farbenbilder wahr. Um diese deutlich wahrnehmen zu können, muss das Auge auf Unendlich eingestellt, also das kurzsichtige Auge mit einem geeigneten Glase versehen sein. Demnach gelangen solche Strahlen in einem Punkte der Netzhaut zur Interferenz, welche unter einander parallel durch das Plattensystem gehen.

Bei diesem Versuche dient der erste Turmalin als Polariseur, der zweite als Analyseur. Das Auge nimmt eine unendliche Menge verschieden gerichteter, aus unter einander parallelen Strahlen bestehender Strahlenbündel auf. Betrachten wir eines derselben. Seine Strahlen durchsetzen die Krystallplatte sämmtlich in derselben Richtung; indem sie aus dem zweiten Turmaline, welcher nur die ausserordentlichen Strahlen durchlässt, austreten, haben sie sämmtlich die gleiche Farbe, und das austretende Strahlenbündel hat eine Intensität, welche sich nach den für die schiefe Incidenz abgeleiteten Formeln berechnen lässt. Indem die Strahlen des betrachteten Bündels in einem Punkte der Netzhaut zur Interferenz kommen, haben sie beim Durchgange durch die Medien des Auges keine gegenseitigen Phasendifferenzen angenommen; demnach ist die Intensität in dem betrachteten Punkte der Netzhaut gleich der Summe der Intensitäten der Strahlen des Bündels, und die resultirende Farbe ist die der Richtung des Strahlenbündels in der Krystallplatte entsprechende.

Betrachtet man in gleicher Weise ein zweites, in anderer Richtung durch die Krystallplatte tretendes Strahlenbündel, so wird man an der Vereinigungsstelle der Strahlen dieses Bündels auf der Netzhaut im Allgemeinen eine andere Farbe oder Intensität erhalten. Es wird also auf der Netzhaut ein Farbenbild oder bei Anwendung homogenen Lichtes ein Interferenzbild entstehen. Man sagt, dass diese Erscheinungen im convergenten, oder auch, dass sie im divergenten Lichte entstehen. Die Verschiedenheit dieser Bezeichnungen rührt daher, dass man bald

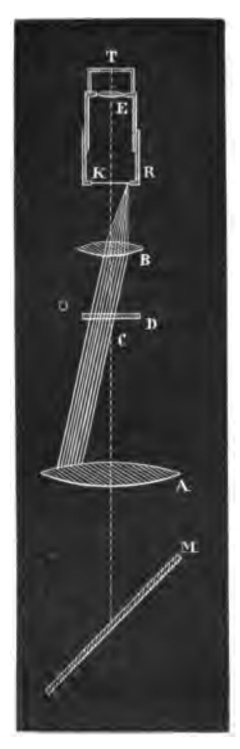
die einfallenden Strahlenbündel betrachtet, welche gegen die Turmalinzange convergiren, bald die austretenden, welche divergiren.

Statt diese Erscheinungen in der angegebenen Weise zu beobachten, kann man dieselben auch auf einen Schirm projiciren oder mittelst einer Loupe betrachten. Wesentlich aber ist es, dass die Strahlen, welche sich in einem Punkte des Bildes vereinigen, unter einander parallel durch die Krystallplatte gehen. Ist der Analyseur kein Turmalin, sondern ein Krystall, welcher auch die ausserordentlichen Strahlen durchlässt, so erhält man statt eines, zwei Bilder.

262. Der Apparat von Soleil.

Der älteste Apparat zur Beobachtung der Erscheinungen der chromatischen Polarisation im convergenten Lichte ist jener von Soleil; derselbe eignet sich auch zur Messung des Winkels der optischen Achsen. Die Sonnenstrahlen werden von einem schwarzen Glasspiegel, Fig. 27, unter dem Polarisationswinkel (35° 25′) in der Richtung der Achse des Instrumentes reflectirt und sind in der Einfallsebene polarisirt. Die Strahlen treten durch eine Sammellinse *A* und geben bei *C* ein kleines Sonnenbild. Unmittelbar nachher treten sie durch die Krystallplatte *D*. Von jedem Punkte des Sonnenbildchens kommt ein Strahlenbüschel. Nimmt man von jedem dieser Büschel jenen Strahl, welcher einer gegebenen Richtung parallel ist, so werden alle diese Strahlen unter einander parallel durch den Krystall treten und gleich modificirt werden. In einiger Entfernung befindet sich eine zweite Sammellinse *B*, in deren Focalebene solche Strahlen zusammentreffen, welche vor der Linse *B* unter einander parallel waren, also in derselben Richtung die Krystallplatte durchsetzt haben. Diese Richtung ist aber eine verschiedene für die verschiedenen Punkte der Focalebene der Linse *B*. In dieser Ebene befindet sich ein Mikrometer *K*, welches an dem einen Ende einer Röhre *R* angebracht ist. In derselben Röhre befindet sich eine dritte Linse *E*, welche als Loupe dient und auf die Ebene *K* eingestellt ist. Endlich dient ein Turmalin *T* zwischen der Linse *E* und dem Auge als Analyseur.

Fig. 27.



Sind x, y die Coordinaten eines Punktes der Ebene des Mikrometers, so findet man leicht für die Strahlen, welche in diesem Punkte zur Vereinigung kommen, den Incidenzwinkel I und den Winkel ω, welchen die Einfallsebene mit dem Hauptschnitte der Krystallplatte bildet. Nehmen wir den Durchschnittspunkt der Achse des Apparates mit der Mikrometerebene zum Ursprunge des Coordinatensystems, und zur x-Achse eine auf der Mikrometerebene liegende, mit dem Hauptschnitte der Krystallplatte parallele Gerade, so haben wir, wenn überdies d die Entfernung der Linse B von der Mikrometerebene oder die Brennweite dieser Linse ist,

$$tang\ I = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{d}$$

$$tang\ \omega = \frac{y}{x}.$$

Sind I und ω bekannt, so kann man die Färbung des betrachteten Punktes mittelst der für die schiefe Incidenz entwickelten Formeln berechnen.

Beschreibungen üblicher, zur Beobachtung der Erscheinungen der chromatischen Polarisation dienender Instrumente finden sich im Lehrbuche der Physik von Müller-Pfaundler, 8. Aufl., 2. Bd., 1. Abth., 12. Cap.

263. Der Projectionsapparat von Dubosq.

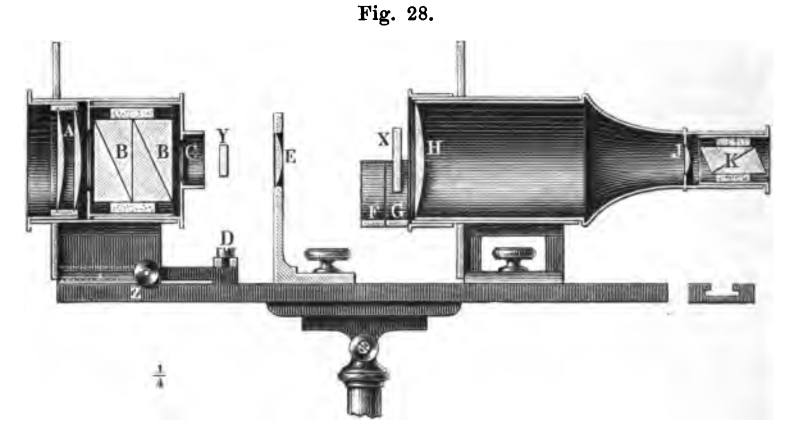
Um die Phänomene zu projiciren, construirte Dubosq einen Apparat, dessen Beschreibung wir folgen lassen.

Die Sonnenstrahlen treten durch eine Sammellinse, dann durch einen Polariseur und vereinigen sich in einem Sonnenbildchen a. Nahe bei a befindet sich die Krystallplatte L. Die Strahlen, welche von a kommen und durch L gegangen sind, treten durch eine Sammellinse B, in deren Focalebenen a' sich Strahlen kreuzen, welche unter einander parallel durch L gegangen sind. Ein zweites Nicol'sches oder Foucault'sches Prisma, etwa zwischen B und a', dient als Analyseur. Eine dritte Sammellinse projicirt das Bild a' auf einen Schirm.

Fig. 28 (a. f. S.) stellt Dubosq's Apparat mit einigen von V. v. Lang vorgenommenen Veränderungen dar. Bei A befindet sich eine Doppel-Sammellinse, bei B als Polariseur ein doppeltes Senarmont'sches Prisma, bei C eine Hülse zur Aufnahme von Diaphragmen und Krystallplatten, bei D eine in der Figur nicht ausgeführte, geeignet eingerichtete Klemme zum Halten der Krystallplatte Y, bei E, H, J drei Sammellinsen und bei K ein Nicol. Die beiden Theile des Apparates, von welchen der eine die Linse E, der andere die Linsen H, J trägt, sind

verschiebbar. Bei *F*, *G* befinden sich zwei Halbringe zur Aufnahme von Platten, die im parallelen Lichte betrachtet werden sollen. Der Apparat liefert bei Anwendung elektrischen oder Drummond'schen Lichtes gute Resultate.

Fig. 28.



Um die Erscheinungen convergenten Lichtes objectiv darzustellen, kann man auch ein Sonnenmikroskop benutzen. An die Stelle des Objectes setzt man eine Turmalinplatte, unmittelbar hinter dieselbe die Krystallplatte, und schiebt statt der die Objectivlinse tragenden Hülse eine andere ein, welche die zweite Turmalinplatte enthält.

264. Das Polarisationsmikroskop.

Das Polarisationsmikroskop gestattet die Phänomene der chromatischen Polarisation an sehr kleinen Krystallen zu beobachten, und Verschiedenheiten der Structur sehr nahe bei einander gelegener Theile einer Krystallplatte zu erkennen. Dieses Instrument hat der Mineralogie grosse Dienste geleistet; es wurde von Grailich bei seinen umfangreichen und präcisen Studien über die optischen Charaktere der Minerale benutzt. Ob ein kleinstes Bruchstückchen eines Minerals dem regulären System angehört, kann man daran erkennen, dass solche Krystalle die Erscheinungen der chromatischen Polarisation nicht zeigen. Hingegen zeigen diese Erscheinungen die meisten organischen Gebilde, und das Polarisationsmikroskop kann zum Studium der Structur dieser Gebilde dienen.

Man kann das gewöhnliche Mikroskop als Polarisationsmikroskop gebrauchen, wenn man das einfallende Licht polarisirt und in der Nähe des Oculars einen Analyseur anbringt. An die Stelle des Objectes kommen die Krystallblättchen.

265. Achromatische und isochromatische Linien.

Wir wollen nun an die Theorie der Erscheinungen gehen, welche Krystallplatten im convergenten oder divergenten Lichte zeigen. Strahlen, welche in der Krystallplatte parallel gehen, vereinigen sich in der Brennebene der hinter der Krystallplatte befindlichen Linse in einem Punkte. Wir betrachten stets das Bild, welches in der Brennebene dieser Linse entsteht. Der Mittelpunkt dieses Interferenzbildes entspricht Strahlen, welche senkrecht durch die Platte gehen. Nehmen wir diesen Punkt zum Ursprunge eines Coordinatensystems, so haben wir

$$tang\, I = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{d}.$$

Die Intensität in einem Punkte des ordentlichen Bildes des Analyseurs ist

$$\omega^2 = cos^2 s - sin\, 2\, i\, sin\, 2\, (i - s)\, sin^2 \pi\, \frac{O - E}{\lambda},$$

und in einem Punkte des ausserordentlichen Bildes

$$\varepsilon^2 = sin^2 s + sin\, 2\, i\, sin\, 2\, (i - s)\, sin^2 \pi\, \frac{O - E}{\lambda}.$$

In diesen Formeln bedeuten i und s die Winkel der ursprünglichen Polarisationsebene mit dem Hauptschnitte der Krystallplatte und dem Hauptschnitte des Analyseurs. Die Wegdifferenz $O - E$ kann mittelst der Formeln, welche wir für die schiefe Incidenz entwickelt haben, als Function des Einfallswinkels I und des Winkels zwischen der Einfallsebene und dem Hauptschnitte der Krystallplatte ausgedrückt werden, welche beiden Winkel selbst Functionen der Coordinaten des betrachteten Bildpunktes sind. Man kann so die Intensität jedes Punktes des Interferenzbildes als Function der Coordinaten dieses Punktes darstellen.

Ehe wir auf die sich darbietenden speciellen Fälle eingehen, ist es nützlich, einige Bemerkungen allgemeiner Natur vorauszuschicken.

Hat man

$$sin\, 2\, i = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

oder

$$sin\, 2\, (i - s) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

so fallen in den Ausdrücken von ω^2 und ε^2 die zweiten von λ abhängigen Glieder weg. Ist also für einen Punkt des Interferenzbildes eine dieser beiden Bedingungen erfüllt, so finden sich in diesem Punkte die einfachen Farben in denselben Intensitätsverhältnissen gemischt wie im einfallenden Lichte. Linien, deren Punkte so beschaffen sind, bilden achromatische Linien.

Hat man

$$sin^2 \pi \frac{O-E}{\lambda} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

so zeigen die Strahlen von der Wellenlänge λ, wenn $sin\, 2\, i\, sin\, 2\, (i - s)$ positiv ist, ein Maximum der Intensität im ordentlichen Bilde und ein Minimum im ausserordentlichen, hingegen wenn $sin\, 2\, i\, sin\, 2\, (i - s)$ negativ ist, ein Minimum im ordentlichen und ein Maximum im ausserordentlichen.

Die Gleichung (3) bestimmt also eine Reihe von isochromatischen Linien: jede derselben zeigt approximativ die Farbe von der Wellenlänge λ im ordentlichen Bilde, und die complementäre Farbe im ausserordentlichen, wenn $sin\, 2\, i\, sin\, 2\, (i - s)$ positiv ist, und umgekehrt, wenn negativ. Theile derselben isochromatischen Linie, für welche das Product $sin\, 2\, i\, sin\, 2\, (i - s)$ verschiedene Zeichen hat, sind also complementär gefärbt. Dies vorausgesetzt, ist es leicht zu entscheiden, welches der Erfolg sein wird, wenn eine isochromatische und eine achromatische Linie sich kreuzen. Entsteht die achromatische Linie dadurch, dass nur einer der beiden Factoren $sin\, 2\, i$ und $sin\, 2\, (i - s)$ der Null gleich wird, so wechselt das Product $sin\, 2\, i \,.\, sin\, 2\, (i - s)$ das Vorzeichen, und folglich geht die Farbe der isochromatischen Linie an jener Stelle, wo sie die achromatische Linie kreuzt, in die complementäre Farbe über. Entsteht hingegen die achromatische Linie dadurch, dass die beiden Factoren $sin\, 2\, i$ und $sin\, 2\, (i - s)$ gleichzeitig der Null gleich werden, so ändert das Product dieser beiden Factoren das Vorzeichen nicht, und folglich ändert auch die isochromatische Linie im Durchkreuzungspunkte ihre Farbe nicht.

266. Platte senkrecht zur Achse.

Ist die Krystallplatte senkrecht zur Achse geschnitten, so ist die Wegdifferenz $O - E$ für die senkrecht einfallenden Strahlen Null. Das Centrum jedes der beiden Bilder ist folglich farblos. Für die schief einfallenden Strahlen fällt der Hauptschnitt mit der Einfallsebene zusammen. Die Relation

$$sin\, 2\, i = 0$$

giebt also zwei achromatische Linien, welche durch das Centrum gehen und von welcher die eine mit der ursprünglichen Polarisationsebene parallel ist, während die andere auf ihr senkrecht steht.

Die Gleichung

$$sin\, 2\, (i - s) = 0$$

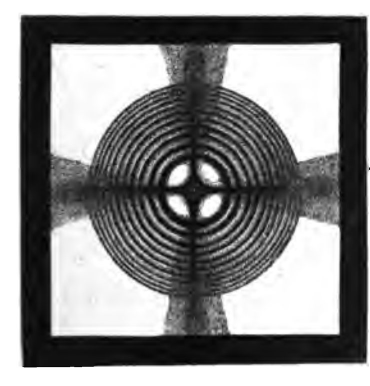
giebt zwei andere achromatische Linien, welche durch das Centrum gehen und zum Hauptschnitte des Analyseurs bezüglich parallel und senkrecht sind.

Man hat also im Allgemeinen vier sich im Centrum durchschneidende achromatische Linien; diese begrenzen acht Sectoren, in welchen isochromatische Linien wahrgenommen werden.

Die Wegdifferenz $O-E$ hängt in dem Falle, welchen wir betrachten, nur von dem Incidenzwinkel I ab und folglich sind die isochromatischen Linien concentrische Kreise, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Durchschnittspunkt der achromatischen Linien ist. Man sieht ferner, dass auf einer isochromatischen Linie in vier nicht an einander liegenden Sectoren sich dieselbe Farbe und in den vier anderen Sectoren die complementäre Farbe zeigen muss.

Ist $s = 0$ oder $s = \frac{\pi}{2}$, d. h. ist der Hauptschnitt des Analyseurs mit der ursprünglichen Polarisationsebene parallel oder steht er auf ihr senkrecht, so reduciren sich die beiden Gleichungen (1) und (2) auf eine einzige Gleichung. Es giebt dann nur zwei auf einander senkrechte achromatische Linien und jeder isochromatische Kreis zeigt seiner ganzen Ausdehnung nach die gleiche Farbe. Ist $s = 0$, also der Hauptschnitt des Analyseurs parallel der ursprünglichen Polarisationsebene, so ist das Kreuz weiss im ordentlichen, und schwarz im ausserordentlichen Bilde; ist hingegen $s = \frac{\pi}{2}$, d. h. steht der Hauptschnitt des Analyseurs auf der ursprünglichen Polarisationsebene senkrecht, so zeigt das ordentliche Bild ein schwarzes, das ausserordentliche ein weisses Kreuz. Die beiden Interferenzbilder sind in Fig. 29 dargestellt.

Fig. 29.





Die isochromatischen Linien, welche für Strahlen von der Wellenlänge λ einem Maximum der Intensität im ordentlichen Bilde und einem Minimum im ausserordentlichen entsprechen, sind unter der Voraussetzung, dass $\sin 2i \sin 2(i-s)$ positiv ist, gegeben durch

$$\sin^2 \pi \frac{O-E}{\lambda} = 0$$

und unter der Voraussetzung, dass $\sin 2i \sin 2(i-s)$ negativ ist, durch

$$\sin^2 \pi \frac{O-E}{\lambda} = 1.$$

Die isochromatischen Linien hingegen, welche im ordentlichen Bilde einem Minimum und im ausserordentlichen einem Maximum der Intensität entsprechen, sind, wenn $\sin 2i \sin 2(i-s)$ positiv ist, durch die zweite, und wenn negativ, durch die erste der beiden obigen Gleichungen gegeben.

Die allgemeine Gleichung der isochromatischen Linien ist also

$$O-E = k\frac{\lambda}{2},$$

wo k eine ganze Zahl bedeutet. Andererseits hat man für eine senkrecht zur Achse geschnittene Platte:

$$O-E = \frac{\varepsilon}{b}\left(\sqrt{1-b^2 \sin^2 I} - \sqrt{1-a^2 \sin^2 I}\right).$$

Die Gleichung der isochromatischen Curve ist demnach:

$$\sqrt{1-b^2 \sin^2 I} - \sqrt{1-a^2 \sin^2 I} = \frac{kb\lambda}{2\varepsilon}.$$

Da die Interferenzerscheinungen im weissen Lichte verschwinden, sobald die Wegdifferenz eine grössere Zahl Wellenlängen beträgt, sind nur jene Ringe wahrnehmbar, welche kleinen Werthen von k und kleinen Incidenzwinkeln entsprechen. Für alle wahrnehmbaren Interferenzringe kann man daher für die in der letzten Gleichung vorkommenden Wurzeln Näherungswerthe setzen und erhält

$$(a^2-b^2)\sin^2 I = \frac{kb\lambda}{\varepsilon}.$$

Da I sehr klein ist, kann man ferner für den Sinus die Tangente setzen und erhält

$$\sin^2 I = \frac{x^2+y^2}{d^2}.$$

Man erhält so schliesslich als Gleichung der isochromatischen Linie:

$$x^2+y^2 = \frac{kbd^2\lambda}{\varepsilon(a^2-b^2)}.$$

Die Durchmesser der isochromatischen Kreise sind also proportional der Entfernung der Bildebene von der Linse; ihre Quadrate sind verkehrt proportional der Plattendicke, proportional der Grösse $\frac{b}{a^2-b^2}$ und proportional der Wellenlänge. Diese Gesetze gelten nur für die isochromatischen Ringe von geringem Radius, und die beiden letzteren Gesetze

sind niemals strenge erfüllt, da $\frac{b}{a^2 - b^2}$ selbst eine Function der Wellenlänge ist.

Im ordentlichen Bilde sind die Quadrate der Durchmesser der hellen Ringe den geraden Zahlen proportional, jene der dunkeln den ungeraden, wenn $\sin 2i \sin 2(i-s)$ positiv ist, und umgekehrt, wenn negativ. Ist $s = 0$, so ist das Product $\sin 2i \sin 2(i-s)$ stets positiv, die Farben befolgen im ordentlichen Bilde die Reihenfolge der durchgelassenen Newton'schen Ringe, im ausserordentlichen jene der reflectirten. Ist $s = \frac{\pi}{2}$, so ist das Product $\sin 2i \sin 2(i-s)$ stets negativ, das ordentliche Bild zeigt die Farbenfolge der reflectirten, das ausserordentliche jene der durchgelassenen Newton'schen Ringe. Ist s weder 0 noch $\frac{\pi}{2}$, so hat man acht Sectoren in jedem Bilde. Im ordentlichen Bilde hat man in jenen Sectoren, für welche $\sin 2i \sin 2(i-s)$ positiv ist, die Farbenfolge der durchgelassenen Newton'schen Ringe, und in jenen, für welche negativ, die der reflectirten. Umgekehrt verhält es sich im ausserordentlichen Bilde.

267. Superposition zweier senkrecht zur Achse geschnittener Platten.

Lässt man das Licht der Reihe nach durch zwei senkrecht zur Achse geschnittene Platten treten, so können die Hauptschnitte der Platten als zusammenfallend angesehen werden. Man hat also (246):

$$\omega^2 = \cos^2 s - \sin 2i \sin 2(i-s) \sin^2 \pi \frac{O - E + O' - E'}{\lambda}$$

$$\varepsilon^2 = \sin^2 s + \sin 2i \sin 2(i-s) \sin^2 \pi \frac{O - E + O' - E'}{\lambda}.$$

Es folgt, dass die achromatischen Linien dieselbe Lage haben, wie bei einer einzigen Platte. Die Gleichung der isochromatischen Linien ist:

$$O - E + O' - E' = \frac{k\lambda}{2},$$

oder, wenn ε' die Dicke der zweiten Platte bedeutet, und a', b' die Halbachsen der ellipsoidischen Wellenfläche dieser Platte,

$$x^2 + y^2 = \frac{k d^2 \lambda}{\frac{\varepsilon}{b}(a^2 - b^2) + \frac{\varepsilon'}{b'}(a'^2 - b'^2)}.$$

Haben die beiden Platten dasselbe Zeichen, so gilt dasselbe von $a^2 - b^2$ und $a'^2 - b'^2$. Die Doppelplatte giebt schmalere Ringe als eine einzige der Platten.

Haben die beiden Platten verschiedene Zeichen, so verbreitern sich die Ringe jener Platte, deren $\frac{\varepsilon}{b}(a^2 - b^2)$ den grösseren absoluten Werth hat, sobald man die andere Platte auf sie legt.

Dieser Umstand liefert ein einfaches Mittel, das Zeichen eines Krystalls zu erkennen. Man lege eine senkrecht zur Achse geschnittene Platte dieses Krystalls auf eine ebenso geschnittene Platte eines Krystalls von bekanntem Vorzeichen. Um einen Fehler zu vermeiden, wird man zuerst die beiden Platten getrennt untersuchen und auf jene, für welche $\frac{b}{a^2 - b^2}$ den grösseren absoluten Werth hat, d. h. welche die weiteren Ringe giebt, die andere Platte legen. Verengern sich die Ringe, so haben die beiden Krystalle dasselbe Zeichen, erweitern sie sich, verschiedene Zeichen. Der Sicherheit wegen wird man sich nur auf solche Versuche stützen, welche eine Erweiterung der Ringe geben.

Als repulsive Platte kann man eine solche aus Kalkspath, Turmalin oder Beryll gebrauchen; Kalkspath giebt wegen seiner starken Doppelbrechung etwas enge Ringe, wenn man nicht ein sehr dünnes Blättchen benutzt. Als attractive Platte kann man eine solche aus Zirkon oder Quarz benutzen.

268. Platte parallel zur Achse.

Ist die Platte parallel zur Achse geschnitten, so zeigen die Bilder des Analyseurs keine achromatischen Linien, i und s haben für alle I denselben Werth. Ist

$$\sin 2\,i = 0$$

oder

$$\sin 2\,(i - s) = 0,$$

d. h. bildet der Hauptschnitt der Platte mit der ursprünglichen Polarisationsebene oder dem Hauptschnitte des Analyseurs einen Winkel gleich 0 oder $\frac{\pi}{2}$, so ist in den Ausdrücken für die Intensität das die Wellenlänge enthaltende Glied für alle Strahlen der Null gleich, und folglich sind die beiden Bilder ganz und gar achromatisch.

Die günstigsten Bedingungen für das Entstehen der Farben treten ein, wenn gleichzeitig $i = \frac{\pi}{4}$ und $s = 0$ oder $s = \frac{\pi}{2}$.

Mittelst der für die Wegdifferenz $O - E$ parallel zur Achse geschnittener Platten gefundenen Ausdrücke (250) findet man als Gleichung der isochromatischen Curven

$$\frac{\sqrt{1-b^2 \sin^2 I}}{b} - \frac{\sqrt{1-(a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega) \sin^2 I}}{a} = \frac{k\lambda}{2\varepsilon}.$$

Diese Gleichung wird mit Rücksicht darauf, dass der Incidenzwinkel I für alle wahrnehmbaren Theile des Interferenzbildes sehr klein ist,

$$\frac{1-\frac{b^2}{2}\sin^2 I}{b} - \frac{1-\frac{1}{2}(a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega) \sin^2 I}{a} = \frac{k\lambda}{2\varepsilon},$$

oder

$$\frac{a-b}{ab} + \frac{(a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega - ab) \sin^2 I}{2a} = \frac{k\lambda}{2\varepsilon},$$

$$\frac{a-b}{ab} + \frac{b[a(a-b) \sin^2 \omega - b(a-b) \cos^2 \omega] \sin^2 I}{2ab} = \frac{k\lambda}{2\varepsilon}$$

und schliesslich

$$1 + \frac{b}{2}(a \sin^2 \omega - b \cos^2 \omega) \sin^2 I = \frac{ab}{a-b}\frac{k\lambda}{2\varepsilon} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

Legt man die x-Achse parallel zum Hauptschnitte der Platte, so hat man

$$tang\, I = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{d}$$

$$tang\, \omega = \frac{y}{x},$$

und

$$\sin \omega = \frac{y}{d\, tang\, I}$$

$$\cos \omega = \frac{x}{d\, tang\, I}.$$

Da I stets sehr klein ist, hat man ferner

$$\sin \omega \sin I = \frac{y}{d}, \quad \cos \omega \sin I = \frac{x}{d}.$$

Setzt man dies in die Gleichung der isochromatischen Linie, so nimmt dieselbe die Form an

$$\frac{b}{2d^2}(ay^2 - bx^2) = \frac{ab}{a-b}\frac{k\lambda}{2\varepsilon} - 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Die isochromatischen Linien sind also Hyperbeln, deren Achsen mit der Achse des Krystalls Winkel gleich 0 und $\frac{\pi}{2}$ einschliessen, und deren Asymptoten der Gleichung

$$y = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}\, x$$

entsprechen.

Ist k negativ oder positiv, aber von geringem absolutem Werthe, so ist die zweite Seite der Gleichung (2) negativ, folglich die reelle Achse der Hyperbel parallel der Achse des Krystalls. Ist k positiv und grösser als nöthig ist, die rechte Seite der Gleichung (1) der Null gleich zu machen, so ist diese Seite der Gleichung positiv und die Achse der isochromatischen Hyperbeln ist normal zur Achse des Krystalls.

Die Gleichung (1) lässt erkennen, dass für sehr kleine $sin^2 I$, d. i. für den wahrnehmbaren Theil des Interferenzbildes k eine ziemlich grosse Zahl sein muss, wenigstens wenn ε oder $a-b$ nicht sehr klein sind. Ist also die Platte nicht sehr dünn oder sehr schwach doppeltbrechend, so entsprechen die wahrnehmbaren isochromatischen Curven ziemlich hohen Werthen von k. Es folgt hieraus, dass an einer Stelle, an welcher irgend eine Farbe ein Maximum der Intensität hat, eine nahe benachbarte Farbe ein Minimum der Intensität haben wird, und dass folglich im Allgemeinen das weisse Licht keine merkliche Farbenentwickelung geben wird. Aus diesem Grunde wendet man, um die Hyperbeln einer parallel der Achse geschnittenen Krystallplatte wahrzunehmen, bei dickeren Platten monochromatisches Licht an.

269. Bestimmung des Zeichens eines einachsigen Krystalls nach Grailich.

Krystallplatten, welche parallel der Achse geschnitten sind, zeigen die besprochenen Hyperbeln. Grailich bediente sich dieser Hyperbeln, um mittelst einer Hilfsplatte von bekanntem Zeichen das Zeichen eines gegebenen einachsigen Krystalls zu bestimmen. Zu diesem Zwecke bringt man vor die zu untersuchende Platte B eine sehr schwach doppeltbrechende, senkrecht zur Achse geschnittene Platte A von bekanntem Zeichen. Liegt die Platte A parallel der Platte B, so gehen die Strahlen nahe senkrecht durch die Platte A und erfahren folglich eine nur sehr kleine gegenseitige Wegdifferenz. Die Hyperbeln werden nur unmerklich verändert.

Setzen wir nun zunächst voraus, dass die beiden Platten dasselbe Zeichen haben. Dreht man die Platte A um eine auf dem Hauptschnitte der Platte B senkrechte Achse, so fallen die Hauptschnitte der beiden Platten zusammen, wenigstens für Strahlen, welche der Achse des divergenten Strahlenbüschels nahe liegen. Die ordentlichen Strahlen der ersten Platte bleiben also ordentliche Strahlen auch in der zweiten, und die ausserordentlichen bleiben ausserordentliche. Es folgt, dass die Wegdifferenz sich mit der Neigung der Platte A vergrössert, und dass folglich die Hyperbeln sich verengern oder verschwinden, wenn sie sichtbar waren.

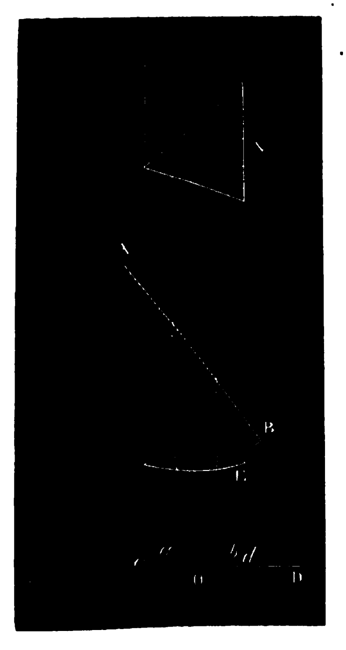
Dreht man hingegen die Platte A um eine dem Hauptschnitte der Platte B parallele Achse, so stehen die Hauptschnitte der beiden Platten

auf einander senkrecht; die ordentlichen Strahlen der Platte A werden ausserordentliche Strahlen in der Platte B, und die ausserordentlichen werden ordentliche. Die Drehung der Platte A bewirkt also in diesem Falle eine Verminderung der Wegdifferenz und folglich eine Verbreiterung der Hyperbeln, so dass dieselben sichtbar werden, wenn sie es früher nicht waren. Genau die entgegengesetzten Resultate erhält man, wenn die Platten verschiedene Zeichen haben. Man pflegt nur jene Versuche zu benutzen, welche eine Verbreiterung der Hyperbeln ergeben, und man sieht, dass die beiden Platten gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben, je nachdem diese Verbreiterung bei einer Drehung um eine mit dem Hauptschnitte der zu untersuchenden Platte parallele oder eine auf diesem Hauptschnitte senkrechte Achse erfolgt.

270. Verfahren, um zu prüfen, ob eine Platte der Achse parallel ist, nach Soleil.

Soleil erfand ein Verfahren, mit grosser Genauigkeit zu prüfen, ob eine Krystallplatte der Achse parallel ist. Ein solches Verfahren ist von grossem Werthe, wenn es sich darum handelt, einen Babinet'schen Compensator oder einen ähnlichen Apparat herzustellen.

Fig. 30.



Man prüft zunächst die Platte nach dem gewöhnlichen Verfahren auf den Planparallelismus. Hierauf bringt man dieselbe in den Nörremberg'schen Polarisationsapparat. Dieser Apparat ist in Fig. 30 dargestellt. Ein Bündel paralleler Strahlen wird von einer Glasplatte AB unter dem Winkel der totalen Polarisation vertical abwärts reflectirt und durch eine Linse E in O gesammelt. Der Brennpunkt O befindet sich auf einem horizontalen Spiegel CD. Auf diesem liegt ein $\frac{\lambda}{4}$-Blättchen cd, und auf diesem wieder die zu prüfende Platte ab. Die Strahlen gehen vertical abwärts durch die Linse E, sodann durch die Platten ab und cd, und werden vom Spiegel CD ohne merkliche Alteration ihres Polarisationszustandes zurückgeworfen. Sie gehen hierauf neuerdings durch die Platten cd und ab und durch die Linse E. Nach ihrem Austritte aus der Linse E sind die Strahlen wieder parallel, gehen durch

die Glasplatte AB ohne merkliche Aenderung ihres Polarisationszustandes und fallen schliesslich auf einen Analyseur N. Das $\frac{\lambda}{4}$-Blättchen wird so gelegt, dass sein Hauptschnitt mit jenem der zu prüfenden Platte einen Winkel $= \frac{\pi}{4}$ einschliesst.

Indem das einfallende Strahlenbüschel durch die Platte ab geht, zerlegt es sich in ein ordentliches, im Hauptschnitte der Platte polarisirtes und ein ausserordentliches, senkrecht zum Hauptschnitte polarisirtes. Jedes der beiden Büschel geht zweimal durch das $\frac{\lambda}{4}$-Blättchen. Die Wirkung ist dieselbe, als hätte das Glimmerblättchen die doppelte Dicke, die Polarisationsebene jedes der beiden Strahlenbüschel wird um 90 Grade gedreht. Indem die beiden Strahlenbüschel die Platte ab zum zweiten Male durchsetzen, geht jenes Büschel, welches beim ersten Durchgange das ordentliche war, als ausserordentliches, und jenes, welches das ausserordentliche war, als ordentliches. Ist die Platte ab genau parallel der Achse, so sind die beiden Büschel nach ihrem Austritte rechtwinkelig polarisirt und haben keinen Gangunterschied, da jedes derselben in der Platte ab als ausserordentliches und als ordentliches Büschel denselben Weg durchlaufen hat. Der Analyseur zeigt daher keine Farbenentwickelung.

Anders verhält es sich, wenn die Platte ab gegen die Achse geneigt ist. Bezeichnen wir durch O und E die optischen Längen der vom ordentlichen und ausserordentlichen Strahle beim ersten Durchgange durch die Platte ab in dieser zurückgelegten Wege und durch O' und E' die sich auf den zweiten Durchgang durch diese Platte beziehenden. Nach dem doppelten Durchgange der Strahlen durch die Platte ab ist die Wegdifferenz der ordentlichen und ausserordentlichen Strahlen $O + E' - (O' + E)$. Die Wege O und O' sind gleich, nicht aber E und E'. Ist δ der Winkel zwischen den Normalen der Platte und der Achse, so hat man nach den früher entwickelten Formeln

$$E = \varepsilon \cot R' \sin I = \varepsilon \frac{(a^2 - b^2) \sin\delta \cos\delta \cos\omega \sin I + \sqrt{M}}{a^2 \sin^2\delta + b^2 \cos^2\delta}.$$

Die Grösse M unter dem Wurzelzeichen enthält $\sin\delta$ und $\cos\delta$ nur im Quadrate. Um E' zu berechnen, hat man zu beachten, dass die Strahlen in diesem Falle in entgegengesetzter Richtung durch die Platte gehen, und folglich $\pi - \delta$ für δ zu setzen. Hierdurch wird jedoch der Werth von M nicht geändert.

Man hat demnach

$$E' = \varepsilon \frac{-(a^2 - b^2) \sin\delta \cos\delta \cos\omega \sin I + \sqrt{M}}{a^2 \sin^2\delta + b^2 \cos^2\delta}$$

und für die Wegdifferenz der beiden vom Analyseur aufgenommenen Strahlenbündel

$$E - E' = \frac{2\,\varepsilon\,(a^2 - b^2)\sin\delta\cos\delta\cos\omega\sin I}{a^2\sin^2\delta + b^2\cos^2\delta}.$$

Man erhält die isochromatischen Linien des entstehenden Interferenzbildes, wenn man diesen Ausdruck einer Constanten gleichsetzt, was darauf hinauskommt, $\cos\omega\sin I$ oder $\frac{x}{d}$ einer Constanten gleichzusetzen. Die isochromatischen Linien bilden also eine Schaar gerader, auf dem Hauptschnitte der Platte ab senkrechter Linien. Ist also die Platte nicht genau parallel der Achse, so wird man im Analyseur geradlinige, senkrecht zum Hauptschnitte der zu prüfenden Platte verlaufende, farbige Streifen wahrnehmen.

271. Superposition zweier der Achse paralleler Platten.

Wir denken uns zwei Platten aus demselben Krystall parallel der Achse und gleich dick so über einander gelegt, dass die Hauptschnitte einen rechten Winkel einschliessen. Die ordentliche Welle des ersten Krystalls wird im zweiten Krystalle zu einer ausserordentlichen Welle und umgekehrt. Die Wegdifferenz der beiden aus der Doppelplatte tretenden Wellen ist $O + E' - (O' + E)$. Da aber $O' = O$, so ist die Wegdifferenz gleich $E' - E$. E' wird erhalten, wenn man in dem für E aufgestellten Ausdrucke ω durch $\frac{\pi}{2} - \omega$ ersetzt. Man erhält

$$E' - E = \frac{\varepsilon}{a}\Big(\sqrt{1 - (a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega)\sin^2 I}$$
$$- \sqrt{1 - (a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega)\sin^2 I}\Big).$$

Entwickelt man die Wurzeln und vernachlässigt die Glieder, welche $\sin I$ in einer höheren als der zweiten Potenz enthalten, in Rücksicht darauf, dass I stets sehr klein ist, so erhält man

$$E' - E = \frac{\varepsilon}{2\,a}(a^2 - b^2)(\sin^2\omega - \cos^2\omega)\sin^2 I.$$

Die Gleichung der isochromatischen Curven ist

$$E' - E = \frac{k\,\lambda}{2},$$

also in Rücksicht auf den für $E' - E$ gefundenen Werth:

$$(a^2 - b^2)(\sin^2\omega - \cos^2\omega)\sin^2 I = \frac{a\,k\,\lambda}{\varepsilon}.$$

Ersetzt man $\sin\omega\sin I$ durch $\frac{y}{d}$ und $\cos\omega\sin I$ durch $\frac{x}{d}$, so erhält man schliesslich

$$y^2 - x^2 = \frac{d^2}{a^2 - b^2} \frac{a k \lambda}{\varepsilon}.$$

Die isochromatischen Linien sind also in dem betrachteten Falle gleichseitige Hyperbeln, deren Achsen den Hauptschnitten parallel sind. Die Asymptoten halbiren die Winkel der Hyperbelachsen, sind selbst isochromatische Linien, entsprechend dem Nullwerthe von k, und da ihre Gleichungen die Wellenlänge λ nicht enthalten, sind sie überdies auch achromatische Linien. Ist der Hauptschnitt des Analyseurs mit der ursprünglichen Polarisationsebene parallel, oder steht er auf ihr senkrecht, so erscheinen die beiden Asymptoten in einem der beiden Bilder des Analyseurs weiss, im anderen schwarz. Man sieht, dass eine solche Doppelplatte einfachere Phänomene giebt als eine einzige Platte.

272. Beliebig gegen die Achse geneigte Platte.

Hat man eine beliebig orientirte Platte, benutzt man die in (251) für die schiefe Incidenz abgeleiteten Formeln und setzt

$$(a^2 - b^2) \sin\delta \cos\delta \cos\omega \sin I = M,$$

so wird die Gleichung der isochromatischen Linien

$$k \frac{\lambda}{2\varepsilon} = \frac{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 I}}{b} - \frac{M}{a^2 \sin^2\delta + b^2 \cos^2\delta}$$
$$+ \frac{\sqrt{M^2 + (a^2 \sin^2\delta + b^2 \cos^2\delta)\{1 - [a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2\delta \cos^2\omega] \sin^2 I\}}}{a^2 \sin^2\delta + b^2 \cos^2\delta}$$

Der Winkel I ist stets sehr klein; wenn folglich die Grössen $a^2 - b^2$, $\sin\delta$ und $\cos\delta$ nicht sehr klein sind, also wenn die Platte nicht sehr schwach doppeltbrechend ist und wenn dieselbe nicht nahe parallel oder senkrecht zur Achse ist, so kann man die Glieder mit $\sin^2 I$ vernachlässigen. Die Gleichung der isochromatischen Linien wird dann

$$\cos\omega \sin I = const$$

oder

$$x = const.$$

Bildet also die Platte mit der Achse einen Winkel, welcher sich beträchtlich von 0 und $\frac{\pi}{2}$ unterscheidet, so sind die isochromatischen Linien angenähert Gerade, welche auf dem Hauptschnitte der Platte senkrecht stehen.

273. Superposition zweier beliebiger identischer Platten.

Man findet in diesem Falle, wenn die Hauptschnitte auf einander senkrecht stehen als Gleichung der isochromatischen Linien

$$E' - E = \frac{k\lambda}{2}.$$

E' ergiebt sich aus E, wenn man ω durch $\frac{\pi}{2} - \omega$ ersetzt; vernachlässigt man die Glieder mit $sin^2 I$, was voraussetzt, dass δ von 0 und $\frac{\pi}{2}$ merklich verschieden ist, so hat man

$$E' - E = \frac{\varepsilon (a^2 - b^2) \sin\delta \cos\delta (\sin\omega - \cos\omega) \sin I}{a^2 \sin^2\delta + b^2 \cos^2\delta}.$$

Die isochromatischen Linien sind also gegeben durch

$$\sin I (\sin\omega - \cos\omega) = const$$

oder

$$y - x = const.$$

Man erhält also gerade Linien, parallel der Winkelhalbirenden der Hauptschnitte der beiden Platten, unter der Voraussetzung, dass die Platten weder nahezu parallel noch nahezu senkrecht zur Achse sind. Die Winkelhalbirende ist selbst eine isochromatische Linie, und da sie einer Wegdifferenz gleich Null entspricht, eine achromatische Linie. Ist der Hauptschnitt des Analyseurs parallel oder senkrecht zur ursprünglichen Polarisationsebene, so ist die Winkelhalbirende in einem der Bilder weiss und im anderen schwarz.

274. Polariskop von Savart.

Savart's Polariskop besteht aus zwei identischen Quarzplatten, deren Hauptschnitte einen rechten Winkel bilden, und einem Analyseur, dessen Hauptschnitt mit jenen der Quarzplatten Winkel von 45 Graden bildet. Nach (273) nimmt man bei Anwendung polarisirten divergenten Lichtes eine Schaar paralleler Streifen wahr.

Es ist nicht richtig, wie zuweilen angeführt wird, dass die Streifen der ursprünglichen Polarisationsebenen parallel sind; nur die Empfindlichkeit des Polariskopes vergrössert sich in dem Maasse, als der Winkel zwischen der ursprünglichen Polarisationsebene und der Richtung des Streifensystems kleiner wird.

Das Savart'sche Polariskop ist eines der einfachsten und empfindlichsten Instrumente. Man kann mit demselben selbst sehr kleine Spuren von Polarisation der einfallenden Strahlen erkennen. Wild hat es bei der Construction seines Polaristrobometers benutzt, welches Instrument die geringste Drehung der Polarisationsebene merklich macht.

Die Quarzplatten müssen mit der Achse einen wenig von 45 Graden verschiedenen Winkel einschliessen. Wegen des Drehungsvermögens des

Quarzes muss man vermeiden, dass jener Winkel sich einem rechten nähere.

275. Superposition zweier beliebiger Platten.

Gehen die Strahlen nach einander durch zwei beliebig orientirte Platten, deren Hauptschnitte einen beliebigen Winkel bilden, so erhält man Interferenzbilder, welche von Langberg[1]) studirt sind. Die Theorie stösst auf keine Schwierigkeiten. Es ergab sich eine experimentelle Verification der Gesetze der Doppelbrechung in einachsigen Krystallen, ähnlich der von Schwerd für die Beugung durchgeführten. Meist zeigt das Gesichtsfeld zwei sich schneidende Fransensysteme.

276. Interferenzbilder der zweiachsigen Krystalle.

Bei zweiachsigen Krystallen gelten in Bezug auf die Intensitäten der beiden Bilder noch die für die einachsigen abgeleiteten Formeln, wenn man nur unter i den Winkel zwischen der ursprünglichen Polarisationsebene und der Polarisationsebene jenes der beiden Strahlen versteht, welcher sich am meisten dem Gesetze des Cartesius nähert. Auf diesen Strahl, welchen man in Uebertragung den ordentlichen Strahl nennt, bezieht sich die Formel mit ω^2. Bei den zweiachsigen Krystallen ist also der Hauptschnitt die Polarisationsebene des ordentlichen Strahles und es folgt, dass die den verschiedenen Strahlen entsprechenden Hauptschnitte nicht mehr sämmtlich durch eine und dieselbe Gerade gehen, wie dies bei den einachsigen Krystallen allerdings stattfindet.

Die achromatischen Linien sind immer noch bestimmt durch die Gleichung:

$$\sin 2\,i = 0, \qquad \sin 2\,(i - s) = 0,$$

entsprechen also jenen Strahlen, deren Polarisationsebene entweder mit der ursprünglichen Polarisationsebene oder mit dem Hauptschnitte des Analyseurs einen Winkel gleich 0 oder 90° bilden.

Wir werden uns auf die Betrachtung des Falles beschränken, wo die Krystallplatte auf der Achse der kleinsten Elasticität senkrecht steht. Die Resultate, zu welchen man in diesem Falle gelangt, übertragen sich mit geringer Veränderung auf jenen Fall, wo die Platte auf der Achse der grössten Elasticität senkrecht steht. Hierbei werden wir wiederholt Gelegenheit haben, uns auf ein in der Theorie der Doppelbrechung abgeleitetes Theorem (191) zu beziehen. Legt man durch die Normale einer ebenen Welle und je eine der optischen Achsen zwei Ebenen, und

---

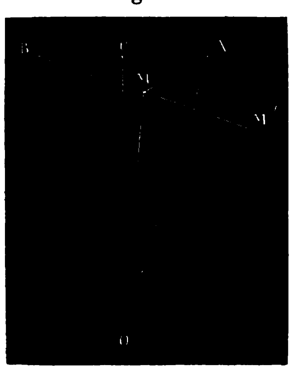
[1]) Pogg. Ergbd. I.

legt man durch dieselbe Normale zwei weitere Ebenen, welche die Winkel jener beiden Ebenen halbiren, so sind die beiden winkelhalbirenden Ebenen die Polarisationsebenen des ordentlichen und des ausserordentlichen Strahles der ebenen Welle.

277. Achromatische Linien, wenn die optischen Achsen nahezu mit der Normale der Platte zusammenfallen.

Die Normale der Platte fällt nach der Voraussetzung, die wir jetzt machen wollen, mit der Achse der kleinsten Elasticität zusammen, halbirt den Winkel der optischen Achsen und ist identisch mit der Mittellinie (182). Wir setzen überdies voraus, dass der Winkel der optischen Achsen sehr klein sei (Fig. 31).

Fig. 31.



Um die Gestalt der achromatischen Linien zu bestimmen, legen wir von einem Punkte O aus die Geraden OA und OB parallel den optischen Achsen, die Gerade OC parallel der Mittellinie, und die Ebene BAM senkrecht zu OC. Die Polarisationsebenen einer zu OM senkrechten ebenen Welle gehen durch OM und halbiren die Winkel der Ebenen OMA und OMB. Da wir den Einfallswinkel I stets als sehr klein voraussetzen, ist der Winkel MOC sehr klein. Es folgt, dass die Spuren der beiden Polarisationsebenen auf ABM mit jenen beiden Geraden zusammenfallen, welche die Winkel AMB und AMM' halbiren.

Um also die achromatischen Linien zu finden, haben wir jene Lagen des Punktes M aufzusuchen, für welche die den Winkel AMB halbirende Gerade mit der ursprünglichen Polarisationsebene oder dem Hauptschnitte des Analyseurs einen Winkel gleich 0^0 oder 90^0 bildet. Nehmen wir die Ebene AMB zur Ebene der Figur, den Punkt C zum Ursprunge und die Spur der ursprünglichen Polarisationsebene auf AMB zur x-Achse (Fig. 32 a. f. S.). Ist die Winkelhalbirende von AMB oder AMM' der x-Achse parallel, so sieht man unmittelbar, dass die Winkel MDx und MEx supplementär sind. Bezeichnet man also durch x, y, α, β die Coordinaten von M und A, so hat man

$$tang\, MDx = \frac{y-\beta}{x-\alpha}, \qquad tang\, MEx = \frac{y+\beta}{x+\alpha},$$

und da

$$tang\, MDx = -\, tang\, MEx,$$

erhält man als Gleichung der achromatischen Linie

$$\frac{y+\beta}{x+\alpha}+\frac{y-\beta}{x-\alpha}=0$$

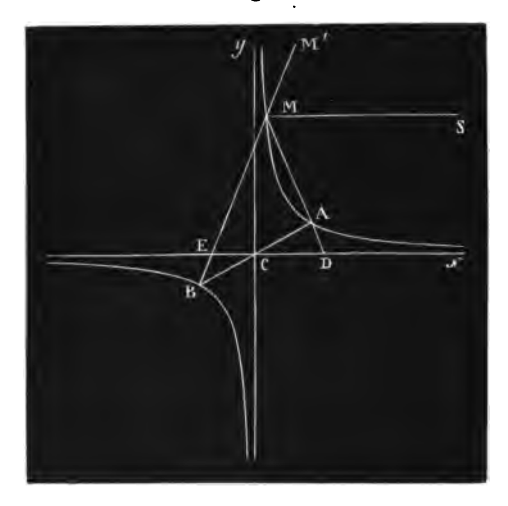
oder

$$xy=\alpha\beta,$$

die Gleichung einer Hyperbel, welche durch A und B geht und deren Asymptoten auf die Coordinatenachsen fallen.

Gleicherweise lässt sich zeigen, dass, wenn die Winkelhalbirende von AMB mit dem Hauptschnitte des Analyseurs einen Winkel gleich 0^0 oder 90^0 bildet, die achromatische Linie eine Hyperbel ist, welche durch A und B geht, und deren Asymptoten mit dem Hauptschnitte des Analyseurs Winkel gleich 0^0 und 90^0 einschliessen.

Fig. 32.



Dies zusammengefasst: Zieht man von einem Punkte O aus zwei Gerade OA, OB parallel den optischen Achsen und eine Gerade OC parallel der Mittellinie; zieht man ferner von dem Punkte O aus die Normalen aller ebenen Wellen, welche achromatische Strahlen geben, so liegen die Durchschnitte dieser Normalen mit einer zu OC senkrechten Ebene E auf zwei Hyperbeln, welche durch die Durchschnittspunkte der optischen Achsen mit der Ebene E gehen, und von welchen die eine zu Asymptoten den Durchschnitt der ursprünglichen Polarisationsebene mit der Ebene E und eine zu demselben senkrechte Gerade hat, die andere hingegen den Durchschnitt des Hauptschnittes des Analyseurs mit der Ebene E und eine zu demselben senkrechte Gerade.

Wir haben bisher nur die Strahlen im Inneren des Krystalls betrachtet. Um die Gestalt der achromatischen Linien zu bestimmen, wie sie den aus dem Krystalle getretenen Strahlen entspricht, bemerken wir, dass die Strahlen, welche das Phänomen hervorbringen, sämmtlich einen sehr kleinen Winkel mit der Normale der Platte bilden, so dass der Brechungsindex als constant angesehen werden kann. Es besteht also auch ein nahe constantes Verhältniss zwischen den Winkeln, welche die Plattennormale mit der Normale einer Welle im Krystalle einerseits und

mit der Normale dieser Welle nach dem Austritte aus dem Krystalle andererseits einschliesst. Die wahrnehmbaren achromatischen Linien sind demnach Hyperbeln, welche den mittelst der gebrochenen Wellennormalen construirten ähnlich sind.

Die achromatischen Linien bestehen also aus vier Hyperbelästen, welche sich zwei und zwei in den apparenten Endpunkten $A'B'$ der optischen Achsen kreuzen.

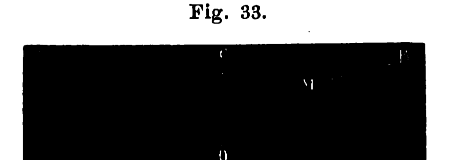
Die Asymptoten zweier dieser Hyperbeläste gehen durch C' und liegen parallel und senkrecht zur ursprünglichen Polarisationsebene; die Asymptoten der anderen gehen gleichfalls durch C' und liegen parallel und senkrecht zum Hauptschnitte des Analyseurs. Ist die ursprüngliche Polarisationsebene parallel oder senkrecht zur Ebene der optischen Achsen, so degenerirt eine der Hyperbeln in ein rechtwinkeliges Kreuz, dessen Arme mit der ursprünglichen Polarisationsebene Winkel gleich 0^0 und 90^0 bilden. Ebenso verhält es sich, wenn der Hauptschnitt des Analyseurs zur Ebene der optischen Achsen parallel oder senkrecht ist, wo dann die Arme des Kreuzes parallel und senkrecht zum Hauptschnitte des Analyseurs sind. Liegen die ursprüngliche Polarisationsebene und der Hauptschnitt des Analyseurs parallel oder stehen sie auf einander senkrecht, so reduciren sich die beiden Hyperbeln auf eine einzige Hyperbel. Ist der Hauptschnitt des Analyseurs zur ursprünglichen Polarisationsebene parallel oder senkrecht, und ist er gleichzeitig parallel oder senkrecht zur Ebene der optischen Achsen, so reducirt sich das System der achromatischen Linien auf ein einziges rechtwinkeliges Kreuz, weiss in einem der beiden Bilder, schwarz im anderen.

Bemerken wir schliesslich, dass die achromatischen Linien der zweiachsigen Krystalle dieselben Eigenschaften zeigen, wie jene der einachsigen. Entsteht eine achromatische Linie dadurch, dass ein einziger Factor des Productes $\sin 2\, i \sin 2\, (i - s)$ der Null gleich wird, so verwandelt sich bei Anwendung weissen Lichtes jede isochromatische Linie, indem sie die achromatische durchschneidet, in eine complementär gefärbte, und es verwandelt sich bei Anwendung homogenen Lichtes eine dunkle Linie in eine helle. Entstehen die achromatischen Linien dadurch, dass beide Factoren gleichzeitig der Null gleich werden, d. h. ist der Hauptschnitt des Analyseurs parallel oder senkrecht zur ursprünglichen Polarisationsebene, so behalten bei weissem Lichte die isochromatischen Linien ihre Farbe, und jede derselben erscheint bei Anwendung homogenen Lichtes durchaus als eine helle oder als eine dunkle Linie.

278. Achromatische Linien, wenn die optischen Achsen nahezu auf der Plattennormale senkrecht stehen.

Stehen die optischen Achsen nahezu auf der Plattennormale senkrecht, so ist die Achse der kleinsten Elasticität nicht mehr die Mittellinie und der Winkel AOB (Fig. 33) ist nahe gleich 180^0. Setzen wir wieder den Winkel MOC als sehr klein voraus, so ergiebt sich, dass jene beiden Ebenen, welche die Winkel der Ebenen OMA, OMB halbiren, d. i. die Polarisationsebenen des ordentlichen und ausserordentlichen Strahles, zur Ebene der optischen Achsen bezüglich nahe senkrecht und parallel sind, dass also diese beiden Polarisationsebenen für alle Strahlen, welche mit der Normale einen kleinen Winkel bilden, nahe dieselbe Lage haben. Ist einer dieser Strahlen senkrecht oder parallel zur ursprünglichen Polarisationsebene oder zum Hauptschnitte des Analyseurs polarisirt, so sind es alle und die Bilder erscheinen gänzlich farblos, wenigstens in der Nähe der Normale. Dies tritt ein, wenn die Ebene der optischen Achsen mit der ursprünglichen Polarisationsebene oder dem Hauptschnitte des Analyseurs parallel sind.

Fig. 33.



279. Isochromatische Linien, wenn die optischen Achsen mit der Normale einen sehr kleinen Winkel bilden.

Wir wollen nun die Gestalt der isochromatischen Linien berechnen, indem wir stets die Platte senkrecht zur Achse der kleinsten Elasticität voraussetzen und vorerst die Winkel der optischen Achsen mit der Normale als sehr klein voraussetzen, so dass die Achse der kleinsten Elasticität zugleich die Mittellinie ist.

Seien A der Winkel einer der optischen Achsen mit der Normale, und B der apparente Winkel dieser Achse mit der Normale, d. i. der Incidenzwinkel jenes Strahles, welcher längs der optischen Achse gebrochen wird. Man hat

$$\sin A = b \sin B$$

$$\sin A = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}.$$

Da wir den Winkel A als sehr klein voraussetzen, ist $a^2 - b^2$ sehr klein im Vergleiche mit $a^2 - c^2$, und die Platte verhält sich wie ein attractiver Krystall. Die Wegdifferenz $O - E$ ist das Product aus der Dicke ε der Platte und der Differenz der beiden Werthe von $\cot R \sin I$. Nach den in (253) entwickelten Formeln hat man

$$\cot^2 R \sin^2 I = \frac{a^2 + b^2 - \sin^2 I[b^2(a^2+c^2)\cos^2\theta + a^2(b^2+c^2)\sin^2\theta] \pm H}{2a^2b^2},$$

wenn

$$H^2 = \{a^2 - b^2 - \sin^2 I[b^2(a^2-c^2)\cos^2\theta + a^2(b^2-c^2)\sin^2\theta]\}^2 + 4a^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)\sin^2\theta\sin^2 I$$

gesetzt wird.

Da $\sin I$ als sehr klein und von derselben Grössenordnung wie A vorausgesetzt wird, indem nur solche Strahlen betrachtet werden, welche der Normale benachbart sind, so erkennt man, dass H^2 von derselben Grössenordnung wie $\sin^4 I$ ist. H und das Glied mit $\sin^2 I$ sind also sehr klein im Vergleiche mit $a^2 + b^2$, und man hat näherungsweise

$$\cot R \sin I = \frac{1}{ab\sqrt{2}}\left(\sqrt{a^2+b^2} - \frac{h\sin^2 I}{2\sqrt{a^2+b^2}} \pm \frac{H}{2\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

wo

$$h = b^2(a^2+c^2)\cos^2\theta + a^2(b^2+c^2)\sin^2\theta$$

gesetzt ist.

Man erhält für die Differenz der beiden Werthe von $\cot R \sin I$:

$$\cot R' \sin I - \cot R'' \sin I = \frac{H}{ab\sqrt{2(a^2+b^2)}}.$$

Die Gleichung der isochromatischen Linie ist demnach

$$\frac{\varepsilon H}{ab\sqrt{2(a^2+b^2)}} = K\frac{\lambda}{2},$$

wo

$$H^2 = \frac{k^2\lambda^2a^2b^2(a^2+b^2)}{2\varepsilon^2}.$$

Andererseits kann man für H^2 setzen:

$$H^2 = \{a^2 - b^2 + \sin^2 I[b^2(a^2-c^2) - c^2(a^2-b^2)\sin^2\theta]\}^2 - 4b^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)\cos^2\theta\sin^2 I,$$

oder, wenn $a^2 - b^2$ durch $(a^2 - c^2)\sin^2 A$ ersetzt wird,

$$H^2 = (a^2-c^2)^2\{[\sin^2 A + \sin^2 I(b^2 - c^2\sin^2 A\sin^2\theta)]^2 - 4b^2\cos^2\theta\sin^2 I\sin^2 A\}.$$

Vernachlässigt man die Glieder von höherer Ordnung als jener von $\sin^4 I$, so hat man

$$H^2 = (a^2-c^2)^2(\sin^4 A + b^4\sin^4 I + 2b^2\sin^2 A\sin^2 I - 4b^2\cos^2\theta\sin^2 I\sin^2 A),$$

oder, wenn das Glied $2\,b^2 \sin^2 A \sin^2 I$ mit $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ multiplicirt wird,

$$H^2 = (a^2 - c^2)^2 [\sin^4 A + b^4 \sin^4 I + 2\,b^2 (\sin^2\theta - \cos^2\theta) \sin^2 A \sin^2 I].$$

Der Winkel θ ist jener Winkel, welchen die Einfallsebene mit der Ebene der optischen Achsen bildet. Nimmt man also die Spur der Achsenebene auf der Bildebene zur x-Achse und bezeichnet man mit D die Entfernung der Bildebene vom optischen Mittelpunkte der Linse, welche die parallel durch den Krystall gehenden Strahlen in einem Punkte der Bildebene sammelt, so hat man

$$\sin I \cos\theta = \frac{x}{D}, \qquad \sin I \sin\theta = \frac{y}{D}$$

$$\sin I = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{D}.$$

Bezeichnet man ferner mit α die Entfernung jenes Punktes der Bildebene, durch welchen die optische Achse der Linse geht, von der apparenten Spur einer der optischen Achsen auf der Bildebene so hat man

$$\tang \beta = \frac{\alpha}{D},$$

oder da B sehr klein ist,

$$\sin B = \frac{\alpha}{D};$$

man erhält demnach

$$\sin A = b \sin B = \frac{b\,\alpha}{D}.$$

Substituirt man die für $\sin I$, $\sin I \cos\theta$, $\sin I \sin\theta$ und $\sin A$ gefundenen Werthe in den Ausdruck für H^2, so ergiebt sich

$$H^2 = \frac{(a^2 - c^2)^2}{D^4} [b^4 \alpha^4 + b^4 (x^2 + y^2)^2 + 2\,b^4 . \alpha^2 (y^2 - x^2)],$$

so dass die Gleichung der isochromatischen Linien auf die Form:

$$\frac{k^2 \lambda^2 a^2 (a^2 + b^2) D^4}{2\,\varepsilon^2 b^2 (a^2 - c^2)^2} = (x^2 + y^2 + \alpha^2)^2 - 4\,\alpha^2 x^2$$

gebracht werden kann, oder schliesslich auf die Form:

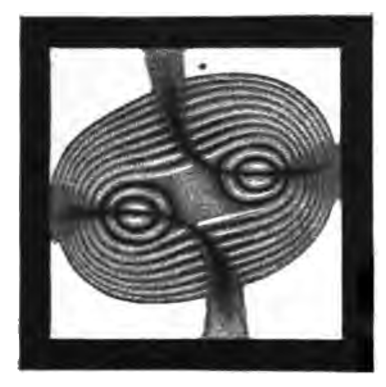
$$\frac{k^2 \lambda^2 a^2 (a^2 + b^2) D^4}{2\,\varepsilon^2 b^2 (a^2 - c^2)^2} = (x^2 + 2\,\alpha x + \alpha^2 + y^2)(x^2 - 2\,\alpha x + \alpha^2 + y^2)$$

$$= [(x + \alpha)^2 + y^2][(x - \alpha)^2 + y^2].$$

Die isochromatischen Linien sind also Lemniscaten, deren Brennpunkte die Spuren der apparenten optischen Achsen auf der Bildebene und deren Symmetrieachsen die Spur der Ebene der optischen Achsen auf der Bildebene und eine hierzu senkrechte Gerade sind.

Die Fig. 34 zeigt die Gestalt der isochromatischen Linien in dem in Rede stehenden Falle. Die isochromatischen Linien sind durchschnitten von den hyperbolischen achromatischen Linien. In der Figur ist der Hauptschnitt des Analyseurs parallel oder senkrecht zur ursprünglichen Polarisationsebene vorausgesetzt; das System der achromatischen Linien reducirt sich daher auf zwei hyperbolische Aeste, welche durch die Spuren der apparenten optischen Achsen auf der Bildebene gehen, und jede Lemniscate zeigt ihrer ganzen Ausdehnung nach dieselbe Farbe.

Fig. 34.



W. Herschel[1]) hat zuerst bemerkt, dass die zweiachsigen Krystalle lemniscatenförmige Interferenzlinien geben können, die vollständige Theorie dieser Phänomene rührt von Senarmont her.

280. Isochromatische Linien, wenn die optischen Achsen mit der Normale einen Winkel nahe gleich 90° bilden.

Betrachtet man das Interferenzbild nur in der Nähe der Normale, d. h. nimmt man den Incidenzwinkel I stets als sehr klein an, so ist $\cos A$ der Null gleich, und da

$$\cos A = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}},$$

so folgt, dass $b^2 - c^2$ gegen $a^2 - c^2$ sehr klein ist. In dem Ausdrucke für H^2 sind die Glieder, welche $b^2 - c^2$ mit $\sin^2 I$ multiplicirt enthalten, sehr klein gegen die anderen und dürfen vernachlässigt werden. Man hat daher näherungsweise

$$H = a^2 - b^2 - b^2 (a^2 - c^2) \cos^2 \theta \sin^2 I.$$

In dem Ausdrucke für $\cot^2 R \sin^2 I$ kann

$$a^2 (b^2 + c^2) \sin^2 \theta \sin^2 I$$

durch

$$2\, a^2 c^2 \sin^2 \theta \sin^2 I$$

ersetzt werden, denn man hat

$$a^2 (b^2 + c^2) \sin^2 \theta \sin^2 I = a^2 (b^2 - c^2) \sin^2 \theta \sin^2 I + 2\, a^2 c^2 \sin^2 \theta \sin^2 I,$$

und das Glied mit $b^2 - c^2$ kann wegen der Kleinheit dieses Factors vernachlässigt werden. Man erhält demnach

---

[1]) *Phil. Trans.* 1820, p. 45.

$$cot^2 R \sin^2 I = \frac{a^2 + b^2 - \sin^2 I\,[b^2(a^2 + c^2)\cos^2\theta + 2\,a^2 c^2 \sin^2\theta] \pm H}{2\,a^2 b^2},$$

und wenn für H sein Werth gesetzt wird,

$$cot^2 R' \sin^2 I = \frac{a^2 - a^2(b^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)\sin^2 I}{a^2 b^2},$$

$$cot^2 R'' \sin^2 I = \frac{b^2 - c^2(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)\sin^2 I}{a^2 b^2}.$$

Da I stets sehr klein ist, kann man aus diesen Ausdrücken näherungsweise die Wurzel ziehen und erhält:

$$cot R' \sin I = \frac{1}{ab}\left[a - \frac{a}{2}(b^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)\sin^2 I\right],$$

$$cot R'' \sin I = \frac{1}{ab}\left[b - \frac{c^2}{2b}(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)\sin^2 I\right].$$

Für $O - E$ ergiebt sich der folgende Werth:

$$\frac{\varepsilon}{ab}\left\{a - b - \left[\frac{a}{2}(b^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta) - \frac{c^2}{2b}(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)\right]\sin^2 I\right\}.$$

Nimmt man zur x-Achse die Spur der Ebene der optischen Achsen auf der Bildebene, so kann man $\cos\theta \sin I$ durch $\frac{x}{D}$ und $\sin\theta \sin I$ durch $\frac{y}{D}$ ersetzen. Hierdurch erhält man als Gleichung der isochromatischen Linien

$$\frac{\varepsilon}{2b}\left[a - b + \frac{1}{2b}(b^2c^2 - ab^3)\frac{x^2}{D^2} + \frac{c^2}{2b}(b^2 - ab)\frac{y^2}{D^2}\right] = k\,\frac{\lambda}{2}$$

oder

$$b^2(c^2 - ab)\,x^2 + c^2(a^2 - ab)\,y^2 = 2\,D^2 b\left[\frac{abk\lambda}{2\,\varepsilon} - (a - b)\right].$$

Da stets

$$b^2(c^2 - ab) < 0 \qquad c^2(a^2 - ab) > 0,$$

so stellt diese Gleichung eine Schaar Hyperbeln dar, deren Achsen parallel und senkrecht zur Ebene der optischen Achsen liegen. Da die rechte Seite der Gleichung positiv oder negativ sein kann, können auch die reellen Achsen dieser Hyperbeln zur Ebene der optischen Achsen parallel oder senkrecht liegen. Achromatische Linien kommen in dem betrachteten Falle nicht vor.

281. Isochromatische Linien, wenn die optischen Achsen mit der Normale einen Winkel bilden, welcher weder nahe gleich 0°, noch nahe gleich 90° ist.

Schliesslich wollen wir den Fall untersuchen, wo die optischen Achsen mit der Plattennormale einen beliebigen Winkel bilden, welcher

sich weder einem Winkel gleich 0^0, noch einem Winkel gleich 90^0 nähert. Die Vereinfachungen, welche sich in den beiden früher betrachteten Fällen daraus ergeben haben, dass entweder $\sin A$ oder $\cos A$ sehr klein waren, fallen nun hinweg. Wir beschränken uns darauf, die Gestalt der isochromatischen Linien in der Nähe der Plattennormale und in der Nähe der optischen Achsen zu bestimmen.

Nehmen wir zunächst den Winkel I als sehr klein an, d. h. betrachten wir das Interferenzbild nur in der Nähe der Plattennormale. Man kann unter dieser Voraussetzung in dem Ausdrucke für H^2 das Glied mit $\sin^4 I$ vernachlässigen und erhält

$$H^2 = (a^2 - b^2) - 2(a^2 - b^2)\sin^2 I[b^2(a^2 - c^2)\cos^2\theta + a^2(b^2 - c^2)\sin^2\theta] \\ + 4a^2(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)\sin^2\theta\sin^2 I.$$

Indem man $a^2 - b^2$ und $b^2 - c^2$ als sehr gross gegen $\sin^2 I$ ansehen darf, kann man aus der rechten Seite dieser Gleichung die Wurzel näherungsweise ziehen und erhält

$$H = a^2 - b^2 - \sin^2 I\,[b^2(a^2 - c^2)\cos^2\theta + a^2(b^2 - c^2)\sin^2\theta] \\ + 2a^2(b^2 - c^2)\sin^2\theta\sin^2 I \\ = a^2 - b^2 - \sin^2 I\,[b^2(a^2 - c^2)\cos^2\theta - a^2(b^2 - c^2)\sin^2\theta].$$

Setzt man diesen Werth in den Ausdruck für $\cot^2 R\sin^2 I$, so erhält man

$$\cot^2 R'\sin^2 I = \frac{1 - \sin^2 I(b^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)}{b^2}$$

$$\cot^2 R''\sin^2 I = \frac{1 - \sin^2 I(c^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)}{a^2},$$

und, wenn man näherungsweise die Wurzel zieht,

$$\cot R'\sin I = \frac{1}{b}\left[1 - \frac{\sin^2 I}{2}(b^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)\right]$$

$$\cot R''\sin I = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{\sin^2 I}{2}(c^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)\right].$$

Die Wegdifferenz ist also

$$O - E = \varepsilon\left\{\frac{1}{b} - \frac{1}{a} - \frac{\sin^2 I}{2}\left[\left(b - \frac{c^2}{a}\right)\cos^2\theta + \left(\frac{c^2}{b} - a\right)\sin^2\theta\right]\right\},$$

und die Gleichung der isochromatischen Linien wird, wenn man $\sin I\cos\theta$ durch $\frac{x}{D}$ und $\sin I\sin\theta$ durch $\frac{y}{D}$ ersetzt,

$$a - b - \frac{x^2}{2D}(ab^2 - bc^2) - \frac{y^2}{2D}(ac^2 - a^2 b) = \frac{kab\lambda}{2\varepsilon}$$

oder

$$bx^2 - ay^2 = \frac{2D}{ab - c^2}\left(a - b - \frac{kab\lambda}{2\varepsilon}\right).$$

Die isochromatischen Linien sind also Hyperbeln, deren Achsen zur Ebene der optischen Achsen parallel oder senkrecht sind, und zwar kann die reelle Achse die eine oder andere Richtung haben. Diese Hyperbeln sind mit jenen des vorher betrachteten Falles nicht identisch, so lange $\cos A$ nicht sehr klein ist.

Betrachten wir nun das Interferenzbild in der Nähe der optischen Achsen, d. h. nehmen wir an, dass der Winkel I sich wenig von B unterscheide und dass gleichzeitig θ sehr klein sei. Gehen die Strahlen in der Richtung der Achse, so ist die Wegdifferenz gleich Null. Ist also $I = B$ und $\theta = 0$, so ist auch $H = 0$ und der Ausdruck für $\cot^2 R \sin^2 I$ reducirt sich auf

$$\cot^2 R \sin^2 I = \frac{a^2 + b^2 - b^2(a^2 + c^2)\sin^2 B}{2\,a^2 b^2}.$$

Unterscheidet sich I wenig von B und ist θ nahe gleich Null, so ist H sehr klein und man hat

$$\cot^2 R \sin^2 I = \frac{a^2 + b^2 - b^2(a^2 + c^2)\sin^2 B + h \pm H}{2\,a^2 b^2},$$

wo h eine ebenfalls sehr kleine Grösse ist. Da h und H gegen die anderen Grössen sehr klein sind, kann die Wurzel näherungsweise gezogen werden und man erhält:

$$\cot R \sin I = \frac{1}{a b \sqrt{2}} \left[\sqrt{a^2 + b^2 - b^2(a^2 + c^2)\sin^2 B} + \frac{h \pm H}{2\sqrt{a^2 + b^2 - b^2(a^2 + c^2)\sin^2 B}}\right],$$

daher

$$O - E = \frac{\varepsilon H}{a b \sqrt{2\left[a^2 + b^2 - b^2(a^2 + c^2)\sin^2 B\right]}}.$$

Fig. 35.



Man erhält die Gleichung der isochromatischen Linien, indem man H einer Constanten gleichsetzt.

Um H leichter zu finden, ziehen wir vom optischen Mittelpunkte jener Linse, welche die parallel durch die Platte gehenden Strahlen in einem Punkte der Bildebene sammelt, die Gerade OI parallel dem betrachteten Strahlenbündel (Fig. 35) und betrachten I und θ als Functionen des Winkels φ, welcher die Richtung OI mit der apparenten Richtung der Achse OB bildet, und des Winkels ω der Ebene IOB mit der Ebene der optischen Achsen BOC. Da IOC gleich I und der Winkel der Ebenen IOC und BOC gleich θ ist, hat man

$$\frac{\sin\varphi}{\sin I} = \frac{\sin\theta}{\sin\omega},$$

$$\cos I = \cos\varphi\cos B + \sin\varphi\sin B\cos\omega.$$

Da der Winkel φ in der Nähe der optischen Achsen stets sehr klein ist, kann man diese Relationen ohne merklichen Fehler durch die folgenden ersetzen:

$$\varphi\sin\omega = \sin I\sin\theta$$

$$\cos I = \cos B + \varphi\sin B\cos\omega.$$

Setzt man dies in den Ausdruck für H^2, nachdem man diesen letzteren auf die Form

$$H^2 = \{a^2 - b^2 - \sin^2 I\,[b^2(a^2 - c^2) - c^2(a^2 - b^2)\sin^2\theta]\}^2$$
$$+ 4\,a^2(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)\sin^2\theta\sin^2 I$$

gebracht hat, so erhält man

$$H^2 = [a^2 - b^2 - b^2(a^2 - c^2)\sin^2 B + 2\,b^2(a^2 - c^2)\,\varphi\sin B\cos B\cos\omega$$
$$- c^2(a^2 - b^2)\,\varphi^2\cos^2\omega]^2$$
$$+ 4\,a^2(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)\,\varphi^2\sin^2\omega.$$

Da

$$\sin^2 A = b^2\sin^2 B = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2},$$

so wird der Ausdruck $a^2 - b^2 - b^2(a^2 - c^2)\sin^2 B$ der Null gleich, und wenn man die Glieder, welche φ in einer höheren als der zweiten Potenz enthalten, vernachlässigt, so vereinfacht sich der Ausdruck für H^2 zu

$$H^2 = \varphi^2[4\,b^4(a^2 - c^2)\sin^2 B\cos^2 B\cos^2\omega + 4\,a^2(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)\sin^2\omega].$$

Nehmen wir an, das Interferenzbild werde auf eine Ebene senkrecht zur optischen Achse OB projicirt; nehmen wir als Ursprung des Coordinatensystems die apparente Spur dieser Achse auf der Bildebene, und als x-Achse die Spur der Ebene der optischen Achsen auf der Bildebene. Bezeichnen wir durch D die Entfernung des optischen Mittelpunktes der Projectionslinse von der Bildebene, so hat man angenähert in Rücksicht auf die Kleinheit des Winkels φ:

$$D\varphi\cos\omega = x, \qquad D\varphi\sin\omega = y.$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck für H^2, so erhält man

$$\frac{D^2 H^2}{4} = b^4(a^2 - c^2)\cos^2 B\sin^2 B\,x^2 + a^2(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)\,y^2.$$

Bemerkt man, dass

$$\sin^2 B = \frac{1}{b^2}\,\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \qquad \cos^2 B = \frac{b^2(a^2 - c^2) - (a^2 - b^2)}{b^2(a^2 - c^2)},$$

und setzt man $\frac{D^2 H^2}{4}$ einer Constanten gleich, so erhält man als Gleichung der isochromatischen Linien:

$$[b^2(a^2-c^2)-(a^2-b^2)]\,x^2+a^2(b^2-c^2)\,y^2=const.$$

Der Coefficient von x^2 ist positiv, sobald der Winkel B reell ist. Die isochromatischen Linien, welche sich auf eine zur apparenten optischen Achse senkrechte Ebene projiciren, sind also Ellipsen, deren Mittelpunkt die apparente Spur der optischen Achse ist und deren Symmetrieachsen bezüglich parallel und senkrecht zur Ebene der optischen Achsen sind. Folglich sind die isochromatischen Linien in einer zur Plattennormale senkrechten Ebene ebenfalls Ellipsen, deren Mittelpunkt die apparente Spur der optischen Achse ist.

282. Dispersion der Achsen.

Die Erscheinungen der chromatischen Polarisation im convergenten Lichte erweisen sich als brauchbar beim Studium der zweiachsigen Krystalle. Die isochromatischen Linien können dazu dienen, wenn nicht die absoluten Werthe, so doch die Verhältnisse der drei Hauptbrechungsexponenten eines zweiachsigen Krystalls zu bestimmen; indessen sind solche Bestimmungen schwierig. Sehr brauchbar hingegen sind die Erscheinungen der chromatischen Polarisation zur Bestimmung der Abhängigkeit der Richtungen der optischen Achsen von der Farbe.

Bei den einachsigen Krystallen hat die eine Achse nothwendig für alle Farben dieselbe Lage. Bei den zweiachsigen Krystallen hingegen verändern die drei Hauptbrechungsexponenten mit der Farbe sowohl ihre absolute Grösse, als ihre Grössenverhältnisse. In Folge dessen wird die Lage der optischen Achsen von der Farbe abhängig. Wir haben hierbei zwei Fälle zu betrachten: 1) Die Krystalle haben drei rechtwinkelige krystallographische Achsen. 2) Sie haben geneigte Achsen.

283. Erscheinungen an Krystallen mit rechtwinkeligen Achsen.

Zu den Krystallen mit rechtwinkeligen krystallographischen Achsen gehören jene von der Gestalt eines geraden Prismas mit rhombischer Basis. Bei solchen Krystallen sind die drei Symmetrieachsen nothwendig zugleich die Elasticitätsachsen. Wie immer also die drei Grössen a, b, c von der Farbe abhängen mögen, die optischen Achsen werden für alle Farben eine Winkelhalbirende gemein haben. Es folgt hieraus nicht, dass die optischen Achsen für alle Farben in derselben Ebene liegen müssen, sie können für verschiedene Farben in Ebenen liegen, welche auf einander senkrecht stehen.

Ist die Dispersion klein gegen die Doppelbrechung, d. h. sind die Variationen von a, b, c mit der Farbe klein im Vergleiche mit den gegenseitigen Differenzen dieser Grössen selbst, so liegen, wie beim Aragonit, die optischen Achsen für alle Farben in derselben Ebene.

Betrachtet man in dem in Rede stehenden Falle die lemniscatenförmigen isochromatischen Linien, welche eine senkrecht zur Achse der kleinsten oder grössten Elasticität geschnittene Platte zeigt, so bemerkt man, dass die Brennpunkte der Lemniscaten für verschiedene Farben zwar auf derselben Geraden liegen, doch auf dieser verschiedene Lage haben. Der Winkel der optischen Achsen wächst bei manchen Krystallen von Roth gegen Violett, bei anderen nimmt er ab, und bei noch anderen erreicht der Achsenwinkel ein Maximum für eine zwischen Roth und Violett liegende Farbe.

Ist die Dispersion von derselben Grössenordnung wie die Doppelbrechung, d. h. sind die von der Farbe abhängigen Variationen der Grössen a, b, c von derselben Grössenordnung, wie die gegenseitigen Differenzen dieser Grössen selbst, so können die beiden optischen Achsen für verschiedene Farben in Ebenen liegen, welche auf einander senkrecht stehen. Liegen die optischen Achsen bei einer bestimmten Temperatur für alle Farben in derselben Ebene, so muss dies für eine andere Temperatur nicht mehr zutreffen, da a, b, c von der Temperatur abhängig sind. Derlei Erscheinungen wurden von Brewster am Glauberit beobachtet [1]).

Beim Glauberit liegen bei der gewöhnlichen Temperatur die optischen Achsen aller Farben in ein und derselben Ebene, doch entsprechen verschiedenen Farben verschiedene Achsenwinkel. Wendet man successive verschiedenfarbige homogene Lichter an, so erkennt man, dass der Achsenwinkel von Roth gegen Violett abnimmt, so zwar, dass die rothen Achsen einen beträchtlichen, die violetten hingegen einen sehr kleinen Winkel bilden. Erhöht man nun die Temperatur, so verkleinern sich sämmtliche Achsenwinkel. Bei einer gewissen Temperatur fallen die violetten Achsen zusammen, so dass für diese Temperatur der Krystall sich gegen die violetten Strahlen wie ein einachsiger Krystall verhält, hingegen für Strahlen von anderer Farbe wie ein zweiachsiger. Erhöht man die Temperatur noch weiter, so trennen sich die violetten Achsen wieder, liegen aber nun in einer Ebene, welche senkrecht steht auf jener Ebene, in der die violetten Achsen früher lagen und die rothen noch liegen. Bei einer Temperatur von 60 Graden ist der Achsenwinkel der violetten Strahlen schon beträchtlich.

---

[1]) *Phil. Mag.* (3) I, 417. — *Edinb. Trans.* XI, 273.

284. Erscheinungen an Krystallen mit schiefwinkeligen Achsen.

Bei gewissen Krystallen hat eine einzige der Elasticitätsachsen schon in Folge der Symmetrie für alle Farben dieselbe Lage, während die beiden anderen Elasticitätsachsen für verschiedene Farben verschiedene Lage haben, wobei wieder a, b, c Functionen der Farbe sind. Dieser Fall ist ungleich complicirter als der vorhergehende. Die Erscheinungen lassen sich unter zwei Typen bringen, jene des Borax und jene des Gypses.

1. Beim Borax fällt die Winkelhalbirende der optischen Achsen für alle Farben mit der Krystallachse zusammen, allein die Ebenen der optischen Achsen verschiedener Farbe sind unter verschiedenen Azimuthen orientirt, wie zuerst Herschel[1]) und Nörremberg[2]) beobachteten.

2. Beim Gypse liegen die optischen Achsen aller Farben in derselben Ebene, haben jedoch keine gemeinsame Winkelhalbirende, wie Neumann[3]) gefunden hat. Erhöht man die Temperatur, so bemerkt man, dass sich die beiden optischen Achsen einer bestimmten Farbe ungleich schnell bewegen. Also ist auch die Mittellinie dieser Farbe von der Temperatur abhängig. Eine sehr sorgfältige Untersuchung der Grösse und Lage der Elasticitätsachsen beim Gypse wurde von V. v. Lang durchgeführt[4]).

Endlich giebt es Krystalle, bei welchen die optischen Achsen verschiedener Farbe weder in einer Ebene liegen, noch eine gemeinsame Winkelhalbirende haben. Solche Erscheinungen wurden zuerst von Neumann beobachtet, später an vielen Krystallen von Grailich, v. Lang und Descloiseaux.

285. Erscheinungen an zusammenkrystallisirten, isomorphen Substanzen.

Senarmont brachte die besprochenen Erscheinungen theilweise künstlich hervor, indem er isomorphe Krystalle zusammenkrystallisiren liess[5]). Oft findet sich, dass Substanzen krystallographisch isomorph sind, nicht aber optisch isomorph, und dass in solchen isomorphen Krystallen die Ebenen der optischen Achsen auf einander senkrecht stehen.

---

[1]) *Corresp. mathem. et phys.* VI, 77. [2]) Pogg. Ann. XXVII, 240. [3]) Pogg. Ann. XXXIII, 257. [4]) Sitzber. d. Wien. Akad. LXXVI. [5]) *Ann. de chim. et de phys.* (3) XXXIII, 391.

Kali- und Ammoniak-Seignettesalz verhalten sich in dieser Weise. Lässt man die beiden Salze zusammenkrystallisiren, indem man die Verhältnisszahl des Ammoniak-Seignettesalzes schrittweise vergrössert, so beobachtet man eine Reihe von Erscheinungen analog jenen des Glauberits. Hat man verhältnissmässig sehr wenig Ammoniak-Seignettesalz, so liegen die optischen Achsen aller Farben in ein und derselben Ebene, und die rothen Achsen bilden einen weit grösseren Winkel als die violetten. Vermehrt man die Menge des Ammoniak-Seignettesalzes, so verkleinern sich die Achsenwinkel, und gleichzeitig nähern sich die rothen Achsen den violetten. Diese gegenseitige Annäherung schreitet fort, bis die rothen Achsen mit den violetten zusammenfallen. Später bilden die rothen Achsen einen kleineren Winkel als die violetten und fallen endlich zusammen, so dass der Krystall für die rothen Strahlen einachsig ist. Darüber hinaus trennen sich die rothen Achsen wieder von einander, liegen aber nun in einer zur ursprünglichen senkrechten Ebene, so dass die rothen und die violetten Achsen in zwei auf einander rechtwinkeligen Ebenen liegen und der Krystall für eine Zwischenfarbe einachsig ist. Ist schliesslich das Ammoniak-Seignettesalz vorherrschend, so finden sich die Achsen aller Farben in der zur ursprünglichen senkrechten Ebene.

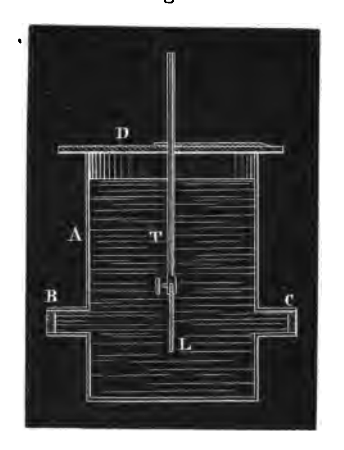
286. Grailich's Apparat zur Messung des Achsenwinkels.

Zur Messung der Achsenwinkel eignet sich Soleil's Apparat (262) wenig, da die Bestimmungen der wünschenswerthen Genauigkeit entbehren. Grailich's Apparat gestattet genauere Messungen und ist in Fällen anwendbar, in welchen eine Bestimmung nach der gewöhnlichen Methode unmöglich ist. Ist die Krystallplatte senkrecht zur Mittellinie geschnitten, so trifft es oft zu, dass der Winkel der Achse mit der Normale grösser wird, als der Grenzwinkel der totalen Reflexion. Ein Strahl, welcher sich im Krystalle längs der Achse fortpflanzt, tritt dann gar nicht aus, und es ist, so lange der Krystall sich in Luft befindet, nicht möglich, in dem Interferenzbilde der isochromatischen Linien die beiden Brennpunkte der Lemniscaten aufzufinden. Deshalb verkleinerte Grailich den apparenten Achsenwinkel, indem er die Krystallplatte in eine stärker lichtbrechende Flüssigkeit setzte, Oel oder eine Mischung von Alkohol und Schwefelkohlenstoff, deren Index zwischen 1,38 und 1,72 variirt, innerhalb welcher Grenzen die Indices vieler Krystalle liegen.

Grailich's Apparat (Fig. 35 a. f. S.) besteht aus einem Gefässe *A* mit zwei einander gegenüberliegenden Oeffnungen *B*, *C*, welche durch den Polariseur und Analyseur, Nicols von geringer Dicke, verschlossen

werden. Das Gefäss enthält die Flüssigkeit, deren Brechungsindex sich wenig von jenem der Krystalle unterscheidet. Der kreisförmige Deckel *D* trägt an seinem Umfange eine Gradtheilung. Quer durch denselben geht der Stab *T*, an dessen Ende die Krystallplatte *L* befestigt wird. Das untere Ende des Stabes mit der Krystallplatte kann mittelst eines Charniers um eine horizontale Achse gedreht werden. Ist die Krystallplatte senkrecht zur Mittellinie geschnitten, so beginnt man damit, die Ebene der optischen Achsen horizontal zu stellen. Zu diesem Zwecke bringt man vor dem Analyseur einen horizontalen Faden an, welcher mittelst einer Lupe betrachtet wird, und dreht die Platte mittelst des Charniers, bis das Bild des Fadens durch die beiden Brennpunkte der Lemniscaten geht. Um den apparenten Winkel der optischen Achsen zu messen, dreht man den Stab *T* und bringt die beiden Brennpunkte der Lemniscaten der Reihe nach mit einem den horizontalen Faden kreuzenden verticalen Faden zur Deckung. Der Stab *T* trägt eine Alhidade mit Nonius, welcher sich auf der Theilung der Platte *D* bewegt. Kennt man die Indices der Flüssigkeit und des Krystalls, so kann man aus dem gemessenen apparenten Achsenwinkel den reellen Achsenwinkel berechnen.

Fig. 35.



Verbesserungen hat der eben beschriebene Apparat durch V. v. Lang[1]) erfahren. Der Theilkreis *D* wird von zwei flachen Messingsäulen getragen. Der untere Theil des Stabes *T* gestattet eine beliebige horizontale Verschiebung, sowie eine Verlängerung. Die Zange *L* kann gegen den Stab *T* nach allen Richtungen beliebig geneigt werden. Die Bestandtheile *B* und *C* sind in ein Beleuchtungs- und ein Beobachtungsfernrohr verwandelt, welche an den beiden flachen Messingsäulen angebracht sind. Das Beleuchtungsfernrohr enthält einen Nicol und eine Linse, das Beobachtungsfernrohr einen Nicol, zwei Linsen und das Fadenkreuz. Die Flüssigkeit befindet sich in einem kleinen Gefässe mit gegenüberstehenden Oeffnungen und eingekitteten Glasplatten, welches in verticaler Richtung beweglich ist und dem Krystalle von unten her genähert werden kann.

---

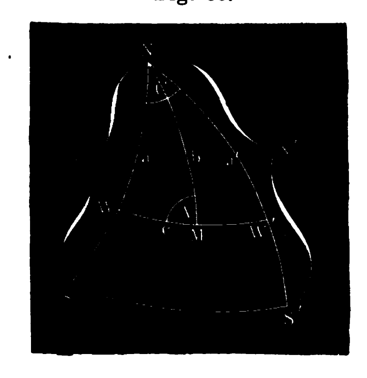
1) Carl's Rep. III, 201.

237. Kirchhoff's Apparat zur Messung des Achsenwinkels.

Kirchhoff's Apparat [1]) gestattet, den Achsenwinkel für die Fraunhofer'schen Linien zu bestimmen. Das vom Heliostatenspiegel kommende Licht geht der Reihe nach durch einen Nicol, eine verticale Spalte, eine Linse, welche ein Bild der Spalte in unendliche Entfernung wirft, ein Prisma mit verticaler Kante, durch das Objectiv eines auf unendliche Entfernung eingestellten astronomischen Fernrohres mit Fadenkreuz, durch das Ocular desselben Fernrohres, durch die Krystallplatte, durch ein zweites kleineres, auf unendliche Entfernung eingestelltes astronomisches Fernrohr und einen zweiten Nicol, um in das Auge zu gelangen. Die Krystallplatte ist um eine verticale Achse drehbar, so dass die Winkel der Drehung gemessen werden können.

Man erhält ein homogenes Spectrum in der Brennebene des ersten Fernrohres und ein Bild dieses Spectrums in der Brennebene des zweiten. Durch Drehung des Prismas kann eine beliebige Fraunhofer'sche Linie, auf welche die Messung sich beziehen soll, mit dem Verticalfaden des ersten Fernrohres zur Deckung gebracht werden. Der Beobachter gewahrt im Spectrum in unzählbarer Menge die schwarzen Curven, die durch Interferenz der durch Doppelbrechung im Krystall gebildeten Strahlen erzeugt werden. Die Krystallplatte ist in eine solche Lage gebracht, dass durch Drehung derselben um die Verticalachse die beiden Punkte der Interferenzfigur, die den optischen Achsen entsprechen, zur Deckung mit dem Schnittpunkte des bezeichneten Fadenkreuzes gebracht werden können. Man liest den Drehungswinkel ab, der erfordert wird, um von einer dieser Stellungen zu der anderen zu gelangen, und erhält so den apparenten Winkel der optischen Achsen für eine bestimmte Farbe. Aus diesem Winkel kann man leicht den reellen Winkel der optischen Achsen berechnen, wenn man den mittleren Brechungscoefficienten des Krystalls kennt.

Fig. 36.



Zu diesem Zwecke ist es noch nöthig, die Winkel zu messen, welche jede der beiden scheinbaren Achsen mit der Normale der Krystallplatte macht. Dann verfahre man wie folgt. Man denke sich aus dem Mittelpunkte einer Kugel Linien gezogen parallel der Normale der Krystall-

[1]) Pogg. Ann. CVIII, 567.

platte, den beiden scheinbaren Achsen, den beiden wahren Achsen und der Mittellinie der letzteren. Man bezeichne die Durchschnittspunkte der Kugel mit diesen Linien der Reihe nach durch *N*, *S*, *S'*, *W*, *W'*, *M* und verbinde diese Punkte durch grösste Kreise, wie es Fig. 36 (a. v. S.) darstellt. Den Winkel *W N W'* nenne man *C*, und die Bögen *N W*, *N W'*, *N S*, *N S'*, *M W*, *S S'* der Reihe nach *a*, *a'*, *x*, *x'*, *c*, *z*. Dann ist:

$$\cos 2c = \cos a \cos a' + \sin a \sin a' \cos C$$

und

$$\cos z = \cos x \cos x' + \sin x \sin x' \cos C.$$

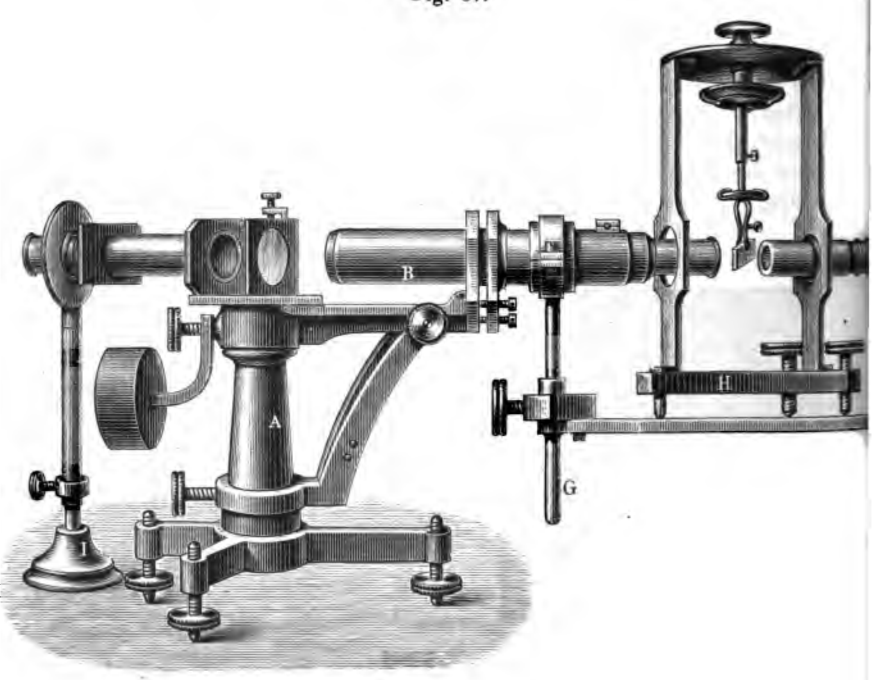
Bedeutet *n* den mittleren der drei Brechungsexponenten des Krystalls, so ist weiter

$$\left.\begin{aligned} \sin x &= n \sin a \\ \sin x' &= n \sin a' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

und

$$\cos 2c = \frac{\cos z}{n^2} + \cos a \cos a' - \frac{\cos x \cos x'}{n^2} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Fig. 37.



Hat man *z*, *x* und *x'* gemessen und kennt man *n*, so findet man aus den Gleichungen (1) und (2) ohne Schwierigkeit 2 *c*.

G. Kirchhoff wendete dieses Verfahren auf Messungen am Aragonit an und erhielt eine Genauigkeit der Messungen von 10 bis 15 Secunden.

V. v. Lang verwendete zu demselben Zwecke eine Combination eines Spectralapparates und seines in (286) beschriebenen Achsenwinkelapparates. Das Beleuchtungsrohr dieses Apparates wird hierbei vor den Spectralapparat gesetzt. Durch Drehen des Prismas des Spectralapparates kann eine beliebige Fraunhofer'sche Linie zur Coincidenz mit dem Fadenkreuze des Spectralapparates gebracht und der Achsenwinkel für diese Linie bestimmt werden. Da jedoch das Drehen des Prismas bei den gewöhnlichen Spectralapparaten einige Schwierigkeit bietet, ist die in Fig. 37 gezeichnete Verbindung des Spectralapparates mit dem Achsenwinkelapparate ausgeführt, wodurch letzterer gleichzeitig mit dem Beobachtungsfernrohre des Spectralapparates bewegt wird, und das Prisma auf dem Minimum der Deviation stehen bleibt. Der Achsenwinkelapparat H steht auf einem Träger G, welcher an das Beobachtungsfernrohr B des Spectralapparates A befestigt wird. Das Beleuchtungsrohr des Achsenwinkelapparates, bestehend aus Nicol und Linse, wird sammt seiner Hülse auf dem separaten Stativ I vor die Spalte gestellt. Der Spectralapparat ist mit einer feinen Einstellung versehen, womit das Fadenkreuz des Fernrohres B genau auf eine beliebige Fraunhofer'sche Linie eingestellt werden kann.

XXVI.

Circular oder elliptisch polarisirtes oder analysirtes Licht.

288. Circular oder elliptisch polarisirtes Licht.

Die Erscheinungen, welche sich zeigen, wenn zwischen der Krystallplatte und dem Polariseur oder zwischen der Krystallplatte und dem Analyseur noch eine Platte eingeschaltet wird, welche geradlinig polarisirtes Licht elliptisch oder circular polarisirt, sind von Airy [1]) einem besonderen Studium unterzogen worden. Bei einer grossen Zahl der Fälle hat sich, wie wir nun zeigen wollen, aus dieser offenbaren Complication im Gegentheile eine beträchtliche Vereinfachung der Phänomene ergeben.

Wir setzen zunächst voraus, dass das an die Krystallplatte gelangende Licht circular oder elliptisch polarisirt sei, was durch ein zwischen dem Polariseur und der Krystallplatte eingeschaltetes $\frac{\lambda}{4}$-Plättchen bewirkt werden kann. Um die Intensitäten der beiden beim Durchgange des Lichtes durch den Analyseur hervorgebrachten Bilder für eine bestimmte Farbe zu erhalten, sind die Formeln zu benutzen, welche wir (246) für den Fall der Superposition zweier Krystallplatten hergeleitet haben, und es ist

$$O - E = \frac{\lambda}{4}$$

zu setzen.

Die Wegdifferenz $O' - E'$ bezieht sich auf die Krystallplatte, i bedeutet den Winkel des Hauptschnittes des $\frac{\lambda}{4}$-Plättchens mit der ursprünglichen Polarisationsebene, a den Winkel des Hauptschnittes der

1) Pogg. Ann. XXVI, 140.

Krystallplatte mit jenem des $\frac{\lambda}{4}$-Plättchens, $a + i - s$ den Winkel des Hauptschnittes des Analyseurs mit jenem der Krystallplatte, und alle Winkel rechnen nach rechts.

Bemerkt man, dass

$$sin^2 \frac{O-E}{\lambda} = sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2},$$

$$sin^2 \pi \frac{O'-E'}{\lambda} = \frac{1 - cos\, 2\pi \frac{O'-E'}{\lambda}}{2},$$

$$sin^2 \pi \frac{O-E+O'-E'}{\lambda} = \frac{1 - cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \frac{O'-E'}{\lambda}\right)}{2}$$

$$= \frac{1 + sin\, 2\pi \frac{O'-E'}{\lambda}}{2},$$

$$sin^2 \pi \frac{O-E-(O'-E')}{\lambda} = \frac{1 - cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi \frac{O'-E'}{\lambda}\right)}{2}$$

$$= \frac{1 - sin\, 2\pi \frac{O'-E'}{\lambda}}{2},$$

so findet man nach vorgenommenen Reductionen für die Intensität des ordentlichen Bildes:

$$\omega^2 = cos^2 s - \frac{1}{2} sin\, 2\, i\, sin\, 2\,(i-s) - \frac{1}{2} cos\, 2\, i\, sin\, 2\, a\, sin\, 2\,(a+i-s)$$
$$+ \frac{1}{2} cos\, 2\, i\, sin\, 2\, a\, sin\, 2\,(a+i-s)\, cos\, 2\pi \frac{O'-E'}{\lambda}$$
$$- \frac{1}{2} sin\, 2\, i\, sin\, 2\,(a+i-s)\, sin\, 2\pi \frac{O'-E'}{\lambda},$$

und für die Intensität des ausserordentlichen Bildes den complementären Ausdruck.

289. Paralleles, circular polarisirtes Licht.

Es sei das auf die Krystallplatte fallende Licht circular von links nach rechts polarisirt, d. h. es sei

$$i = 45^0.$$

Der Ausdruck, zu welchem wir für ω^2 gelangten, wird unter dieser Voraussetzung, wenn $a + i - s = \alpha$ gesetzt wird,

$$\omega^2 = \cos^2 s - \frac{1}{2} \cos 2 s - \frac{1}{2} \sin 2 \alpha \sin 2 \pi \frac{O' - E'}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \sin 2 \alpha \sin 2 \pi \frac{O' - E'}{\lambda}\right),$$

und man erhält für das ausserordentliche Bild:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \sin 2 \alpha \sin 2 \pi \frac{O' - E'}{\lambda}\right).$$

Man sieht, dass die Intensitäten und Farben der beiden Bilder des Analyseurs einzig von dem Winkel abhängen, welchen der Hauptschnitt des Analyseurs mit jenem der Krystallplatte bildet. Die Erscheinungen sind demnach einfacher als jene des linear polarisirten Lichtes, sofern sie von der Stellung des Polariseurs unabhängig sind.

Zu den eben abgeleiteten Formeln gelangt man auch direct in folgender Weise:

Ein circular polarisirter Strahl ist äquivalent zwei rechtwinkelig linear polarisirten Strahlen mit einer Wegdifferenz gleich $\frac{\lambda}{4}$. Die Schwingungen der beiden Strahlen können dargestellt werden durch

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2 \pi \frac{t}{T}$$

und

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2 \pi \frac{t}{T},$$

auch kann vorausgesetzt werden, dass der erste Strahl parallel und der zweite senkrecht zum Hauptschnitte der Krystallplatte polarisirt sei. Die Schwingungen des ordentlichen Strahles sind dann gegeben durch

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{O'}{\lambda}\right),$$

und jene des ausserordentlichen durch

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{E'}{\lambda}\right);$$

verschiebt man den Nullpunkt der Zeit geeignet, so erhält man ferner für diese beiden Ausdrücke:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2 \pi \frac{t}{T}$$

und

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} + \frac{O' - E'}{\lambda}\right).$$

Indem man die beiden Schwingungen auf eine Gerade senkrecht zum Hauptschnitte des Analyseurs projicirt, findet man für die Schwingung des ordentlichen, aus dem Analyseur tretenden Strahles:

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} \sin 2\pi \frac{t}{T} - \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{O' - E'}{\lambda}\right)$$

und für seine Intensität:

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \sin 2\alpha \sin 2\pi \frac{O' - E'}{\lambda}\right).$$

Diese Formel unterscheidet sich von der früher gefundenen durch das Vorzeichen von $\sin 2\alpha$, da α jetzt rücksichtlich des Hauptschnittes der Krystallplatte nach rechts rechnet, während es früher nach links rechnete.

Fallen auf die Krystallplatte parallele und circular polarisirte Strahlen, so sind die beiden Bilder des Analyseurs complementär gefärbt. Dreht man den Analyseur, so ändern die Bilder ihre Intensität, aber nicht ihre Farbe. Die Bilder vertauschen ihre Farben, indem sie durch Weiss gehen wie beim linear polarisirten Lichte. Es giebt nur zwei Stellungen, für welche die Bilder weiss sind. Diese beiden Stellungen sind gegeben durch

$$\sin 2\alpha = 0.$$

Die Bilder sind also weiss, wenn der Hauptschnitt des Analyseurs zum Hauptschnitte der Krystallplatte parallel oder senkrecht ist. Sind die Bilder weiss, so sind sie auch gleich hell und ihre Intensität ist $\frac{1}{2}$. Die Farben ändern sich mit der Dicke der Krystallplatte, befolgen aber nicht mehr das Gesetz der Newton'schen Interferenzfarben, wie bei linear polarisirtem Lichte, denn das von der Farbe abhängige Glied im Ausdrucke für die Intensität der Bilder ist nicht mehr dem Quadrate des Sinus der Wegdifferenz proportional.

Schliesslich ergiebt sich, dass bei einer Aenderung des Sinnes der Circularpolarisation die beiden Bilder die Farbe tauschen.

290. Convergentes circular polarisirtes Licht.

Bei convergenten und circular polarisirten Strahlen sind die achromatischen Linien gegeben durch

$$\sin 2\alpha = 0,$$

welche Gleichung ausdrückt, dass der Hauptschnitt des Analyseurs zu jenem der Krystallplatte parallel oder senkrecht ist. Es folgt, dass man

bei circular polarisirtem Lichte jene achromatischen Linien erhält, welche bei linear polarisirtem Lichte durch

$$\sin 2(i - s) = 0$$

gegeben sind.

Die Zahl der achromatischen Linien ist also halb so gross als bei linear polarisirtem Lichte.

Die achromatischen Linien haben ferner die constante Intensität $\frac{1}{2}$; sie werden nur dadurch bemerkbar, dass die sie kreuzenden isochromatischen Linien in den Durchkreuzungspunkten die Farbe wechseln.

Die isochromatischen Linien, welche einem Maximum oder Minimum der Helligkeit einer bestimmten Farbe entsprechen, sind durch die Gleichung

$$\sin 2\pi \frac{O' - E'}{\lambda} = \pm 1$$

gegeben oder durch

$$O' - E' = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}.$$

Bei linear polarisirtem Lichte ist die Gleichung der isochromatischen Linien

$$O - E = k \frac{\lambda}{2}.$$

Man sieht, dass die isochromatischen Linien bei circular polarisirtem Lichte dieselbe Gestalt und gegenseitige Entfernung haben wie bei linear polarisirtem, dass jedoch eine Curve der ersteren Art immer in der Mitte zwischen zwei Curven der letzteren Art liegt.

Man sieht ferner leicht, dass jede isochromatische Linie ihre Farbe mit der complementären vertauscht, wenn der Sinn der Circularpolarisation wechselt, oder wenn die Krystallplatte das Zeichen wechselt.

Betrachten wir nun einige besondere Fälle. Setzen wir zunächst voraus, die Krystallplatte, auf welche das circular polarisirte Licht fällt, sei einachsig und senkrecht zur Achse geschnitten. Man hat dann ein einziges achromatisches Kreuz, dessen Arme parallel und senkrecht zum Hauptschnitte des Analyseurs sind. Die isochromatischen Linien sind Kreise, welche vom achromatischen Kreuze in vier Segmente getheilt werden und in je zwei benachbarten Segmenten complementäre Farben zeigen.

Rechnet der Winkel α bezüglich des Hauptschnittes des Analyseurs nach rechts und ist das Licht circular von links nach rechts polarisirt, so hat man

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \sin 2\alpha \sin 2\pi \frac{O - E}{\lambda}\right).$$

Ist $O - E > 0$, d. h. ist die Krystallplatte repulsiv, und ist der Hauptschnitt des Analyseurs vertical, so ist im Quadranten oben links das erste Maximum gegeben durch

$$O - E = \frac{\lambda}{4},$$

denn in diesem Quadranten ist $\sin 2\alpha$ positiv. Im Quadranten oben rechts ist $\sin 2\alpha$ negativ und das erste Maximum gegeben durch

$$O - E = \frac{3\lambda}{4}.$$

Ist also das Licht circular von links nach rechts polarisirt, so ist das erste Maximum im Quadranten links oben beträchtlich näher dem Centrum, als im Quadranten rechts oben, wenn die Krystallplatte repulsiv ist, und umgekehrt, wenn attractiv. Man kann diesen Umstand benutzen, um das Zeichen eines Krystalls zu erkennen, wie Dove bemerkt hat [1]. Ist das Licht von rechts nach links circular polarisirt, so findet natürlich das Entgegengesetzte statt.

Ist die Krystallplatte parallel der Achse, so fehlen achromatische Linien, und die isochromatischen Linien sind Hyperbeln ähnlich jenen, welche bei linear polarisirtem Lichte erhalten werden. Die Farben dieser Hyperbeln gehen in die complementären über, wenn das circularpolarisirte Licht das Zeichen wechselt.

Bei einer zweiachsigen, senkrecht zur Mittellinie geschnittenen Krystallplatte reduciren sich die achromatischen Linien auf eine Hyperbel, deren Asymptoten zum Hauptschnitte des Analyseurs bezüglich parallel und senkrecht sind. Die isochromatischen Linien sind Lemniscaten, welche durch die achromatischen Linien in vier complementär gefärbte Segmente getheilt werden.

291. Convergentes elliptisch polarisirtes Licht.

Sind die Strahlen convergent und elliptisch polarisirt, so kann man sich der in (288) abgeleiteten Formel bedienen. Man sieht, dass die achromatischen Linien noch durch die Gleichung

$$\sin 2\alpha = 0$$

gegeben sind entsprechend jenen Strahlen, welche zum Hauptschnitte parallel oder senkrecht polarisirt sind. Was die isochromatischen Linien anlangt, so muss man dieselben aus Punkten construiren, indem man vom Centrum des Interferenzbildes Strahlen zieht, und auf jedem derselben die Maxima und Minima sucht. Airy hat für eine Zahl einfacher Fälle die Resultate der Theorie mit jenen des Experimentes verglichen, namentlich für einachsige, senkrecht zur Achse geschnittene Platten. Die Curven sind ziemlich complicirt; das Feld wird durch das achromatische Kreuz in vier Sectoren getheilt, und die isochromatischen Cur-

[1] Pogg. Ann. XL, 457.

ven erscheinen in benachbarten Sectoren complementär gefärbt. Jede dieser Curven hat zwei Symmetrieachsen; die grössere derselben liegt auf der einen oder anderen Seite des Hauptschnittes des Analyseurs, je nachdem das Licht von links nach rechts oder von rechts nach links polarisirt ist.

292. Circular oder elliptisch analysirtes Licht.

Wir nennen das Licht circular oder elliptisch analysirt, wenn ein $\frac{\lambda}{4}$-Plättchen zwischen Krystallplatte und Analyseur eingeschaltet ist. Um die entsprechenden Formeln zu erhalten, hat man in der Formel für die Superposition zweier Krystallplatten (246) zu setzen:

$$O' - E' = \frac{\lambda}{4}.$$

i ist nun der Winkel zwischen dem Hauptschnitte der Krystallplatte und der ursprünglichen Polarisationsebene, a der Winkel zwischen dem Hauptschnitte des $\frac{\lambda}{4}$-Plättchens und dem Hauptschnitte der Krystallplatte, $a + i - s$ der Winkel zwischen dem Hauptschnitte des Analyseurs und jenem des $\frac{\lambda}{4}$-Plättchens, alle Winkel rechnen nach rechts. Man erhält so für die Intensität des ordentlichen Bildes

$$\begin{aligned}\omega^2 = \cos^2 s &+ \sin 2i \sin 2a \cos 2(a + i - s) \sin^2 \pi \frac{O - E}{\lambda} \\ &- \frac{1}{2} \cos 2i \sin 2a \sin 2(a + i - s) \\ &- \sin 2i \cos^2 a \sin 2(a + i - s) \sin^2 \left(\pi \frac{O - E}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &+ \sin 2i \sin^2 a \sin 2(a + i - s) \sin^2 \left(\pi \frac{O - E}{\lambda} - \frac{\pi}{4}\right),\end{aligned}$$

und nach vorgenommenen Reductionen

$$\begin{aligned}\omega^2 = \cos^2 s &- \frac{1}{2} \sin 2i \sin 2(i - s) - \frac{1}{2} \cos 2i \sin 2a \sin 2(a + i - s) \\ &- \frac{1}{2} \sin 2i \sin 2a \cos 2(a + i - s) \cos 2\pi \frac{O - E}{\lambda} \\ &- \frac{1}{2} \sin 2i \sin 2(a + i - s) \sin 2\pi \frac{O - E}{\lambda}.\end{aligned}$$

Diese Formel wurde für einige Fälle durch Airy experimentell verificirt. Der interessanteste der von Airy behandelten Fälle ist jener,

wo das Licht circular analysirt wird, d. h. wo der Hauptschnitt des Analyseurs mit jenem des $\frac{\lambda}{4}$-Plättchens einen Winkel von 45 Graden bildet. Man hat dann

$$a + i - s = 45^0,$$

und die obige Formel wird:

$$\omega^2 = \cos^2 s - \frac{1}{2} \sin 2(i + a) - \frac{1}{2} \sin 2i \sin 2\pi \frac{O - E}{\lambda}$$

oder, wenn $a + i - 45^0$ für s gesetzt wird,

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sin 2i \sin 2\pi \frac{O - E}{\lambda}\right).$$

Man findet hieraus für die Intensität des ausserordentlichen Bildes

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \sin 2i \sin 2\pi \frac{O - E}{\lambda}\right).$$

Diese Formeln sind jenen ähnlich, welche sich in dem Falle ergaben, wo das Licht circular polarisirt angenommen wurde. Wir unterlassen aus diesem Grunde die Discussion der erhaltenen Formeln. Es ergiebt sich einzig der Unterschied, dass α durch i ersetzt erscheint. Die achromatischen Linien sind demnach gegeben durch

$$\sin 2i = 0,$$

und entsprechen jenen Strahlen, welche parallel oder senkrecht zur ursprünglichen Ebene polarisirt sind.

Man sieht, dass die $\frac{\lambda}{4}$-Platte denselben Effect hervorbringt, mag sie vor oder hinter der Krystallplatte eingeschaltet werden.

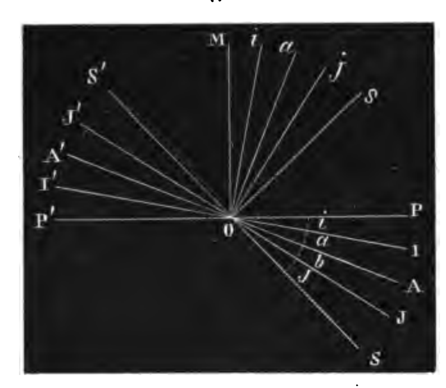
293. Superposition dreier Krystallplatten.

Es bleibt übrig, einen dritten Fall zu betrachten, welcher verwickeltere Rechnungen erfordet, jedoch zu Resultaten von bemerkenswerther Einfachheit führt, nämlich den Fall, wo das Licht circular oder elliptisch polarisirt und analysirt wird, d. i. wo die Krystallplatte sich zwischen zwei $\frac{\lambda}{4}$-Platten befindet, und dieses System dreier Platten zwischen einen Polariseur und einen Analyseur gesetzt ist.

Um zu den entsprechenden Formeln zu gelangen, haben wir die Wirkung der Superposition dreier Krystallplatten zu betrachten. Seien (Fig. 38 a. f. S.) PP' die ursprüngliche Polarisationsebene, II' der Hauptschnitt der ersten $\frac{\lambda}{4}$-Platte, AA' jener der Krystallplatte, JJ'

jener der zweiten $\frac{\lambda}{4}$-Platte, SS' jener des Analyseurs. Bezeichnen wir durch i den Winkel des Hauptschnittes der ersten $\frac{\lambda}{4}$-Platte mit der ursprünglichen Polarisationsebene, durch a den Winkel des Hauptschnittes der Krystallplatte mit jenem der ersten $\frac{\lambda}{4}$-Platte, durch b den Winkel des Hauptschnittes der zweiten $\frac{\lambda}{4}$-Platte mit jenem der Krystallplatte, durch j den Winkel des Hauptschnittes des Analyseurs mit jenem der zweiten $\frac{\lambda}{4}$-Platte, und zählen wir alle Winkel nach rechts, stellen wir durch $\sin x$ die Vibrationsbewegung der auf die erste $\frac{\lambda}{4}$-Platte fallenden Strahlen dar, und nehmen wir an, alle drei Krystallplatten seien repulsiv.

Fig. 38.



Bezeichnet man durch ξ_1 und η_1 die Vibrationsbewegungen des ordentlichen und des ausserordentlichen auf die erste $\frac{\lambda}{4}$-Platte fallenden Strahles, so hat man

$$\eta_1 = \cos i \sin x, \quad \xi_1 = - \sin i \sin x.$$

Um die Wegdifferenz, welche sich beim Durchgange durch die erste $\frac{\lambda}{4}$-Platte ergiebt, in Rechnung zu ziehen, setze man

$$O - E = \frac{\lambda}{4} \text{ oder } 2\pi \frac{O - E}{\lambda} = \frac{\pi}{2}.$$

Man hat also die Phase des ausserordentlichen Strahles um $\frac{\pi}{2}$ zu vermehren, und erhält für die Vibrationsbewegungen des ordentlichen und des ausserordentlichen Strahles beim Austritte aus der ersten $\frac{\lambda}{4}$-Platte:

$$\eta_1' = \cos i \sin x \qquad \xi_1' = \sin i \cos x.$$

Beim Eintritte in die Krystallplatte hat man für die Vibrationsbewegungen des ordentlichen und des ausserordentlichen Strahles

$$\eta_2 = \eta_1' \cos a + \xi_1' \sin a, \qquad \xi_2 = - \eta_1' \sin a + \xi_1' \cos a,$$

und wenn man

$$2\pi\,\frac{O'-E'}{\lambda}=\theta$$

setzt, wo $O'-E'$ die durch die Krystallplatte hervorgebrachte Wegdifferenz ist, so erhält man für die Vibrationsbewegung des ordentlichen und des ausserordentlichen Strahles beim Austritte aus der Krystallplatte:

$$\eta_2 = \cos i \cos a \sin x - \sin i \sin a \cos x,$$
$$\xi_2 = -\cos i \sin a \sin(x+\theta) - \sin i \cos a \cos(x+\theta).$$

Gleicherweise findet man für den Austritt der Strahlen aus der zweiten $\frac{\lambda}{4}$-Platte:

$$\begin{aligned}\eta_3 = {} & \cos i \cos a \cos b \sin x - \sin i \sin a \cos b \cos x\\ & - \cos i \sin a \sin b \sin(x+\theta) - \sin i \cos a \sin b \cos(x+\theta),\\ \xi_3 = {} & - \cos i \cos a \sin b \cos x - \sin i \sin a \sin b \sin x\\ & - \cos i \sin a \cos b \cos(x+\theta) + \sin i \cos a \cos b \cos(x+\theta),\end{aligned}$$

und für die Vibrationsbewegung des ordentlichen Strahles im Analyseur:

$$\begin{aligned}\eta_4 = {} & \cos i \cos a \cos b \cos j \sin x - \sin i \sin a \cos b \cos j \cos x\\ & - \cos i \sin a \sin b \cos j \sin(x+\theta) - \sin i \cos a \sin b \cos j \cos(x+\theta)\\ & - \cos i \cos a \sin b \sin j \cos x - \sin i \sin a \sin b \sin j \sin x\\ & - \cos i \sin a \cos b \sin j \cos(x+\theta) + \sin i \cos a \cos b \sin j \sin(x+\theta),\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\eta_4 = {} & \sin x (\cos i \cos a \cos b \cos j - \cos i \sin a \sin b \cos j \cos\theta\\ & + \sin i \cos a \sin b \cos j \sin\theta - \sin i \sin a \sin b \sin j\\ & + \cos i \sin a \cos b \sin j \sin\theta + \sin i \cos a \cos b \sin j \cos\theta)\\ & - \cos x (\sin i \sin a \cos b \cos j + \cos i \sin a \sin b \cos j \sin\theta\\ & + \sin i \cos a \sin b \cos j \cos\theta + \cos i \cos a \sin b \sin j\\ & + \cos i \sin a \cos b \sin j \cos\theta - \sin i \cos a \cos b \sin j \sin\theta).\end{aligned}$$

Man findet hieraus für die Intensität des ordentlichen Bildes:

$$\begin{aligned}\omega^2 = {} & \cos^2 i \cos^2 a \cos^2 b \cos^2 j + \sin^2 i \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 j\\ & + \sin^2 i \sin^2 a \cos^2 b \cos^2 j + \cos^2 i \cos^2 a \sin^2 b \sin^2 j\\ & + \cos^2 i \sin^2 a \sin^2 b \cos^2 j + \sin^2 i \cos^2 a \sin^2 b \cos^2 j\\ & + \cos^2 i \sin^2 a \cos^2 b \sin^2 j + \sin^2 i \cos^2 a \cos^2 b \sin^2 j\\ & - 2(\cos^2 i - \sin^2 i) \cos a \sin a \cos b \sin b \cos^2 j \cos\theta\\ & + 2 \cos i \sin i \cos b \sin b \cos^2 j \sin\theta + 2 \cos i \sin i \cos^2 b \cos j \sin j \cos\theta\\ & + 2(\cos^2 i - \sin^2 i) \cos a \sin a \cos^2 b \cos j \sin j \sin\theta\\ & + 2 \cos i \sin i \sin^2 b \cos j \sin j \cos\theta\\ & + 2(\cos^2 i - \sin^2 i) \cos a \sin a \sin^2 b \cos j \sin j \sin\theta\\ & + 2(\cos^2 i - \sin^2 i) \cos a \sin a \cos b \sin b \sin^2 j \cos\theta\\ & - 2 \cos i \sin i \cos b \sin b \sin^2 j \sin\theta,\end{aligned}$$

hieraus durch leichte Transformationen

$$\omega^2 = \cos^2 i \cos^2 (a+b) \cos^2 j + \sin^2 i \cos^2 (a+b) \sin^2 j$$
$$+ \sin^2 i \sin^2 (a+b) \cos^2 j + \cos^2 i \sin^2 (a+b) \sin^2 j$$
$$+ 2 \sin i \cos i \sin j \cos j$$
$$+ 4 (\cos^2 i - \sin^2 i) \cos a \sin a \cos b \sin b (\cos^2 j - \sin^2 j) \sin^2 \frac{\theta}{2}$$
$$- 4 \sin i \cos i \sin j \cos j \sin^2 \frac{\theta}{2}$$
$$+ 4 (\cos^2 i - \sin^2 i) \cos a \sin a \cos j \sin j \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$
$$+ 4 \cos i \sin i \cos b \sin b (\cos^2 j - \sin^2 j) \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2},$$

und schliesslich

$$\omega^2 = \cos^2 (j-i) \cos^2 (a+b) + \sin^2 (j+i) \sin^2 (a+b)$$
$$+ \cos 2i \sin 2a \sin 2b \cos 2j \sin^2 \frac{\theta}{2}$$
$$- \sin 2i \sin 2j \sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos 2i \sin 2a \sin 2j \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$
$$+ \sin 2i \sin 2b \cos 2j \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}.$$

Der Werth dieses Ausdruckes ändert sich nicht, wenn man gleichzeitig i durch j, j durch i, a durch b und b durch a ersetzt. Man kann hieraus schliessen, dass die Erscheinungen unabhängig sind von dem Sinne, in welchem das Plattensystem von den Lichtstrahlen durchsetzt wird.

294. Experiment von Fresnel.

Ein besonderer Fall wurde von Fresnel experimentell behandelt, entsprechend der Beziehung:

$$a = \pm b = 45^0,$$

was besagt, dass die Hauptschnitte der $\frac{\lambda}{4}$-Platten mit dem Hauptschnitte der Krystallplatte Winkel von 45^0 bilden sollen, sei es im selben oder im entgegengesetzten Sinne.

Nehmen wir zunächst an, es sei

$$a = b = 45^0.$$

Hierdurch wird die Formel für die Superposition dreier Platten:

$$\omega^2 = \sin^2(j+i) + \cos 2i \cos 2j \sin^2\frac{\theta}{2} - \sin 2i \sin 2j \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$+ \cos 2i \sin 2j \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \sin 2i \cos 2j \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},$$

oder

$$\omega^2 = \sin^2(j+i) + \cos 2(j+i)\frac{1-\cos\theta}{2} + \sin 2(j+i)\frac{\sin\theta}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2(j+i)\cos\theta + \frac{1}{2}\sin 2(j+i)\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\Big[1 - \cos[2(j+i)+\theta]\Big]$$

$$= \sin^2\left(j+i+\frac{\theta}{2}\right).$$

Man würde gleicherweise erhalten haben:

$$\varepsilon^2 = \cos^2\left(j+i+\frac{\theta}{2}\right).$$

Es folgt, dass der zum Analyseur gelangende Strahl linear polarisirt ist, und dass die Polarisationsebene dieses Strahles mit dem Hauptschnitte des Analyseurs einen Winkel α gleich

$$\frac{\pi}{2} - j - i - \frac{\theta}{2}$$

bildet. Da ferner der Hauptschnitt des Analyseurs mit der ursprünglichen Polarisationsebene einen Winkel gleich

$$\frac{\pi}{2} + j + i$$

bildet, so erscheint die Polarisationsebene durch das System der drei Platten um einen Winkel

$$\frac{\pi}{2} + j + i + \alpha = \pi - \frac{\theta}{2}$$

nach rechts gedreht, oder, was auf dasselbe hinausläuft, um einen Winkel gleich $\frac{\theta}{2}$ nach links.

Das heisst: Bringt man zwischen zwei repulsive $\frac{\lambda}{4}$-Platten, deren Hauptschnitte auf einander senkrecht stehen, eine repulsive Krystallplatte, deren Hauptschnitt mit jenen der beiden $\frac{\lambda}{4}$-Platten Winkel von 45 Graden bilden, so dreht dieses System dreier Platten die Polarisationsebene nach links um einen Winkel gleich der halben durch die Krystallplatte zwischen dem ordentlichen und ausserordentlichen Strahle

hervorgebrachten Phasendifferenz. Sind die Platten attractiv, so erfolgt die Drehung nach rechts.

Man sieht, dass weder der Sinn noch die Grösse der Drehung von i oder j abhängen. Dreht man also bei unveränderlicher Lage des Polariseurs und des Analyseurs das System der drei in fester gegenseitiger Verbindung gedachten Platten, so ändert sich das Phänomen nicht.

Fresnel's Experiment ist namentlich dadurch interessant, dass es zeigt, wie man die drehende Wirkung des Quarzes und analoger Substanzen künstlich produciren kann. In beiden Fällen ist die Rotation der Polarisationsebene der Dicke der Platte proportional und unabhängig von der Lage der ursprünglichen Polarisationsebene gegen den Hauptschnitt der Krystallplatte. Anders verhält es sich mit der Dispersion in den beiden Fällen. Bei Fresnel's Experiment ist die Rotation der Polarisationsebene nahe verkehrt proportional der Wellenlänge, bei den Phänomenen der Rotationspolarisation hingegen verkehrt proportional dem Quadrate der Wellenlänge. In beiden Fällen jedoch variiren die Farben der beiden Bilder mit dem Winkel, welchen die ursprüngliche Polarisationsebene mit dem Hauptschnitte des Analyseurs bildet.

Hat man

$$a = -b = 45^0,$$

so wird die Formel für die Intensität des ordentlichen Bildes:

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \cos^2(j-i) - \cos 2j \cos 2i \sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin 2i \sin 2j \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&\quad + \cos 2i \sin 2j \frac{\sin\theta}{2} - \sin 2i \cos 2j \frac{\sin\theta}{2} \\
&= \cos^2(j-i) - \cos 2(j-i)\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right) + \sin 2(j-i)\frac{\sin\theta}{2} \\
&= \frac{1}{2}[1 + \cos 2(j-i)\cos\theta + \sin 2(j-i)\sin\theta] \\
&= \frac{1}{2}\Big[1 + \cos[2(j-i)-\theta]\Big] \\
&= \cos^2\left(j - i - \frac{\theta}{2}\right).
\end{aligned}$$

Der zum Analyseur gelangende Strahl ist also linear polarisirt und seine Polarisationsebene bildet mit dem Hauptschnitte des Analyseurs einen Winkel gleich

$$j - i - \frac{\theta}{2}.$$

Dieser Hauptschnitt bildet selbst mit der ursprünglichen Polarisationsebene einen Winkel gleich

$$j + i.$$

Demnach ist in dem betrachteten Falle die Rotation der Polarisationsebene gleich $2j - \frac{\theta}{2}$ nach rechts. Man sieht, dass in diesem Falle die Rotation nicht mehr von j unabhängig ist.

295. Das Experiment von Airy.

Ein zweiter interessanter Fall wurde von Airy studirt: Das Licht sei circular polarisirt und circular analysirt. Dies wird erreicht, wenn die ursprüngliche Polarisationsebene mit dem Hauptschnitte der ersten $\frac{\lambda}{4}$-Platte und der Hauptschnitt des Analyseurs mit jenem der zweiten $\frac{\lambda}{4}$-Platte Winkel von 45 Graden bilden. Man hat dann:

$$i = \pm j = 45^0.$$

Setzt man voraus, dass

$$i = j = 45^0,$$

so erhält man für das ordentliche Bild:

$$\omega^2 = cos^2 \frac{\theta}{2};$$

Setzt man hingegen voraus

$$i = -j = 45^0,$$

so erhält man

$$\omega^2 = sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Man sieht, dass in beiden Fällen der Strahl linear polarisirt wird. Im ersten Falle bildet die Polarisationsebene des Strahles mit dem Hauptschnitte des Analyseurs einen Winkel gleich $\frac{\theta}{2}$. Da dieser Hauptschnitt selbst mit der ursprünglichen Polarisationsebene einen Winkel gleich

$$a + b + \frac{\pi}{2}$$

bildet, so sieht man, dass die Polarisationsebene um einen Winkel

$$\frac{\pi}{2} + a + b + \frac{\theta}{2}$$

nach rechts gedreht wird.

Im zweiten Falle ist der Winkel der Polarisationsebene mit dem Hauptschnitte des Analyseurs gleich

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

und der Winkel dieses Hauptschnittes mit der ursprünglichen Polarisationsebene gleich

$$a + b,$$

daher die Drehung der Polarisationsebene gleich

$$\frac{\pi}{2} + a + b - \frac{\theta}{2}$$

nach rechts.

Bei Airy's Experiment hängen die Intensitäten der Bilder nicht von a und b, sondern nur von der Summe $a + b$ ab. Es folgt: Ist die Lage des Polariseurs, des Analyseurs und der beiden $\frac{\lambda}{4}$-Platten unveränderlich, und dreht man die Krystallplatte in ihrer eigenen Ebene, so dass a und b variiren, nicht aber $a + b$, so ändert sich das Phänomen nicht.

Airy's Experiment kann auch mit convergentem Lichte angestellt werden. Achromatische Linien sind nicht vorhanden. Die isochromatischen Linien entsprechen der Gleichung:

$$\pi \frac{O - E}{\lambda} = \frac{k\lambda}{2},$$

haben also dieselbe Gestalt, wie im linear polarisirten Lichte, erscheinen jedoch deutlicher, da die den einzelnen Farben entsprechenden Minima genau Null sind. Jede dieser Linien zeigt ihrer ganzen Ausdehnung nach dieselbe Farbe.

Man kann ohne Schwierigkeit die Berechnung der Experimente Fresnel's und Airy's auch direct durchführen, ohne den allgemeinen Fall der Superposition dreier Krystallplatten zu erledigen.

Bibliographie.

Chromatische Polarisation.

1811. **Arago**, Sur une modification remarquable qu'éprouvent les rayons lumineux dans leur passage à travers certains corps diaphanes, *Mém. de la prem. classe de l'Inst.*, XII, 93. — *OEuvres complètes,* t. X, p. 36.

1811. **Arago**, Sur les couleurs du sulfate de chaux, *OEuvres complètes*, t. X, p. 368.

1812. **Arago**, Mémoires plusieurs phénomènes d'optique, *OEuvres complètes,* t. X, p. 85, 98.

1812. **Biot**, Sur de nouveaux rapports qui existent entre la réflexion et la polarisation de la lumière par les corps cristallisés, *Mém. de la prem. classe de l'Inst.*, XII, 135.

1812. **Biot**, Mémoire sur un nouveau genre d'oscillation que les molécules de la lumière éprouvent en traversant certains cristaux, *Mém. de la prem. classe de l'Inst.*, XIII, 1re partie, 1.

1812. **Biot**, Sur une nouvelle application de la théorie des oscillations de la lumière, *Mém. de la prem. classe de l'Inst.,* XIII, 2e partie, 1.

1812. **Biot**, Mémoire sur les propriétés physiques que les molécules lumineuses acquièrent en traversant les cristaux doués de la double réfraction, *Mém de la prem. classe de l'Inst.*, XIII, 2e partie, 31.

1813. **Brewster**, *Treatise on New Philosophical Instruments,* Edinburgh, p. 336.

1813. **Biot**, Sur une manière d'imiter artificiellement les phénomènes de rayons polarisés, *Mém. d'Arcueil,* III, 106.

1813. **Biot**, Sur une loi remarquable qui s'observe dans les oscillations des particules lumineuses lorsqu'elles traversent obliquement des lames minces de chaux sulfatée ou de cristal de roche taillées parallèlement à l'axe de cristallisation, *Mém. d'Arcueil,* III, 132.

1814. **Biot**, *Recherches expérimentales et mathématiques sur le mouvement des molécules de la lumière autour de leur centre de gravité,* Paris.

1814. **Young**, Sur l'explication des couleurs que présentent les lames cristallines par la théorie des interférences, *Quarterly Review,* XI, 42. — *Miscell. Works,* t. I, p. 269.

1814. **Brewster**, On the Affections of Light Transmitted through Crystallized Bodies, *Phil. Trans.* 1814, p. 185.

1815. **Brewster**, Experiments on the Depolarisation of Light as Exhibited by Various Mineral, Animal and Vegetal Bodies, *Phil. Trans.,* 1815, p. 29.

1816. **Fresnel**, Mémoire sur l'influence de la polarisation dans l'action que les rayons lumineux exercent les uns sur les autres, *OEuvres complètes,* t. I, p. 394, 427.

1817. **Fresnel**, Mémoire sur les modifications que la réflexion imprime à la lumière polarisée, *OEuvres complètes*, t. I, p. 455, 495.

1817. Fresnel, Lettre à Arago sur l'influence de la chaleur dans les couleurs développées par la polarisation, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), IV, 298.

1818. Brewster, On the Laws of Polarisation and Double Refraction in Regularly Crystallized Bodies, *Phil. Trans.*, 1818, p. 199.

1820. W. Herschel, On the Action of Crystallized Bodies on Homogeneous Light and on the Cause of Deviation from Newton's Scale in the Teints which Many of them Developpe as Exposed to a Polarized Ray, *Phil. Trans.*, 1820, p. 45.

1821. Fresnel, Note sur les couleurs que la polarisation développe dans les lames cristallisées parallèles à l'axe, *OEuvres complètes,* t. I, p. 533.

1821. Fresnel, Note sur la théorie des couleurs que la polarisation développe dans les lames minces cristallisées, *OEuvres complètes,* t. I, p. 523.

1821. Fresnel, Note sur l'expérience des franges produites par deux rhomboèdres de chaux carbonatée, *OEuvres complètes,* t. I, p. 538.

1821. Fresnel, Note sur la polarisation mobile, *OEuvres complètes,* t. I, p. 542.

1821. Fresnel, Note sur les interférences des rayons polarisées, *OEuvres complètes,* t. I, p. 545. (Expérience des rhomboèdres.)

1821. Fresnel, Note sur l'application du principe des interférences à l'explication des couleurs des lames minces cristallisées, *OEuvres complètes,* t. I, p. 551.

1821. Arago, Rapport sur un Mémoire de M. Fresnel relativ aux couleurs des lames minces cristallisées douées de la double réfraction, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XVII, 80. — *OEuvres complètes d'Arago,* t. X, p. 402. — *OEuvres complètes de Fresnel,* t. I, p. 553.

1821. Biot, Remarques sur le rapport précédent, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XVII, 225.

1821. Arago, Examen des remarques de M. Biot, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XVII, 258.

1821. Fresnel, Note sur les remarques de M. Biot, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), 393.

1821. Fresnel, Note sur le calcul des teintes que la polarisation développe dans les lames cristallisées, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XVII, 102, 167, 312. — *OEuvres complètes,* t. I, p. 609.

1821. W. Herschel, On Certain Remarkable Instances of Deviation of Newton's Scale in the Teints developped by Crystals with on Axe of Double Refraction on Exposure to Polarized Light, *Cambr. Trans.*, I, 21.

1821. W. Herschel, On a Remarkable Peculiarity in the Law of the Extraordinary Refraction of Different Coloured Rays Exhibited by Certains Varieties of Apophyllit, *Cambr. Trans.*, I, 341.

1823. Fresnel, Note sur la polarisation circulaire, *OEuvres complètes,* t. I, p. 763.

1824. Arago, Notice sur la polarisation de la lumière, *OEuvres complètes,* t. VII, p. 291.

1826. Marx, Ueber die Form der isochromatischen Curven in den ein- und zweiachsigen Krystallen und über einige Vorrichtungen, sie zu beobachten, *Schweigger's Journ.*, XLIX, 167.

1831. Airy, On the Nature of the Light in the Two Rays Produced by the Double Refraction of Quartz, *Cambr. Trans.*, IV, 79, 198.

1832. Airy, On a New Analyser and its Use in Experiments of Polarisation, *Cambr. Trans.,* IV. — *Pogg. Ann.*, XXVI, 140.

1833. Hachette, Description de l'appareil de M. Nörremberg, *Bulletin de la Société Philomathique*, janvier 1883.

1834. Neumann, Ueber die optischen Achsen und die Farben zweiachsiger Krystalle im polarisirten Licht, *Pogg. Ann.*, XXXIII, 257.

1834. Joh. Müller, Erklärung der isochromatischen Curven, welche einachsige, parallel mit der Achse geschnittene Krystalle im homogenen Licht zeigen, *Pogg. Ann.*, XXXIII, 282.

1835. Joh. Müller, Ueber die isochromatischen Curven der einachsigen Krystalle, *Pogg. Ann.*, XXXV, 95.

1835. Dove, Beschreibung eines Apparates für geradlinige, elliptische und circulare Polarisation des Lichtes, *Pogg. Ann.*, XXXV, 596.

1835. Delezenne, Notes sur la polarisation, *Mém. de la Soc. des sciences de Lille*, 1835.

1837. Dove, Ueber den Unterschied positiver und negativer Krystalle bei circularer und bei elliptischer Polarisation, *Pogg. Ann.*, XL, 457.

1837. Dove, Erscheinungen zweiachsiger Krystalle in circular polarisirtem Lichte, *Pogg. Ann.*, XL, 442.

1838. Joh. Müller, Berechnung der hyperbolischen dunkeln Büschel, welche die farbigen Ringe zweiachsiger Krystalle durchschneiden, *Pogg. Ann.*, XLIV, 273.

1840. Cauchy, Sur les relations qui existent entre l'azimut et l'anomalie d'un rayon simple doué de la polarisation elliptique, *Exerc. d'anal. et de phys. mathém.*, t. I, p. 260.

1840. Langberg, Analyse der isochromatischen Curven und der Interferenzerscheinungen in combinirten einachsigen Krystallen, *Pogg. Ann.*, Ergänzungsband I.

1842. Guérard, Nouvel appareil de polarisation, *Inst.*, X, 274.

1846. W. Thomson, Note on the Rings and Brushes in the Spectra produced by biaxial Crystals, *Glascow's Mathem. Journ.*, janvier 1846.

1846. Fizeau et Foucault, Mémoire sur la polarisation chromatique produite par les lames épaisses cristallisées, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXVI, 138; XXX, 146.

1846. Joh. Müller, Prismatische Zerlegung der Interferenzfarben, *Pogg. Ann.*, LXIX, 98; LXXI, 91.

1846. Erman, Bemerkungen zu J. Müller's optischen Versuchen, *Pogg. Ann.*, LXIX, 417.

1847. Dove, Ueber die optischen Erscheinungen, welche in rotirenden Polarisationsapparaten sich zeigen, *Pogg. Ann.*, LXXI, 97.

1850. Cauchy, Note sur la différence de marche entre deux rayons lumineux qui émergent d'une plaque doublement réfringente à faces parallèles, *C. R.*, XXX, 97.

1850. E. Wilde, Berechtigung der von Rudberg berechneten Achsenwinkel der zweiachsigen Krystalle, *Pogg. Ann.*, LXXX, 225.

1850. E. Zamminer, Ueber den Winkel der optischen Achsen zweiachsiger Krystalle, *Liebig's Ann.*, LXXVI, 121.

1850. C. Page, A New Figure in Mica and other Phaenomena of polarized Light, *Silliman's Journ.*, (2), XI, 39. — *Phil. Mag.*, (4), I, 261.

1851. Dove, Ueber die Anwendung des Reversionsprismas zur Darstellung der elliptischen und circularen Polarisation. *Berliner Monatsber.*, 1851, S. 492. — *Inst.*, XX, 64.

1852. Fürst zu Salm-Horstmar, Ueber das optische Verhalten eines aus Bergkrystall geschnittenen Prismas, dessen eine Achse rechtwinklig zur Krystallachse ist, *Pogg. Ann.*, LXXXV, 318.

1852. Fürst zu Salm-Horstmar, Ueber das optische Verhalten von Prismen aus Doppelspath und aus Beryll, die so geschnitten sind, dass

eine Fläche rechtwinklig zur optischen Achse ist, *Pogg. Ann.*, LXXXVI, 145.

1853. Ohm, Erklärung aller in einachsigen Krystallplatten bei geradlinig polarisirtem Lichte wahrnehmbaren Interferenzerscheinungen, *Münchener Abh.*, VII, 43, 265. — *Pogg. Ann.* XC, 327.

1853. Fürst zu Salm-Horstmar, Ueber das optische Verhalten von Prismen aus Doppelspath, aus Beryll, aus Quarz und aus Arragonit, *Pogg. Ann.*, LXXXVIII, 591.

1853. E. Wilde, Ueber die epoptischen Farben der einachsigen Krystallplatten und der dünnen Krystallblättchen im linear polarisirten Lichte, *Pogg. Ann.*, LXXXIX, 234, 402.

1853. Crookes, On the Application of Photography to the Study of certain Phaenomena of Polarisation, *Phil. Mag.*, (4), VI, 73 — *Cosmos*, III, 325.

1853. Stokes, On the Cause of the Occurence of abnormal Figures in the photographic Impression of polarized Rings, *Phil. Mag.*, (4), VI, 107. — *Cosmos*, III, 327.

1854. Veiss, Entwickelung der Phasengleichung bei einachsigen Krystallen, *Pogg. Ann.*, XCI, 495.

1854. Reusch, Abgeänderter Polarisationsapparat, *Pogg. Ann.*, XCII, 336.

1855. H. Soleil, Note sur quelques phénomènes offerts par la lumière polarisée circulairement. — Nouvel appareil de polarisation circulaire et nouveau compensateur, *C. R.*, XL, 1058.

1856. P. Desains, Description d'un appareil de polarisation, *C. R.*, XLIII, 435.

1856. Zech, Ueber die Ringsysteme der zweiachsigen Krystalle, *Pogg. Ann.*, XCVII, 129; CII, 359.

1858. Nörremberg, Sein Polarisationsapparat verbessert, *Bericht über die Naturforscher-Versammlung zu Carlsruhe*, 1858, S. 152.

1858. Schlagdenhauffen und Reyss, Essai sur la marche générale des franges dans les lames minces de quartz et de spath taillées sous une inclinaison quelconque à l'axe optique, *C. R.*, XLVI, 1136. — *Pogg. Ann.*, CXII, 15.

1859. Bertin, Sur les franges que produit dans la pince à tourmalines un spath perpendiculaire placé entre deux micas d'un quart d'onde, *C. R.*, XLVIII, 458. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LVII, 257.

1859. Pierre, Ueber den neuen Nörremberg'schen Polarisationsapparat, *Prager Ber.*, 1859, S. 13.

1861. Bertin, Mémoire sur la surface isochromatique, *C. R.*, LIII, p. 1213. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXIII, 57.

1863. Lommel, Die Interferenzerscheinungen zweiachsiger, senkrecht zur Achse geschnittener Krystallplatten im homogenen polarisirten Lichte, *Pogg. Ann.*, CXX, 69.

1867. E. Lommel, Die Lichtmenge, welche im Polarisationsapparate durch eine zur optischen Achse oder zur ersten Mittellinie senkrecht geschnittenen Krystallplatte hindurchgeht, *Zeitschr. f. Mathem.* XII.

1867. E. Reusch, Ueber eine besondere Gattung von Durchgängen im Steinsalz und Kalkspath, *Pogg. Ann.*, CXXXII.

1868. Bertin, Note sur la détermination du signe des cristaux, *Ann. de chim.*, (4), XIII. (Beschreibung zweier Methoden Nörremberg's.)

1868. Ditscheiner, Ueber eine Anwendung des Spectralapparates zur optischen Untersuchung der Krystalle, *Wien. Ber.*, LVIII. — *Carl, Rep.*, IV. (Methode der Interferenzstreifen im Spectrum.)

1870. A. Kurz, Berechnung der hyperbolischen dunklen Büschel in zweiachsigen Krystallen, *Schlömilch, Zeitschr. f. Mathem.* XV.

1871. Deas, On spectra formed by doubly refracting crystals in polarized light.

1871. **Maxwell**, Addition to the above paper, *Edinb. Trans.*, XXVI. (Erscheinungen der chromatischen Polarisation bei Anwendung eines Mikroskops und Prismas.)
1871. P. **Groth**, Ueber Apparate und Beobachtungsmethoden für krystallographisch-optische Untersuchungen, *Pogg. Ann.*, CXLIV.
1873. V. D. **Willigen**, Sur les phénomènes de la polarisation chromatique dans la lumière convergente avec les lames cristallines à un axe, *Inst.*
1875. L. **Mouton**, Sur la polarisation elliptique, *D'Almeida J.*, IV.
1876. **Nodot**, Interference fringes, *Sillim, J.*, (3), XI, *D'Almeida, J.*, IV.
1876. L. **Ditscheiner**, Ueber die Farben dünner Krystallblättchen, *Wien. Ber.*
1877. **Croullebois**, Sur la réflexion de la lumière polarisée, *C. R.*, LXXIV. *Phil. mag.*, (5), III.
1877. W. **Spottiswoode**, Polariscope objects, *Nature*, XV.
1880. A. **Bertin**, Ueber die Farben krystallisirter Lamellen im elliptisch polarisirten Lichte, *Ann. de chim. et de phys.*
1880. F. **Klocke**, Ueber Doppelbrechung regulärer Krystalle, *Jahrb. f. Min.*
1882. L. **Laurent**, Ein Apparat, um bei der Projection gleichzeitig die Polarisationsebene des Analysators und der Krystallplatte zu zeigen und zu messen, *Journ. de Phys.*

Natürliches und partiell polarisirtes Licht.

1841. **Brewster**, Sur les compensations de la lumière polarisée, *Inst.*, IX, 386.
1847. **Dove**, Ueber Erscheinungen, welche polarisirtes Licht zeigen, dessen Polarisationsebene gedreht wird, *Berl. Monatsber.*, 1846, S. 70. — *Pogg. Ann.*, LXXI, 97.
1852. **Stokes**, On the Composition and Resolution of Streams of polarized Light from different Sources, *Cambr. Trans.*, IX, 399. — *Phil. Mag.*, (4), II, 316.
1852. **Billet**, Sur la constitution de la lumière polarisèe et la vraie cause des changements qui s'introduisent dans la différence de phase de deux rayons polarisées issus d'un rayon natured, *Archives de Genève*, XIX, 296. — *Inst.*, XX, 234.
1863. **Lippich**, Ueber die Natur der Aetherschwingungen in unpolarisirtem und in theilweise polarisirtem Lichte, *Wien. Ber.*, XLVIII, 146.
1864. J. **Stefan**, Ein Versuch über die Natur des unpolarisirten Lichtes, *Wien. Ber.*, L, 380. — *Pogg. Ann.*, CXXIV, 623. — *Inst.*, XXXIII, 71.
1865. **Verdet**, Étude sur la constitution de la lumière non polarisée et de la lumière partiellement polarisée, *Ann. de l'Ec. Norm.*, II, 291.

Polariskopie.

1840. **Petrina**, Das Kaleïdopolariscop, *Pogg. Ann.*, XLIX, 236.
1847. **Jamin**, Mémoire sur la réflexion métallique, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XIX, 296.
1850. **Jamin**, Mémoire sur la réflexion à la surface des corps transparents, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXIX, 263.
1850. **De Senarmont**, Description d'un nouveau polariscope, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXVIII, 279.
1851. **Bravais**, Description d'un nouveau polariscope, *C. R.*, XXXII, 112.
1851. **Stokes**, On a new Analyser, 21th *Rep. of Brit. Assoc.*, 14. — *Phil. Mag.*, (4), II, 420.

1855. **Bravais**, Description d'un nouveau polariscope et recherches sur les doubles réfractions-peu énergiques, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XLIII, 129.

1867. **Cornu**, De l'emploi des Prismes de Nicol dans les mesures précises de polarisation, *Inst.*

1868. **Hempel**, Nouvel appareil de polarisation, *Mondes*, (2), XVII.

1869. **Jamin**, Neuer Polarisator, *Pogg. Ann.*, CXXXVII. (Kalkspathplatte in Schwefelkohlenstoff.)

1869. **Hofmann**, Nouveau prisme polariseur et analyseur, *Mondes*, (2), XXI.

1872. **Talbot**, On the Nicol prism., *Proc. Edinb. sec.*, VII. (Beschreibung eines Nicols, bei dem der nach der totalen Reflexion durchlaufene Theil aus Glas besteht.)

1874. **Ladd**, On the construction of large Nicol's prisms, *Nature*, X. (Nicols von grosser Oeffnung durch Combinirung mehrerer Kalkspathstücke.)

1876. **Bosanquet**, On a new form of polariscope and its application to the observation of the sky, *Phil. mag.*, (5), II.

1879. L. **Laurent**, Ueber die genaue Orientirung des Hauptschnittes der Nicols in den Polarisationsapparaten, *C. R.*, LXXXVI.

1880. L. **Foucault**, Neuer Polarisator aus Kalkspath, *Ann. chim. et de phys.*, (5), XVII.

1880. V. v. **Lang**, Verbesserte dichroskopische Lupe, *Wien. Ber.*

1881. P. **Glan**, Ueber einen Polarisator, *Carl, Rep.*, XVI. (Aus Kalkspathprismen zusammengesetzt.)

1881. P. **Glan**, Nachtrag zum Polarisator, *Carl, Rep.*, XVI. (Polarisator breiter als lang.)

1882. S. P. **Thompson**, Ueber einen neuen Kalkspathpolarisator, *Phil. Mag.*, (5), XII.

Besondere Krystalloptik. Dispersion der Achsen.

1812. **Biot**, Mémoire sur la découverte d'une propriété nouvelle dont jouissent les forces polarisantes de certains cristaux, *Mém. de la prem. classe de l'Inst.*, XIII. (Attractive und repulsive Krystalle.)

1812. **Biot**, Sur les deux genres de polarisation exercés par les cristaux doués de la double réfraction, *Mém. de la prem. classe de l'Inst.*, XIII.

1816. **Biot**, Sur l'utilité des lois de la polarisation de la lumière pour reconnaître l'état de combinaison ou de cristallisation, *Mém. de l'Acad. des sc.*, I, 275. — *Ann. de chim. et de phys.*, (2), VIII, 438.

1818. **Brewster**, On the Laws of Polarisation and double Refraction in crystallized Bodies, *Phil. Trans.*, 1818, p. 199.

1819. **Biot**, Mémoire sur les lois générales de la double réfraction et de la polarisation dans les corps régulièrement cristallisées, *Mém. de l'Acad. des sc.*, III, 177.

1821. **Brewster**, On the Connexion between the prismatic Forms of Crystals and the Number of their Axes of double Refraction, *Mém. of the Wernerian Soc.*, III, 50, 337.

1826. **Mitscherlich**, Ueber die Veränderung der doppelten Strahlenbrechung durch die Wärme, *Pogg. Ann.*, VIII, 126. (Abhängigkeit der Ebene der optischen Achsen des Gypses von der Temperatur.)

1831. **Brewster**, Account of a remarkable Peculiarity in the Structure of Glauberit, which has one Axe of double Refraction for violet and two for red Light, *Edinb. Trans.*, XI, 273. — *Pogg. Ann.*, XXI, 607.

1832. W. **Herschel**, Lettre à M. Quetelet sur les propriétés des axes optiques du borax, *Correspond. mathém. et phys.*, VII, 77.

1832. Rudberg, Ueber die Veränderung, welche die Doppelbrechung in Krystallen durch Temperaturerhöhung erleidet. *Pogg. Ann.*, XXVI, 291.

1833. Neumann, Die thermischen, optischen und krystallographischen Achsen des Krystallsystemes des Gypses, *Pogg. Ann.*, XXVII, 240.

1833. Brewster, On the Action of Heat in changing the Number and Nature of the optical Axes of Glauberit, *Phil. Mag.*, (3), I, 417.

1833. Quetelet, Sur les propriétés optiques en minéralogie (Exposé des travaux de Brewster), *Supplément à la traduction du Traité de la lumière de W. Herschel*, t. II, p. 349.

1833. Marx, Ueber die Veränderung der optischen Achsen des Topases durch die Wärme, *Schweigger's Journ.*, LXIX, 140.

1835. Neumann, Ueber die optischen Eigenschaften der hemiprismatischen oder zwei- und eingliedrigen Krystalle, *Pogg. Ann.*, XXXV, 81, 203.

1835. Dove, Ueber die optischen Eigenschaften hemi- und tetartoprismatischer Krystalle, *Pogg. Ann.*, XXXV, 380.

1835. Joh. Müller, Notiz über die optischen Eigenschaften des arseniksauren Kupferoxyds, *Pogg. Ann.*, XXXV, 472.

1835. Rudberg, Sur la double réfraction de l'apophyllite, *Corresp. mathém. et phys.*, VIII, 221. — *Pogg. Ann.*, XXXV, 522.

1835 bis 1842. Miller, On the Position of the Axes of optical Elasticity in Crystals belonging to the oblic-prismatic System, *Cambr. Trans.*, V et VII. — *Pogg. Ann.*, XXXVII, 366; LV, 624; LVI, 174.

1835. Quetelet, Exposé des travaux de M. Nörremberg sur la variation du plan des axes optiques avec la couleur, *Inst.*, III, 205.

1836. Talbot, Observations faites avec le microscope polarisant sur les cristaux de borax, *C. R.*, II, 472.

1837. Babinet, Mémoire sur les propriétés optiques des minéraux, *C. R.*, IV, 758. — *Inst.*, V, 214.

1839. Babinet, Recherches d'optique minéralogique, *C. R.*, VIII, 762.

1840. Miller, On the Form and optical Constants of Nitre, *Phil. Mag.*, (3), XVII, 38.

1842. Miller, On the Form and optical Constants of Anhydrite, *Phil. Mag.*, XIX, 178.

1842. Brewster, On the Polarisation Microscop, 10th *Rep. of Brit. Assoc.*, p. 10.

1842. Miller, On the optical Constants of Tourmaline, Dioptas and Anastas, *Phil. Mag.*, (3), XXI, 277.

1843. Mac Cullagh, On the Dispersion of the optical Axes in biaxial Crystals, *Phil. Mag.*, (3), XXI, 293.

1844. Amici, Note sur un appareil de polarisation. — Description du petit microscope achromatique de M. Amici, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XIII, 114.

1844. Babinet, Note sur le microscope polarisant d'Amici, *C. R.*, XIX, 36.

1845. Biot, Sur les propriétés optiques de la cymophane, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XIII, 355. (Experimentelle Bestimmung des Achsenwinkels.)

1848. Aug. Beer, *De situ axium opticorum in crystallis biaxibus*, Inauguraldissertation, Bonn.

1850. Moigno et Soleil, Note sur un nouveau caractère distinctif entre les cristaux à un axe positifs et négatifs, *C. R.*, XXX, 361.

1850. Angström, Mémoire sur les constantes moléculaires des cristaux du système monoclinoédrique, *Mém. de l'Acad. de Stockholm*, 1850. — *Ann. de chim. et de phys.* (3), XXXVIII, 119.

1851. De Senarmont, Observations sur les propriétés optiques des micas et leur forme cristalline, *C. R.*, XXXIII, 684. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXIV, 171.

1851. De Senarmont, Recherches sur les propriétés optiques biréfringentes des corps isomorphes, *C. R.*, XXXIII, 447. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXIII, 391.

1851. Blacke, On a Method for distinguishing between biaxial and uniaxial Crystals when in thin Plates and the Results of the Examination of several supposed uniaxial Crystals, *Sillim. Journ.*, (2), XII, 6.

1852. Grailich, Bestimmung des Winkels der optischen Achsen, mittelst der Farbenringe angewendet auf den Bleibaryt, *Wien. Ber.*, IX, 934.

1853. E. Wilde, Ueber die Berechnung der Achsenwinkel der zweiachsigen Krystalle, *Pogg. Ann.*, XC, 183.

1853. Grailich, Untersuchungen über den ein- und zweiachsigen Glimmer, *Wien. Ber.*, XI, 46.

1853. Heusser, Vergleichung der Werthe der Winkel der optischen Achsen, die aus directen Messungen der scheinbaren Achsen folgen mit den aus den Brechungscoefficienten berechneten für Arragonit und Schwerspath, *Pogg. Ann.*, LXXXIX, 532.

1854. De Senarmont, Remarques sur les propriétés optiques de quelques cristaux, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XLI, 336.

1854. Beer, Ueber die Dispersion der Hauptschnitte zweiachsiger Krystallplatten, sowie über die Bestimmung der optischen Achsen durch Beobachtung der Hauptschnitte, *Pogg. Ann.*, XCI, 279.

1854. Kobell, Stauroskop. — Stauroskopische Beobachtungen, *Münchener gelehrte Anzeigen*, XL, 145; XLI, 60; XLII, 78; XLIII, 1. — *Pogg. Ann.*, XCV, 320. — *Inst.*, XXIII, 146; XXV, 45.

1854. Soleil Fils, Note sur la direction de l'axe optique dans le cristal de roche déterminée par un petit nombre de faces naturelles, *C. R.*, XXXVIII, 507.

1854. Heusser, Ueber die Dispersion der Elasticitätsachsen in zwei- und eingliedrigen Krystallen, *Pogg. Ann.*, XCI, 497.

1854. Zamminer, Ueber die Berechnung der Achsenwinkel zweiachsiger Krystalle, *Liebig's Ann.*, XC, 90.

1856. Haidinger, Ein optisch-mineralogisches Aufschraubegoniometer, *Wien. Ber.*, XVIII, 110. — *Pogg. Ann.*, XCVII, 590.

1857 bis 1859. Descloiseaux, Sur l'emploi des propriétés optiques biréfringentes pour la détermination des espèces cristallisées, *C. R.*, XLIV, 322. — *Ann. des Mines*, (3), XI, 261; XIV, 339.

1857. Descloiseaux, *De l'emploi des propriétés optiques biréfringentes en minéralogie*, Paris.

1858. Grailich, *Krystallographisch-optische Untersuchungen*, Wien.

1858. Grailich und v. Lang, Untersuchungen über die physikalischen Verhältnisse krystallisirter Körper. — Orientirung der optischen Elasticitätsachsen der Krystalle des rhombischen Systems, *Wien. Ber.*, XXVII, 3; XXXI, 85. — *Inst.*, XXVI, 433.

1858. Handl, v. Lang und Murman, Krystallographische Untersuchungen, *Wien. Ber.*, XXVII, 171.

1859. Murman und v. Rotter, Untersuchungen über die physikalischen Verhältnisse krystallisirter Körper. — Orientirung der Schwingungsachsen des Lichtes in Krystallen des monoklinoedrischen Systems, *Wien. Ber.*, XXXIV, 135.

1859. Descloiseaux, Nouvelles recherches sur les propriétés biréfringentes des corps cristallisées, *C. R.*, XLVIII, 264. — *Inst.*, XXVII, 33.

1859. Jeuzsch, Bemerkungen über optisch zweiachsige Turmaline, *Pogg. Ann.*, CVIII, 645.

1860. Schrauf, Bestimmung der optischen Constanten krystallisirter Körper, *Wien. Ber.*, XLI, 769; XLII, 107. — *Pogg. Ann.*, CXII, 588.

1860. Kirchhoff, Ueber die Messung der Winkel der optischen Achsen des Arragonits, *Pogg. Ann.*, CVIII, 567. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LIX, 488.

1861 bis 1862. Descloiseaux, Note sur les modifications temporaires et sur une modification permanente que l'action de la chaleur apporte à quelques propriétés optiques du feldspath orthose et de quelques autres corps cristallisées, *C. R.*, LIII 64; LV, 651. — *Inst.*, XXIX, 234; XXX, 350. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXVIII, 191.

1861. Descloiseaux, Mémoire sur un nouveau procédé propre à mesurer l'indice moyen et l'écartement des axes optiques dans certaines substances où cet écartement est très-grand, *C. R.*, LII, 784.

1861. Ditscheiner, Ueber die Anwendung der optischen Eigenschaften in der Naturgeschichte der unorganischen Naturproducte, *Wien. Ber.*, XLIII, 229.

1861. Schrauf, Erklärung des Vorkommens optisch zweiachsiger Substanzen im rhomboedrischen Systeme, *Pogg. Ann.*, CXIV, 221.

1861. P. Desains, Photographie des résultats obtenus en faisant tomber sur une lame de spath d'Islande une nappe conique de rayons lumineux, *Inst.*, XXIX, 187.

1862. v. Lang, Ueber einen Apparat zur Messung des Winkels der optischen Achsen, *Wien. Ber.*, XLV, 587.

1862. v. Lang, Orientirung der optischen Elasticitätsachsen in den Krystallen des rhombischen Systems, *Wien. Ber.*, XLV, 103.

1863. Bertin, Note sur le microscope polarisant de Nörremberg, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXIX, 87.

1864. Ditscheiner, Revision der vorhandenen Beobachtungen an krystallinischen Körpern, *Wien. Ber.*, XLVIII, 370.

1864. Bertin, Sur les propriétés optiques de la glace, *Ann. de chim. et de phys.*, (4), I, 240.

1864. Breithaupt, Ueber den Quarz von Cuba und über optische Zweiachsigkeit tetragonaler und hexagonaler Krystalle, *Pogg. Ann.*, CXXI, 326.

1864. Dove, Ueber die optischen Eigenschaften des Quarzes von Cuba, *Berl. Monatsber.*, 1864, S. 239. — *Pogg. Ann.*, CXXII, 457. — *Ann. de chim. et de phys.*, (4), III, 505.

1864. Hoffmann, Polarimikroskope, *Mondes*, IV, 423.

1865. Pfaff, Ueber eine eigenthümliche Structur des Beryll und die angeblich optisch zweiachsigen Krystalle des quadratischen und hexagonalen Systems, *Pogg. Ann.*, CXXIV, 448.

1866. Descloiseaux, Nouvelles recherches sur les propriétés optiques des cristaux naturels et artificiels et sur les variations que ces propriétés éprouvent sous l'action de la chaleur, *Mém. des sav. étrang.*, XVIII.

1866. Brezina, Ueber eine neue Modification des Kobell'schen Stauroskops und des Nörremberg'schen Polarisationsmikroskops, *Pogg. Ann.*, CXXVIII, 246.

1867. V. v. Lang, Krystallographisch-optische Bestimmungen mit Rücksicht auf homologe und isomorphe Reihen, *Wien. Ber.* — *Inst.*, XXV.

1867. A. Brio, Krystallographisch-optische Untersuchungen, *Wien. Ber.*, LV. — *Inst.*, XXXV.

1867. A. Brio, Optische Untersuchungen der Krystalle des unterschwefelsauren Baryts, *Wien. Ber.*, LV.

1867. M. Erofejeff, Optische Untersuchungen der Krystalle des schwefelsauren Eisenoxyduls, *Wien. Ber.*, LVI. — *Inst.*, XXXV.

1867. M. Erofejeff, Bestimmung der Hauptbrechungsquotienten des schwefelsauren Ammoniak, *Wien. Ber.*, LV.

1867. Wyrouboff, Sur les propriétés optiques de quelques nouveaux tartrates, *Ann. de chim.* (4), X.
1867. Reusch, Ueber die sogenannte Lamellenpolarisation des Alauns, *Berl. Monatsber.* — *Pogg.*, CXXXII.
1867. v. Kobell, Ueber das Verhalten des Disthen im Stauroskop und über die dabei zu beobachtenden nicht drehbaren Kreuze, *Münchener Ber.*
1868. Rammelsberg, Krystallform und optisches Verhalten des halb-überjodsauren $K^4J^2O^9 + 9$ aq., *Pogg.*, CXXXIV.
1868. P. Groth, Krystallographisch-optische Untersuchungen, *Pogg.*, CXXXV.
1868. P. Groth, Beiträge zur Kenntniss der überchlorsauren und übermangansauren Salze, *Pogg.*, CXXXIII.
1868. Descloiseaux, Mémoire sur la forme clinorhombique à laquelle on doit rapporter l'harmotome et la Wöhlerite, d'après de nouvelles recherches sur la dispersion de leurs axes optiques, *Ann. de chim.* (4), XIII. — *C. R.*, LXVI.
1868. Lamy et Descloiseaux, Études chimiques, optiques et cristallographiques sur les sels de thallium, *C. R.*, LXVI. — *Inst.*, XXXVI.
1869. Descloiseaux, Nouvelles recherches crystallographiques et optiques sur la forme clinorhombique du wolfram, *C. R.*, LXIX. — *Inst.*, XXXVII.
1869. Descloiseaux, Mémoire sur la forme cristalline, les propriétés optiques et la composition chimique de la Gadolinite, *Ann. de chim.*, (4), XVIII.
1869. Lamy et Descloiseaux, Études chimiques, optiques et cristallographiques sur les sels de thallium, *Ann. de chim.*, (4), XVII.
1869. Descloiseaux, Note sur la forme cristalline et sur les propriétés optiques du paratatrate de potasse, *Ann. d. chim.*, (4), XVII.
1869. Tschermak, Optische Untersuchungen der Boraxkrystalle, *Wien. Ber.*, LVII.
1869. Ditscheiner, Krystallographische Beobachtungen, *Wien. Ber.*, LX.
1869. Tschermak, Optische Untersuchung des Sylvins, *Wien. Ber.*, LVIII.
1869. Fr. v. Kobell, Ueber das Verhalten des Disthens im Stauroskop und über die dabei zu beobachtenden, nicht drehbaren Kreuze, *Pogg.*, CXXXVI.
1869. E. Reusch, Ueber die Körnerprobe am zweiachsigen Glimmer, *Pogg.*, CXXXVI, 130.
1869. E. Reusch, Ueber die Körnerprobe am zweiachsigen Glimmer, *Pogg.*, CXXXVI, 632.
1869. M. Bauer, Untersuchung über den Glimmer und verwandte Mineralien, *Pogg.*, CXXXVIII.
1869. E. Reusch, Die Körnerprobe am krystallisirten Gypse, *Pogg.*, CXXXVI.
1869. Tschermak, Mikroskopische Unterscheidung der Mineralien aus der Augit-, Amphibol- und Biotitgruppe, *Wien. Ber.*, LX.
1869. H. C. Sorby und P. J. Butler, Sur la structure des rubis, des saphirs, des diamants et de quelques autres minéraux. *Mondes*, (2), XX.
1870. A. Brezina, Krystallographische Studien über rhombischen Schwefel, *Wien. Ber.*, LX.
1870. V. v. Lang, Krystallographisch-optische Bestimmungen, *Wien. Ber.*, LXVI.
1870. Descloiseaux, Note sur la forme crystalline et les propriétés optiques d'une combination de protochlorure de platine et de triéthylphosphine analogue au sel de Magnus, *C. R.*, LXX. — *Mondes*, (2), XXIII.
1870. Ditscheiner, Ueber die Dispersion der optischen Achsen bei rhombischen Krystallen, *Wien. Ber.*, LX. (Dispersionsformel der optischen Achsenwinkel.)
1871. J. Müller, Chromatische Polarisation der Hagelkörner, *Pogg.*, CXLIV.

1871. A. Kurz, Ueber die Helligkeit des von einer Turmalinplatte durchgelassenen Lichtes, *Pogg.*, CXLI.
1871. Tschermak, Ueber Pyroxen und Amphibol, *Jahrbuch der k. k. geol. Reichsanstalt.*
1872. A. Descloiseaux, Mémoire sur les propriétés optiques les plus propres à determiner le type cristallin des espèces naturelles ou artificielles dont les cristaux sont imparfaits ou offrent une forme limite. Association franç. p. l'avanc. d. sciences, *Congr. de Bordeaux.* — *Nature*, VI.
1872. Jaunetaz, Sur un nouveau type de cristaux idiocyclophanes, *C. R.*, LXXIV.
1872. A. Brezina, Krystallographische Studien an Wiserin, Xenotin, Mejonit, Gyps, Erythrin, *Tschermak's mineralog. Mitth.*
1872. V. v. Lang, Optische Eigenschaften des schwefelsauren Methylendiamins, *Wien. Anz.*
1878. V. v. Lang, Grösse und Lage der Elasticitätsachsen beim Gyps, *Ber. d. Wien. Akad.*, LXXVI.
1878. V. v. Lang, Verbindung des Spectralapparates mit dem Achsenwinkelapparate, *Zeitschr. f. Krystallogr.*, II.
1879. Bertrand, Ueber Büschel einachsiger Krystalle, *J. d. Phys.*, VIII.
1879. A. Bertin, Ueber idiocyclophane Krystalle, *Ann. de chim. et de phys.*, XV.
1879. A. Cornu, Ueber die Büschel pleochroistischer Krystalle, *Zeitschr. f. Krystallogr.*, III.
1879. E. Mallard, Dasselbe, *Zeitschr. f. Krystallogr.* III.
1879. Fr. Klocke, Ueber die optische Structur des Eises, *Neues Jahrb. f. Min.*
1879. V. v. Lang, Ueber die optischen Eigenschaften der Stärke, *Phil. Mag.*, (5), VII.
1879. G. G. Stokes, Brennpunkte der Linien, die durch eine doppeltbrechende Krystallplatte unter dem Mikroskop betrachtet werden, *Proc. Roy. Soc. Lond.*
1879. Sorby, Optische Eigenschaften von Krystallen, *Min. Mag.*, I.
1879. Sorby, Bestimmung von Mineralien in Dünnschliffen, *Min. Mag.*, II.
1879. Sorby, Verbesserte Methode für die optische Untersuchung der Mineralien, *Min. Mag.*, II.
1879. W. Staedel und Kleinschmidt, Ueber das Isoindol, *Chem. Ber.*, XI.
1879. G. Adams, Polariskop zum Messen, *Phil. Mag.*, XLVI.
1879. E. Schneider, Polarisationsmikroskop zur Messung von Achsenwinkeln, *Carl, Rep.*, XV.
1879. W. Baily, Stärke und Glas unter dem Polariskop, *Phil. Mag.*, (5), VII.
1880. A. v. Lasaulx, Ueber einen kleinen Apparat zum Messen des optischen Achsenwinkels im Mikroskop, *Zeitschr. f. Krystallogr.*, IV.
1880. A. v. Lasaulx, Krystallträger zum Messen des optischen Achsenwinkels in Oel bei horizontaler Stellung der Goniometerachse, *Zeitschr. f. Krystallogr.*, IV.
1880. A. Fock, Ueber die Aenderung der Brechungsexponenten isomorpher Mischungen mit deren chemischer Zusammensetzung, *Zeitschr. f. Krystallogr.*, IV.
1880. H. Dufet, Ueber die optischen Eigenschaften von Gemischen isomorpher Salze, *C. R.*
1880. H. Laspeyres, Die krystallographischen und optischen Eigenschaften des Manganepidot, *Zeitschr. f. Krystallogr.*
1880. W. Staedel und Fr. Kleinschmidt, Ueber das Isoindol, *Chem. Ber.*
1881. A. Grosse-Bohle, Ueber das optische Verhalten des Sernarmontits und der regulären arsenigen Säure, *Zeitschr. f. Krystallogr.*, V.
1881. L. Calderon, Optische Eigenschaften der Zinkblende von Santander, *Zeitschr. f. Krystallogr.*, IV.

1881. **W. Voigt**, Ueber den Einfluss der Krümmung der Prismenflächen auf die Messungen der Brechungsindices und über die Beobachtungen des Herrn Chalderon an der Zinkblende, *Zeitschr. f. Krystallogr.*, V.

1881. **H. Dufet**, Einfluss der Temperatur auf die Doppelbrechung des Gypses, *Bull. Soc. Min.*, IV.

1881. **v. Kobell**, Ueber Polarisationsbilder an Zwillingen zweiachsiger Krystalle, *Münch. Ber.*

1882. **H. Laspeyres**, Ueber Stauroskope und stauroskopische Methoden, *Zeitschr. f. Instrumentenkunde.*

1882. **M. E. Mallard**, Ueber die Messung des Winkels der optischen Achsen, *Bull. d. la Soc. min. d. Fr.*

XXVIII.

Rotationspolarisation.

296. Die Rotationspolarisation.

Arago entdeckte im Jahre 1811 gleichzeitig mit der chromatischen Polarisation auch die Rotationspolarisation [1]. Indem er das Verhalten der polarisirten Strahlen beim Durchgange durch Krystallplatten studirte, erkannte er, dass eine senkrecht zur Achse geschnittene Quarzplatte exceptionelle Erscheinungen zeigt. Während sonst eine senkrecht zur Achse geschnittene Krystallplatte den Polarisationszustand eines senkrecht hindurchgehenden Strahles in keiner Weise verändert, so dass der Analyseur keine Farben zeigt, erscheinen im Gegentheil bei Anwendung einer senkrecht zur Achse geschnittenen Quarzplatte die beiden Bilder des Analyseurs sehr lebhaft, und zwar complementär gefärbt.

Diese Färbungen unterscheiden sich von jenen der chromatischen Polarisation zweifach:

1. Dreht man die Quarzplatte um eine ihrer Achse parallele Gerade, so ändern sich die Farben der Bilder nicht.

2. Dreht man den Analyseur, so zeigt jedes der beiden Bilder successive eine Reihe von Farben, welche continuirlich in einander übergehen. Die Reihe der Farben wiederholt sich nach einer Drehung um 180 Grade, und die einer Drehung α entsprechende Farbe eines der beiden Bilder entspricht jener Farbe, welche das andere Bild bei einer Drehung $\alpha \pm 90^0$ zeigt.

Arago bemerkte, dass diese Erscheinungen sich aus der Annahme erklären lassen, dass ein homogener, geradlinig polarisirter Strahl beim Durchgange durch den Krystall eine von der Farbe abhängige Drehung der Polarisationsebene erfährt. Daher die Benennung Rotationspolarisation.

[1]) *Mém. de la prem. classe de l'Inst.* XII.

297. Experimentelle Gesetze.

Man verdankt den ausgedehnten experimentellen Forschungen Biot's die Aufstellung der Gesetze der Rotationspolarisation[1]. Biot operirte mit mittelmässig homogenem Lichte, welches er durch prismatische Zerlegung des Sonnenlichtes erhielt. Um die Drehung der Polarisationsebene zu messen, brachte er vor Einschaltung der Quarzplatte den Analyseur in solche Lage, dass das ausserordentliche Bild ausgelöscht war. Nach Einschaltung der Quarzplatte wurde der Analyseur gedreht bis zur erneuerten Auslöschung des ausserordentlichen Bildes. Es ergaben sich die folgenden Gesetze:

1. Die Rotation der Polarisationsebene ist proportional der Dicke der Platte. Sie ist dieselbe für gleich dicke Platten verschiedener Quarzkrystalle und ändert sich nicht, wenn die Platte umgekehrt wird.

2. Es giebt Quarzkrystalle, welche die Polarisationsebene nach rechts drehen (von der Seite des Beobachters im Sinne des Uhrzeigers), und andere, welche die Polarisationsebene nach links drehen. Man nennt die ersteren rechtsdrehend und giebt ihnen das Zeichen ↻, die letzteren linksdrehend ↺.

Will man diese beiden Gesetze experimentell verificiren, so hat man darauf zu achten, dass die Platte hinreichend dünn sei. Ist nämlich die Rotation grösser als 180 Grade, so setzt man sich einem Irrthum aus in Bezug auf den Sinn und in Bezug auf die Grösse der Rotation. Bei Anwendung des rothen Lichtes des Kupferoxydulglases bewirkt eine Quarzplatte von 1 mm Dicke eine Rotation von 18 Graden. Hiernach kann das Maximum der Dicke der Platte bestimmt werden. Benutzt man aber eine Reihe von Platten mit zunehmender Dicke, so kann man das Gesetz, nach welchem die Rotation der Plattendicke proportional ist, auch über 180 Grade hinaus prüfen.

Der Sinn der Rotation ist im Allgemeinen derselbe für Platten desselben Krystallindividuums. Doch existiren Ausnahmen von dieser Regel.

Setzt sich ein Quarzkrystall aus Krystallen von entgegengesetztem Zeichen zusammen, welche durch Ebenen parallel der Achse begrenzt sind, so zeigt eine aus dem Krystalle senkrecht zur Achse geschnittene Platte im Analyseur zwei Bilder, deren jedes aus complementär gefärbten Theilen von der Gestalt des regelmässigen Dreiecks oder Sechsecks besteht. Ein so beschaffener Krystall kann übrigens eine vollständige Durchsichtigkeit und Klarheit zeigen, so dass nur die Erscheinungen der Rotationspolarisation ihn als einen zusammengesetzten Krystall erkennen lassen.

---

[1] *Mém. de l'Acad. des Sc.* II.

Die Erscheinungen compliciren sich, wenn die Theilkrystalle gegen die Achse geneigt sind [1]).

3. Nach dem dritten Gesetze Biot's wächst die Rotation von Roth gegen Violett, und zwar nahezu wie das Quadrat der Wellenlänge abnimmt. Es resultirt hieraus eine Art Dispersion, welche weit ausgiebiger als die prismatische ist; die dünnsten Blättchen zeigen im weissen Lichte Farbenentwickelung. Wie man sieht, ist die Rotation des violetten Strahles ungefähr dreimal so gross als die des rothen. Biot erhielt die folgenden Zahlen für eine Quarzplatte von 1 mm Dicke:

Farbe	λ	Rotation
Aeusserstes Roth	645	17° 29′ 47″
Rothes Glas	628	18 25 0
Mitte zwischen Roth und Orange	596	20 28 47
„ „ Orange und Gelb	571	22 18 49
Mittleres Gelb	550	24 0 0
Mitte zwischen Gelb und Grün	532	25 40 31
„ „ Grün und Blau	492	30 2 45
„ „ Blau und Indigo	459	34 34 18
„ „ Indigo und Violett	439	37 51 58
Aeusserstes Violett	406	44 4 58

298. Messung der Rotationsdispersion.

Zur Zeit der ersten experimentellen Studien Biot's über die Rotationspolarisation waren die Fraunhofer'schen Linien noch nicht entdeckt. Später bediente sich zwar Biot bei seinen Messungen sowohl dieser Linien als der von Fraunhofer angegebenen Wellenlängen, doch verfuhr er stets nach demselben Verfahren und seine Resultate sind nicht hinlänglich genau.

Später wendeten Broch [2]) und Wiedemann zur Messung der Rotation der Polarisationsebene das weit genauere Verfahren von Fizeau und Foucault an. Sonnenstrahlen treten durch eine Spalte, einen Nicol, die Quarzplatte, einen Analyseur und ein Prisma, dessen brechende Kante der Spalte parallel ist. Das Spectrum, in welchem die Fraunhofer'schen Linien deutlich sichtbar sein müssen, wird nach Broch mittelst eines Galilei'schen, nach Wiedemann der grösseren Prä-

[1]) Gustav Rose und Descloizeaux, *Mém. des Sav. étrang*, XV. — [2]) *Ann. de chim. et de phys.*, XXXIV.

cision wegen mittelst eines astronomischen Fernrohres mit Fadenkreuz beobachtet.

Liegt der Hauptschnitt des Analyseurs parallel mit der Polarisationsebene der aus dem Quarze kommenden Strahlen einer bestimmten Farbe, so fehlen diese Strahlen im ausserordentlichen Bilde und das Spectrum zeigt entsprechend diesen Strahlen eine mehr minder breite dunkle Bande. Ist die Quarzplatte so dünn, dass der Winkel zwischen den Polarisationsebenen der aus dem Quarze tretenden äussersten rothen und violetten Strahlen, oder kurz der Dispersionswinkel, 180 Grade nicht überschreitet, so zeigt das Spectrum eine einzige dunkle Bande. Dreht man den Analyseur, so durchläuft diese Bande das Spectrum. Liegt der Dispersionswinkel zwischen $n\pi$ und $(n+1)\pi$, so erhält man $n+1$ dunkle Banden, welche sich während der Drehung des Analyseurs dem Spectrum entlang bewegen.

Um die Drehung der Polarisationsebene für eine bestimmte Fraunhofer'sche Linie zu messen, bringt man zunächst den Analyseur in solche Stellung, dass die Linie des Spectrums, mit welcher man operiren will, gut sichtbar sei; alsdann bringt man das Fadenkreuz des Fernrohres in Coïncidenz mit dieser Linie, dreht darauf den Analyseur solchergestalt, dass die Mitte einer schwarzen Bande mit dem Fadenkreuz zusammenfällt und folglich mit der Linie, auf welcher es fixirt ist; die Linie selbst hört im Allgemeinen auf, sichtbar zu sein.

Wächst die Dicke der Quarzplatte, so wächst auch der Dispersionswinkel, die Banden werden zahlreicher und schmaler. Andererseits bewegen sie sich während der Drehung des Analyseurs langsamer. Während durch den einen Umstand die Genauigkeit der Messung zunimmt, nimmt sie durch den anderen ab, und die für die Messung günstigste Plattendicke muss experimentell ermittelt werden.

Die folgende Tafel enthält die von Broch für eine 1 mm dicke Quarzplatte gefundenen Zahlen.

Linie	Drehung	Drehung multiplicirt mit λ^2
B	15° 18′	7238
C	17 15	7429
D	21 40	7511
E	27 28	7596
F	32 30	7622
G	42 12	7842

Die Zahlen der letzten Colonne zeigen, dass das sich auf die Abhängigkeit der Drehung von der Wellenlänge beziehende Gesetz Biot's

nur eine annähernde Giltigkeit hat. Das Product der Drehung der Polarisationsebene und des Quadrates der Wellenlänge variirt im Verhältnisse 12 : 13 und wächst von Roth gegen Violett, wie dies schon Biot gefunden hatte.

Für besonders genau gelten die Messungen J. Stefan's[1]):

Linie	Drehung
B	15·55°
C	17·22
D	21·67
E	27·46
F	32·69
G	42·37
H	50·98

V. v. Lang[2]) fand für die Temperatur 13·3° C.:

Linie	Drehung
Li	16·43°
Na	21·64
Th	26·59

J. L. Soret und E. Sarasin[3]) wendeten, wie ihre Vorgänger, das Fizeau-Foucault'sche Verfahren an. Um die Beobachtungen auf die ultravioletten Strahlen auszudehnen, wurde, wie dies Crouillebois[4]) in etwas anderer Weise schon früher gethan hatte, ein Spectroskop mit fluorescirendem Oculare angewendet[5]). Auch wurde die Drehung in dem weniger brechbaren Theile des Spectrums gemessen.

Das Verfahren der Sichtbarmachung der ultravioletten Strahlen besteht darin, dass in den Brennpunkt des Fernrohres des Spectroskopes eine fluorescirende Platte gebracht und diese mit einem gegen die Achse des Fernrohres neigbaren Oculare betrachtet wird. Die Achse, um welche das Ocular drehbar ist, während es gegen die allgemeine Achse des spectroskopischen Fernrohres geneigt wird, geht durch die fluorescirende Platte, deren Centrum stets im Brennpunkte des Oculars bleibt. Die flüssigen fluorescirenden Lamellen befinden sich zwischen dünnen Glas-

[1]) Wien. Sitzungsber. L. — [2]) Ibid. LXXI. — [3]) Pogg. Ann. CLVII. — [4]) C. R. 1875. — [5]) Pogg. Ann. CLII.

platten, welche etwa einen halben Millimeter gegenseitige Entfernung haben. In gewissen Fällen wurde eine Uranglasplatte angewendet, am häufigsten eine verdünnte Aesculinlösung. Um die Linien *a* und *A* gut wahrzunehmen, reicht es hin, vor der Spalte des Spectroskopes ein blaues Kobaltglas anzubringen.

Es ergab sich:

Linie	Drehung
A	12·68°
a	14·33
h	47·52
H_1	51·22
L	55·88
M	59·04
(*M*)	59·24
N	64·47

Vergleicht man die von Soret und Sarasin für die Linien *B* bis *H* gefundenen Zahlen mit den von Stefan gefundenen, so erweisen sich die ersteren etwas grösser. Die geringen Divergenzen glaubten Soret und Sarasin zum Theil dem Umstande zuschreiben zu müssen, dass ihre Versuche bei hohen Temperaturen angestellt wurden, zum Theil anderen Umständen, welche die Sicherheit der Beobachtung, obzwar in geringem Grade, beeinträchtigten.

Die beiden Physiker dehnten später ihre Untersuchungen auf die ultravioletten Strahlen des Cadmiumlichtes aus und reducirten ihre Messungen mittelst der Formel V. v. Lang's (300). Es ergab sich:

Wellenlänge	Drehungswinkel für 1 mm
34 645	69·454°
34 030	72·448
27 434	121·052
25 742	143·266
23 183	190·402
22 656	201·803
Strahlen d. Cadmiumsp.	
XXV	220·731
XXVI	253·961

P. Desains[1]) machte einen Versuch über die Drehung ultrarother Strahlen. Geht ein Bündel Sonnenstrahlen durch eine Lösung von Jod in Schwefelkohlenstoff, welche nur Wärmestrahlen durchlässt, so wird die Polarisationsebene der durchgegangenen Strahlen im Quarz 16 mal weniger gedreht, als die Strahlen des äussersten sichtbaren Violett.

Man fand für andere Substanzen die folgenden Drehungswinkel bezogen auf 1 dm:

Substanz	Linie *B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	
Zucker $[\rho]$ =	+ 47·56°	52·70	66·41	84·56	101·18	131·96	Stefan, Wien. Ber. LII.
Cholalsäure $[\rho]$ =	+ 28·2	30·1	33·9	44·7	52·7	67·7	Hoppe-Seyler, J. f. pr. Chem. XC.
Cholesterin $[\rho]$ =	— 20·63	25·54	31·59	39·91	48·65	62·37	Lindenmeyer, J. f. pr. Chem. LXXXIX.
Terpentinöl ρ =	— 21·5	23·4	29·3	36·8	43·6	55·9	Wiedemann, Pogg. Ann. LXXXII.
Citronenöl ρ =	+ 34·0	37·9	48·5	63·3	77·5	106·0	

Ein besonders starkes Drehungsvermögen zeigen Santonin, Parasantonid und Santonid. Nach R. Nasini[2]) ist das Drehungsvermögen des Parasantonid in Chloroform gelöst:

	B	*C*	*D*	*E*	b_1	*F*	$\lambda = 4383$	$\lambda = 4226$
$[\varrho]$ =	+ 580·5°	655·6	891·7	1264	1334	1666	2510	2963

299. Dispersionsformel.

Das Gesetz der Veränderlichkeit der Rotation mit der Wellenlänge wurde (297) zuerst von Biot aufgestellt, welcher zeigte, dass die Drehungswinkel nahe dem Quadrate der Wellenlänge verkehrt proportional sind. Es zeigte sich jedoch (298), dass genauere Messungen dieses Gesetz nicht vollkommen bestätigten. V. v. Lang war der erste, welcher das Biot'sche Gesetz so zu ergänzen suchte, dass es mit den Broch'schen Messungen vollkommen übereinstimmte. Stefan[3]) zeigte dann zunächst, dass sich aus den Broch'schen Messungen noch kein sicherer Schluss darüber ziehen lässt, wie die Biot'sche Formel zu ergänzen sei, und machte neue Messungen am Quarz (298).

[1]) Pogg. Ann. CXXVIII. — [2]) *Atti della R. Acc. dei Lincei. Roma* (3) XIII. — [3]) Wien. Ber. L, 88.

L. Boltzmann[1]) erschien es aus theoretischen Gründen wahrscheinlich, dass der Drehungswinkel der Polarisationsebene durch eine Formel von der Gestalt

$$\alpha = \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$$

darzustellen sei. Er nahm nämlich, wie dies schon Biot gethan hatte, an, dass die Drehung der Polarisationsebene wie die Farbenzerstreuung nur daher rühre, dass durch die Körpermolecüle im Aether periodische Dichtigkeitsänderungen erzeugt werden, deren Dimensionen nicht gegen die Wellenlänge verschwinden, und dass solche periodische Dichtigkeitsänderungen eine Drehung der Polarisationsebene dann zur Folge haben, wenn dieselben mit ihren Spiegelbildern nicht congruent, sondern nur symmetrisch sind, wie eine rechtslaufende Schraube mit ihrem Spiegelbilde, der linkslaufenden. Rührt nun die Drehung der Polarisationsebene nur daher, dass die Wellenlänge nicht mehr sehr gross ist gegenüber den Dimensionen der periodischen Ungleichheiten, so folgt, dass die Rotation für grosse Wellenlängen verschwinden muss. Dies war der Grund, weshalb Boltzmann vermuthete, dass die Drehung durch die obige Formel, welche in der That für wachsende Wellenlängen sich immer mehr der Null nähert, besser dargestellt würde, als durch einen Ausdruck, der diese Eigenschaft nicht besitzt.

Boltzmann verglich seine Formel mit den Messungen Stefan's, für welche letzteren schon der Umstand sprach, dass die Differenzen zwischen diesen Messungen und den nach einer Näherungsformel gerechneten Zahlen eine gewisse Regelmässigkeit zeigten. Es ergab sich, dass die Stefan'schen Beobachtungen am Quarze und die Wiedemann'schen am Citronen- und Terpentinöl sehr genau sind. Boltzmann berechnete die von Stefan für die Drehungswinkel α der Polarisationsebene durch eine 1 mm dicke Quarzsäule gefundenen Zahlen mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate aus seiner Formel. Es ergab sich unter Benutzung der Ditscheiner'schen Werthe der Wellenlängen:

$$\alpha = \frac{7{\cdot}07018}{10^6\,\lambda^2} + \frac{0{\cdot}14983}{10^{12}\,\lambda^4},$$

welche Formel von den Beobachtungen nur um hundertstel Grade abweicht.

Ebenso fanden Soret und Sarasin[2]), dass Boltzmann's Formeln auch innerhalb der ausgedehnteren Grenzen ihrer Beobachtungen eine sehr vollständige Uebereinstimmung gaben, die Differenzen überschritten auch hier nicht Hundertstel von Graden.

Die von Soret und Sarasin für die obige Formel gerechneten Werthe der Coëfficienten[3]), welche auf Grund der Drehungswinkel der

---

[1]) Pogg. Jubelband. — [2]) Loc. cit. — [3]) C. R. LXXXIV.

D-Linie und des ultravioletten Strahles $\lambda = 0{\cdot}00023183$ des Cadmiumspectrums erhalten wurden, stimmen mit den obigen Coëfficienten auf eine Decimalstelle überein. Später fanden Soret und Sarasin[1]), dass, wenn man in Boltzmann's Formel λ durch l ersetzt, die Wellenlänge im Quarz, eine solche Formel sich noch wesentlich besser an die Beobachtungen anschliesst.

300. Abhängigkeit der Drehung von der Temperatur.

V. v. Lang[2]) stellte Beobachtungen an zur Bestimmung der Aenderung des Drehungswinkels einer Quarzplatte, wenn dieselbe auf verschiedene Temperaturen gebracht wird, zu welchem Zwecke sich die Quarzplatte in einem Erhitzungsapparate befand. Die Messung der Drehungswinkel geschah nach der Fizeau-Foucault'schen Methode. Es ergab sich, dass die relative Aenderung der Drehungswinkel des Quarzes für alle Farben dieselbe ist. Die Grösse dieser Aenderung ist gegeben durch die Formel

$$\alpha = \alpha_0 (1 + 0{\cdot}000149\, t),$$

in welcher α_0 den Drehungswinkel irgend einer Farbe bei 0^0 und α den Winkel für dieselbe Farbe bei t^0 C. bedeutet.

Nach neueren Versuchen von Sohncke[3]) wäre noch genauer:

$$\alpha = \alpha_0 (1 + 0{\cdot}0000999\, t + 0{\cdot}000000318\, t^2).$$

Indessen fanden Soret und Sarasin[4]), dass in geringem Grade doch eine Abhängigkeit von der Farbe vorhanden ist, und dass der Einfluss der Temperatur mit der Brechbarkeit wächst. Für die Linie

$$Cd\, 24\, (\lambda = 0{\cdot}000226),$$

also für eine ungemein brechbare Farbe, ergab sich zwischen 0 und 20^0 die Correctionsformel

$$\alpha = \alpha_0 (1 + 0{\cdot}000179\, t),$$

ferner für die Natriumlinie zwischen 0^0 und 100^0 ein Coëfficient, welcher genau mit dem von V. v. Lang gefundenen übereinstimmt, weniger mit dem von Sohncke gefundenen.

301. Wirkung des weissen Lichtes.

Wendet man weisses Licht an, so erfahren die Polarisationsebenen der einzelnen einfachen Farben, aus welchen das weisse Licht besteht,

1) C. R. XCV. — 2) Loc. cit. — 3) Wied. Ann. III. — 4) C. R. XCV.

verschiedene Rotationen und bilden mit dem Hauptschnitte des Analyseurs verschiedene Winkel. Die Intensität einer dieser Farben im ordentlichen Bilde des Analyseurs erhält man durch Multiplication der ursprünglichen Intensität mit dem Quadrate des Cosinus des Winkels der Polarisationsebene dieser Farbe mit dem Hauptschnitte des Analyseurs. Demnach werden die einfachen Farben im ordentlichen Bilde nicht in demselben Intensitätsverhältnisse gemischt sein, wie im einfallenden weissen Lichte, und das ordentliche Bild erscheint verschieden gefärbt je nach der Lage des Hauptschnittes des Analyseurs. Dasselbe gilt von dem ausserordentlichen Bilde. Da ferner für jede einfache Farbe die Summe der Intensitäten im ordentlichen und ausserordentlichen Bilde gleich ist der Intensität dieser Farbe im einfallenden Lichte, so sieht man auch, dass die beiden Bilder des Analyseurs complementär gefärbt erscheinen müssen.

Ist die Dicke der Quarzplatte so gross, dass der Dispersionswinkel eine grosse Zahl voller Winkel beträgt, so fehlt in jedem der beiden Bilder eine grosse Zahl der Farben des Spectrums und das Bild erscheint weiss.

Man kann die Farben der beiden Bilder näherungsweise berechnen, wenn man den Winkel α des Hauptschnittes des Analyseurs mit der ursprünglichen Polarisationsebene und die Rotationswinkel x der sieben Hauptfarben des Spectrums kennt. Ist nämlich a die Intensität einer dieser Farben im einfallenden Lichte, und x der mittlere Rotationswinkel derselben, so ist die Intensität dieser Farbe im ordentlichen Bilde

$$a \cos^2 (x - a)$$

und im ausserordentlichen

$$a \sin^2 (x - a).$$

Hat man so die Intensitäten der sieben Hauptfarben in einem der Bilder gefunden, so findet man die resultirende Farbe dieses Bildes nach der Regel Newton's, wie sie in Biot's Physik zu finden ist.

Biot hat eine grosse Zahl experimenteller Verificationen dieser Art durchgeführt und hat stets die vorausberechnete Farbe erhalten.

302. Die sensible Farbe.

Wenn die Dicke der Quarzplatte 5 mm nicht übersteigt, so findet man unter den während der Drehung des Analyseurs auftretenden Farben eine durch besondere Eigenschaften ausgezeichnete Farbe, welche Biot zuerst beobachtet und die sensible Farbe genannt hat. Diese violette Farbe zeigt unter den Farben, welche während der Drehung des Analyseurs der Reihe nach auftreten, ein deutliches Minimum der Helligkeit. Die geringste Drehung des Analyseurs im einen oder anderen

Sinne genügt, diese Farbe in Roth oder Blau zu verwandeln, daher sie die sensible Farbe heisst.

Die sensible Farbe entsteht, wenn durch den Analyseur die gelben, d. i. die lichtstärksten Strahlen, ausgelöscht werden. Setzt man eine Quarzplatte von 1 mm Dicke voraus und benutzt man die von Biot (297) für die Rotation der Polarisationsebene der einzelnen Farben des Spectrums gefundenen Zahlen, so erhält man für die Rotationen der einzelnen Farben, bezogen auf die Rotation des gelben Strahles:

Aeusserstes Roth	6^0	30′
Rothes Glas Biot's	5	35
Mitte zwischen Roth und Orange	3	31
„ „ Orange und Gelb	1	41
Mittleres Gelb	0	0
Mitte zwischen Gelb und Grün	1	40
„ „ Grün und Blau	6	3
„ „ Blau und Indigo	10	34
„ „ Indigo und Violett	13	52
Aeusserstes Violett	20	5

Wird das mittlere Gelb im Analyseur ausgelöscht, so erhält man die Intensitäten der verschiedenen Farben im ausserordentlichen Bilde, wenn man die ursprünglichen Intensitäten mit den Quadraten des Sinus dieser Winkel multiplicirt. Es ergiebt sich hieraus, dass die sensible Farbe sich aus Violett und Blau zusammensetzt, gemischt mit etwas Roth und Orange.

Uebersteigt die Dicke der Quarzplatte nicht 5 mm, so kann man durch Messung der Rotation der sensiblen Farbe, ohne vom homogenen Lichte Gebrauch zu machen, die Rotationen der einzelnen Farben des Spectrums bestimmen, indem man von dem Satze Gebrauch macht, nach welchem die Rotationen den Quadraten der Wellenlängen verkehrt proportional sind.

Es versteht sich von selbst, dass, wenn das einfallende Licht oder der Quarz selbst gefärbt sind, und das Maximum der Intensität nicht mehr dem mittleren Gelb entspricht, die sensible Farbe eine andere sein wird, als bei weissem Lichte.

303. Polariskopische Anwendung.

Eine Quarzplatte verbunden mit einem Analyseur gestattet die Polarisationsrichtung eines hindurchtretenden weissen Lichtstrahles mittelst der Farben, welche er giebt, zu erkennen. Um die Lage der Polarisationsebene zu bestimmen, sucht man zunächst den Winkel, welchen der Hauptschnitt des Analyseurs mit der ursprünglichen Polari-

sationsebene bilden muss, damit die sensible Farbe erscheine. Ist dieser Winkel bekannt, so hat man in einem gegebenen Falle den Analyseur einfach auf die sensible Farbe zu stellen, um die Lage der Polarisationsebene des einfallenden Strahles zu erhalten.

Soleil hat das Verfahren abgeändert, um eine grössere Genauigkeit der Bestimmung der Lage der Polarisationsebene zu ermöglichen. Die Quarzplatte hat die Gestalt einer kreisförmig begrenzten Scheibe und besteht aus zwei halbkreisförmigen Hälften. Eine von diesen dreht rechts, die andere links und beide haben eine Dicke gleich 3·75 mm, so dass jede von ihnen den mittleren gelben Strahl um 90 Grade dreht, die eine rechts, die andere links. Steht also der Hauptschnitt des Analyseurs senkrecht auf der ursprünglichen Polarisationsebene, so zeigen die beiden Hälften des ausserordentlichen Bildes die sensible Farbe, so dass das Bild gleichmässig gefärbt erscheint. Dreht man jedoch den Analyseur um ein Geringes, so wird die eine Hälfte des Bildes roth, die andere blau. Um also die Lage der Polarisationsebene zu bestimmen, dreht man den Analyseur, bis die beiden Hälften des ausserordentlichen Bildes gleich gefärbt erscheinen; dann steht der Hauptschnitt des Analyseurs senkrecht auf der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes.

Der Soleil'sche Doppelquarz kann auch dazu dienen, das Drehvermögen einer Substanz zu erkennen, welche vor dem Doppelquarze eingeschaltet wird.

304. Fresnel's Theorie.

Kurze Zeit nach der Entdeckung der Erscheinungen der Rotationspolarisation kam Fresnel mit einer theoretischen Interpretation derselben auf dem Boden der Wellentheorie [1]). Fresnel's Erklärung stützt sich auf die Thatsache, dass ein circularpolarisirter Strahl in der Richtung der Achse eines Quarzkrystalles ohne Alteration fortschreitet. In der That kann jeder circularpolarisirte Strahl als eine Superposition zweier rechtwinkelig polarisirter Strahlen angesehen werden, deren Gangunterschied gleich $\frac{\lambda}{4}$ ist; indem beide Strahlen beim Durchgange durch den Quarz gleiche Rotationen erfahren und der Gangunterschied unverändert bleibt, ist der austretende Strahl abermals ein circularpolarisirter Strahl, oder wie man der Kürze wegen sagen kann, ein Circularstrahl. Man sieht, dass beim Durchgange durch eine senkrecht zur Achse geschnittene Quarzplatte der Circularstrahl das einfachste Verhalten zeigt, indem er ungeändert bleibt. Es giebt aber zwei Gattungen Circularstrahlen, welche wir als Rechtscircularstrahlen und Linkscircularstrahlen unterscheiden wollen.

---

1) *Ann. de chim. et de phys.* (2) XXVIII, 147.

Um die Erscheinungen der Rotationspolarisation zu erklären, genügt es, wie Fresnel gezeigt hat, anzunehmen, dass in der Richtung der Achse des Quarzes die beiden Arten von Circularstrahlen sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen, und dass in einem rechtsdrehenden Krystalle jene des Rechtscircularstrahles die grössere sei, in einem linksdrehenden umgekehrt.

305. Erklärung der Rotation der Polarisationsebene.

Ein geradlinig polarisirter Strahl kann stets angesehen werden als eine Superposition zweier Circularstrahlen von entgegengesetztem Sinne und gleicher Periode. In der That, nehmen wir an, dass die Peripherie eines Kreises (Fig. 39) von zwei Punkten, M und M', gleichzeitig im entgegengesetzten Sinne, aber mit gleicher Geschwindigkeit durchlaufen

Fig. 39.

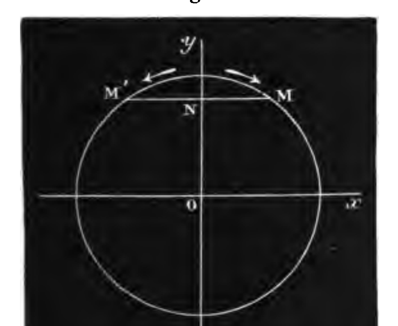
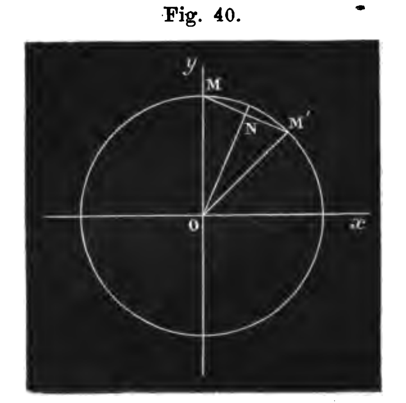


Fig. 40.



werde, und dass die Punkte gleichzeitig die y-Achse passiren, so werden die Positionen M und M', welche die beiden Punkte alsdann in einem gegebenen Momente einnehmen, stets in Bezug auf die y-Achse symmetrisch sein. Zerlegt man die beiden Bewegungen parallel zu den beiden Achsen, so heben sich die Bewegungen parallel der x-Achse gegenseitig auf und es summiren sich die Bewegungen parallel der y-Achse. Man sieht also, dass zwei Circularstrahlen von entgegengesetztem Sinne, gleicher Periode und gleicher Amplitude einem geradlinig polarisirten Strahle von derselben Periode und doppelter Amplitude äquivalent sind, und dass die Schwingungsrichtung dieses geradlinig polarisirten Strahles mit jener Geraden zusammenfällt, in Bezug auf welche die Positionen der beiden sich bewegenden Punkte in jedem Momente symmetrisch sind.

Nehmen wir nun an, dass die beiden Circularstrahlen, welche an die Stelle des einen linearpolarisirten Strahles gesetzt werden können, eine rechtsdrehende Quarzplatte in der Richtung der Achse durchlaufen,

und dass nach der gemachten Annahme der Rechtscircularstrahl sich schneller bewegt, so wird der Punkt M', welcher sich nach links bewegt, in der Phase seiner Bewegung gegen den Punkt M zurückbleiben, welcher sich nach rechts bewegt. In dem Momente also, in welchem der Punkt M die y-Achse (Fig. 40 a. v. S.), passirt, ist der Punkt M' noch nicht dahin gelangt und befindet sich etwa rechts von der y-Achse. Beim Austritte aus der Quarzplatte giebt die Zusammensetzung der beiden Circularstrahlen wieder einen geradlinig polarisirten Strahl, dessen Schwingungsrichtung jedoch nunmehr auf die Winkelhalbirende ON des Winkels MOM' fällt. Es folgt hieraus, dass die Polarisationsebene eine Drehung nach rechts erfahren hat gleich der Hälfte des Winkels MOM'. Dieser Winkel ist proportional der zwischen den beiden Circularstrahlen entstandenen Phasendifferenz, und folglich auch proportional der Plattendicke.

Man sieht gleicher Weise, dass, wenn der Linkscircularstrahl sich schneller bewegt, die Drehung der Polarisationsebene nach links erfolgt.

306. Berechnung.

Nehmen wir an, die Polarisationsebene des in die Quarzplatte tretenden geradlinig polarisirten Strahles stehe auf der x-Achse senkrecht, oder die Schwingungsrichtung falle auf die x-Achse. Die Bewegung kann dann ausgedrückt werden durch

$$x = a \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

An die Stelle dieser Bewegung kann zunächst eine Coexistenz der folgenden beiden Bewegungen gesetzt werden:

$$\xi = \frac{a}{2} \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

$$\xi' = \frac{a}{2} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Man kann ferner, ohne die so gegebene Bewegung zu alteriren, zwei neue Bewegungen hinzufügen, welche sich gegenseitig aufheben:

$$\eta = \frac{a}{2} \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

$$\eta' = -\frac{a}{2} \cos 2\pi \frac{t}{T};$$

dieselben gehen längs der y-Achse vor sich, haben dieselben Amplituden wie die Bewegungen längs der x-Achse, jedoch gegen die letzteren einen Gangunterschied $= \frac{\lambda}{4}$.

Paart man diese vier Bewegungen, so geben die Bewegungen ξ und η einen Rechtscircularstrahl und die Bewegungen ξ' und η' einen Linkscircularstrahl. Setzt man ferner voraus, es seien δ und γ die Dicken zweier Luftschichten, welche von einem Lichtstrahle in denselben Zeiten durchlaufen werden, in welchen der Rechtscircularstrahl und der Linkscircularstrahl die Quarzplatte in der Richtung der Achse durchlaufen, so können die vier aus der Quarzplatte tretenden Bewegungen bei passender Wahl des Nullpunktes der Zeit, und wenn λ die Wellenlänge im leeren Raume ist, ausgedrückt werden durch

$$\xi = \frac{a}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta}{\lambda}\right) \qquad \eta = \frac{a}{2} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta}{\lambda}\right)$$

$$\xi' = \frac{a}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\gamma}{\lambda}\right) \qquad \eta' = -\frac{a}{2} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\gamma}{\lambda}\right).$$

Durch Zusammensetzung dieser vier Bewegungen erhält man:

$$x' = \xi + \xi' = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta + \gamma}{2\lambda}\right) \cos \pi \frac{\delta - \gamma}{\lambda}$$

$$y' = \eta + \eta' = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta + \gamma}{2\lambda}\right) \sin \pi \frac{\delta - \gamma}{\lambda},$$

woraus folgt:

$$\frac{y'}{x'} = \tang \pi \frac{\delta - \gamma}{\lambda}.$$

Man sieht also, dass der austretende Strahl geradlinig polarisirt ist, und dass die Polarisationsebene eine Drehung gleich $\pi \frac{\delta - \gamma}{\lambda}$ nach links oder nach rechts erfahren hat, je nachdem δ grösser oder kleiner als γ ist oder je nachdem der Rechtscircularstrahl sich langsamer oder schneller als der Linkscircularstrahl bewegt hat. Der Winkel der Drehung der Polarisationsebene ist proportional $\delta - \gamma$, also auch proportional der Dicke der Platte.

Was jene Relation betrifft, welche zwischen der Rotation der Polarisationsebene und der Wellenlänge besteht, so lässt sich dieselbe aus Fresnel's Theorie a priori nicht herleiten.

307. Doppelbrechung in der Richtung der Achse.

Fresnel hatte seine Erklärung der Drehung der Polarisationsebene im Quarz auf die Annahme gegründet, nach welcher der linear polarisirte Strahl sich beim Eintritte in den Krystall in zwei entgegengesetzt circularpolarisirte Strahlen zerlegt. Um diese seine Hypothese experimentell zu prüfen, bemerkte er, dass das Vorhandensein zweier

längs der Achse mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortschreitender Strahlen beim Austritte in die Luft eine Doppelbrechung zur Folge haben müsse, sobald nur die Austrittsfläche gegen die Strahlen geneigt ist. Demnach muss nach Fresnel's Theorie ein geradlinig polarisirter Strahl, welcher senkrecht durch eine Kathetenfläche eines rechtwinkeligen Quarzprismas eintritt, dessen Achse ebenfalls auf dieser Kathetenfläche senkrecht steht, beim Austritte aus der Hypotenusenfläche doppelt gebrochen werden, und es müssen die beiden in verschiedenen Richtungen austretenden Strahlen entgegengesetzt circular polarisirt sein.

In dieser einfachen Form gelang es jedoch Fresnel nicht, das Experiment anzustellen, da ein kleiner Incidenzwinkel an der Hypotenusenfläche einen zu geringen Effect bedingt, während ein grosser Incidenzwinkel der totalen Reflexion wegen unbrauchbar ist. Man vermeidet diese Schwierigkeit, indem man eine Combination zweier Prismen, ABC, ACD, Fig. 41, verwendet, von welchen das eine rechts, das andere links dreht, und welche zusammen ein Prisma mit rechteckiger Basis bilden. Ist die Fläche AB normal zur Achse und fällt ein geradlinig polarisirter Strahl SJ normal ein, so zerlegt sich dieser Strahl im ersten Prisma in zwei entgegengesetzt circularpolarisirte Strahlen, welche sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten längs derselben Geraden fortpflanzen. Jener derselben, welcher sich im ersten Prisma mit der grösseren Geschwindigkeit fortpflanzt, thut dies im zweiten mit der kleineren. Er wird also beim Uebergange in das zweite Prisma nach ab gebrochen und nähert sich dem Einfallslothe. Der andere Circularstrahl entfernt sich vom Einfallslothe und wird nach ac gebrochen. Die so entstandene Divergenz der beiden Strahlen vermehrt sich noch beim Austritte aus dem zweiten Prisma in die Luft.

Fig. 41.

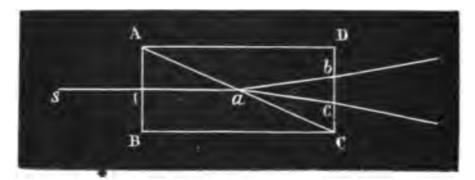
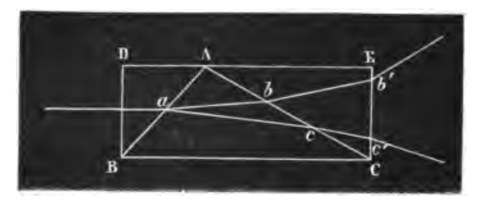


Fig. 42.



Fresnel bediente sich anfangs eines etwas complicirteren, aus drei Prismen bestehenden Apparates, Fig. 42. Eines der Prismen, dessen Winkel 125 Grade beträgt, befindet sich zwischen den beiden anderen, ABD, ACE, und dreht entgegengesetzt jedem dieser beiden Prismen, welche eine solche Gestalt haben, dass das System der drei Prismen ein einziges Prisma von rechteckiger Basis bildet. Ist die Fläche BD normal zur Achse und fällt ein polarisirter Strahl normal durch diese Fläche ein, so trennen sich die beiden Circularstrahlen beim Uebergange in das

zweite Prisma und die Divergenz wird beim Uebergange in das dritte Prisma und beim Austritte in die Luft noch vermehrt. Blickt man durch ein solches Prisma nach einer entfernten Mire, so sieht man dieselbe doppelt.

In Vervollständigung der experimentellen Verification kann man die beiden austretenden Strahlen mittelst eines Analyseurs untersuchen. Die beiden Strahlen geben zwei gleich helle Bilder bei jeder Lage des Analyseurs und verwandeln sich beim Durchgange durch ein $\frac{\lambda}{4}$-Blättchen in zwei geradlinig polarisirte Strahlen, deren Polarisationsebenen auf einander senkrecht stehen und mit dem Hauptschnitte des Blättchens Winkel von 45 Graden bilden. Dies beweist, dass die beiden Strahlen entgegengesetzt circularpolarisirt sind.

Es ist bei diesen Versuchen wesentlich, dass die Strahlen der Achse parallel gehen. Entfernen sich die Strahlen von dieser Richtung, so erfahren sie gewöhnliche Doppelbrechung, welche eine Zerlegung in zwei geradlinig polarisirte Strahlen verursacht.

Neuester Zeit gelang es Cornu[1]), die Trennung in zwei Circularstrahlen schon mittelst eines einzigen Quarzprismas wahrnehmbar zu machen. Ein Prisma von 60° lieferte eine Trennung von 27″ für Natriumlicht.

308. Geschwindigkeitsunterschied der beiden Strahlen.

Es ist von Interesse, die Grösse des Unterschiedes der beiden Geschwindigkeiten in Betracht zu ziehen, mit welchen sich die beiden Circularstrahlen in der Richtung der Achse des Quarzes fortpflanzen.

Um diese Geschwindigkeitsdifferenz zu berechnen, nehmen wir an, dass eine Quarzplatte von 1 mm Dicke die Polarisationsebene der mittleren gelben Strahlen um 24 Grade dreht, und dass folglich eine Drehung um 360 Grade einer Quarzdicke gleich 15 mm entspricht. Bezeichnet man also durch λ die Wellenlänge der mittleren gelben Strahlen, so hat man

$$\pi \frac{\delta - \gamma}{\lambda} = 2\pi.$$

Ist andererseits V die Geschwindigkeit dieser Strahlen in der Luft, D und G die Geschwindigkeit des Rechtscircularstrahles und des Linkscircularstrahles im Quarz, so ist

$$\delta = 15 \frac{V}{D}, \quad \gamma = 15 \frac{V}{G}.$$

[1]) C. R. XCII.

Setzt man dies in die vorhergehende Gleichung, so ergiebt sich

$$\frac{15}{\lambda}\left(\frac{V}{D}-\frac{V}{G}\right)=2.$$

Setzen wir die Platte als linksdrehend voraus, so hat man $G>D$, und man kann

$$G=D+\varepsilon$$

setzen, wo ε eine sehr kleine Grösse ist. Man hat also sehr nahe

$$\frac{V}{G}=\frac{V}{D\left(1-\frac{\varepsilon}{D}\right)}=\frac{V}{D}\left(1-\frac{\varepsilon}{D}\right)=\frac{V}{D}-\frac{V\varepsilon}{D^2},$$

und folglich

$$\frac{15}{\lambda}\frac{V\varepsilon}{D^2}=2.$$

Das Verhältniss $\frac{V}{D}$ ist merklich gleich dem ordentlichen Brechungsexponenten des Quarzes, 1·508 oder $\frac{3}{2}$ in runden Zahlen. Die vorhergehende Gleichung wird folglich

$$\frac{\varepsilon}{D}=\frac{4\lambda}{45}.$$

Die Wellenlänge λ ist gleich $^1/_{2000}$ mm nahezu, und man hat folglich

$$\frac{\varepsilon}{D}=\frac{4}{90\,000},$$

woraus man schliessen kann, dass der Geschwindigkeitsunterschied der beiden Circularstrahlen kleiner ist, als der zwanzigtausendste Theil einer der beiden Geschwindigkeiten, und dass das Verhältniss der Brechungsexponenten der beiden Strahlen kleiner ist als 1·00005, d. i. kleiner als der Brechungsexponent eines selbst sehr schwach brechenden Gases.

Ist α die Drehung der Polarisationsebene, d die Dicke der Krystallplatte, n_1, n_2 die beiden Brechungsexponenten in der Richtung der Achse, so ist auch

$$\alpha=\frac{d}{\lambda}(n_1-n_2).180^0.$$

309. Das Experiment von Babinet.

Babinet[1]) hat die Ungleichheit der Geschwindigkeiten der beiden Circularstrahlen im Quarze mittelst eines Experimentes nachgewiesen,

---

[1]) C. R. IV, 900.

welches schon von Fresnel angegeben worden war und in einer Modification des Fresnel'schen Spiegelversuches besteht. Man lässt das einfallende Licht homogen und geradlinig polarisirt sein. Ehe es auf den Spiegel fällt, tritt es durch eine senkrecht zur Achse geschnittene Quarzplatte, vor welcher zwei $\frac{\lambda}{4}$-Glimmerblättchen so angebracht sind, dass die eine Hälfte des einfallenden Lichtbündels rechts-, die andere links-circularpolarisirt wird. Es fällt also auf den einen Spiegel rechtscircularpolarisirtes Licht, welches durch die Quarzplatte gegangen ist und auf den anderen Spiegel linkscircularpolarisirtes Licht, welches durch dieselbe Quarzplatte gegangen ist. Die so entstehenden Interferenzstreifen sind nicht ohne Weiteres sichtbar, denn mit dem Gangunterschiede zwischen den entgegengesetzt circularpolarisirten Strahlen ändert sich nicht die Intensität des stets geradlinig polarisirten resultirenden Strahles, sondern nur die Lage seiner Polarisationsebene. Ist der Gangunterschied gleich Null, so ist die Lage der resultirenden Polarisationsebene dieselbe wie beim einfallenden Lichte. Wird der Gangunterschied gleich $\frac{\lambda}{2}$, so dreht sich die Polarisationsebene um 90 Grade. Man hat also Interferenzstreifen, welche sich nicht durch ihren Helligkeitsgrad, sondern durch ihren Polarisationszustand unterscheiden. Bringt man jedoch vor das Auge einen Analyseur, so gewahrt man abwechselnd helle und dunkle Streifen. Pflanzen sich nun der rechts- und der linkspolarisirte Strahl im Quarze mit derselben Geschwindigkeit fort, so muss das so wahrgenommene Fransensystem dieselbe Lage haben wie bei der gewöhnlichen Anordnung des Spiegelversuches. Pflanzen sie sich jedoch mit ungleichen Geschwindigkeiten fort, so muss das Fransensystem verschoben erscheinen. Dass dies wirklich der Fall ist, zeigt man dadurch, dass man die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes um 90 Grade dreht. Die beiden Glimmerblättchen vertauschen hierbei ihre Wirkungsweise und das Streifensystem erleidet eine Verschiebung.

In ähnlicher Weise wurde der Versuch später von J. Stefan [1]) angestellt, doch benutzte dieser statt des Fransensystems der Fresnel'schen Spiegel die Talbot'schen Streifen. Auch hier ergab sich die Streifenverschiebung und die erhaltenen Resultate stimmten qualitativ und quantitativ mit der Fresnel'schen Theorie überein. In neuester Zeit wurden ähnliche Versuche von Cornu [2]) angestellt. Hierher gehört auch die Beobachtung Dove's [3]), welcher fand, dass die beiden Strahlen im gefärbten Quarz (Amethyst) in ungleichem Grade absorbirt werden.

---

[1]) Pogg. Ann. 1865. — [2]) C. R. XCII. — [3]) Pogg. Ann. CX.

310. Rotationspolarisation im convergenten Lichte. Airy's Hypothesen.

Fresnel hat sich darauf beschränkt, die Wirkung des Quarzes auf das geradlinig polarisirte Licht für den Fall zu studiren, wo die Strahlen genau mit der Achse des Krystalls parallel laufen. Es erübrigte, den Fall convergent einfallenden Lichtes experimentell und theoretisch zu untersuchen, und dies geschah zuerst durch Airy im Jahre 1831 [1]).

In Airy's Arbeiten geht fast stets die Theorie dem Experimente voraus; indem wir auf seine Arbeiten eingehen, wollen wir es ebenso machen und mit den Hypothesen beginnen, welche Airy, geleitet von der Analogie, seiner Theorie zu Grunde gelegt hat.

Will man die Erscheinungen berechnen, welche das convergente Licht beim Durchgange durch eine senkrecht zur Achse geschnittene Quarzplatte hervorbringt, so handelt es sich zunächst darum, welche Modification ein geradlinig polarisirter Strahl beim schiefen Durchgange durch die Platte erfährt. Indem nun Airy von der Thatsache ausging, dass im Quarze in der Richtung der Achse sich nur Circularstrahlen fortpflanzen, und dass in der Richtung senkrecht zur Achse, wie bei jedem doppeltbrechenden Krystalle, sich nur geradlinig polarisirte Strahlen fortpflanzen, gelangte er zu der Hypothese, nach welcher in den Zwischenrichtungen sich nur elliptisch polarisirtes Licht fortpflanzt. Er nahm an, dass ein schief gegen die Achse einfallender geradlinig polarisirter Strahl sich in zwei entgegengesetzt elliptisch polarisirte, sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzende Strahlen zerlege. Da der Quarz ein attractiver Krystall ist, findet unter dieser Voraussetzung Folgendes statt: ist die Platte rechtsdrehend, so entspricht das nach rechts elliptisch polarisirte Licht dem ordentlichen Strahle und das nach links polarisirte dem ausserordentlichen; ist die Platte linksdrehend, so verhält es sich umgekehrt.

In den Krystallen, welche kein Drehvermögen besitzen, stehen die Schwingungen des ordentlichen Strahles auf der Achse senkrecht, und die Schwingungen des ausserordentlichen fallen mit der Projection des Strahles auf die Wellenebene zusammen. Es ist natürlich anzunehmen, dass im Quarze die grossen Achsen der beiden Vibrationsellipsen diesen beiden Richtungen parallel liegen und folglich auf einander senkrecht stehen.

Geht der Strahl parallel der Achse des Quarzes, so zerlegt er sich in zwei Circularstrahlen und man erhält die Erscheinungen der Rotationspolarisation. Entfernt sich der Strahl aus dieser Richtung, so erhält man bald zwei geradlinig polarisirte Strahlen. Nimmt man also mit

---

[1]) Cambr. Trans., IV, part. 1, p. 79, 198.

Airy an, dass der Strahl sich in den Zwischenlagen in zwei entgegengesetzt elliptisch polarisirte Strahlen zerlegt, so müssen die entsprechenden Ellipsen während der Drehung des Strahles rasch von der Gestalt des Kreises zu jener der Geraden übergehen.

Airy nahm überdies an, dass der Uebergang sich für die beiden entgegengesetzt polarisirten Strahlen auf dieselbe Weise vollziehe, oder dass die Vibrationsellipsen der beiden einem einfallenden Strahle entsprechenden, gebrochenen Strahlen stets einander ähnlich bleiben.

Was den Gangunterschied dieser beiden Strahlen anlangt, so kann derselbe, wenigstens in der Nähe der Achse, nicht mehr auf die gewöhnliche Wellenfläche bezogen werden, da er für die Richtung der Achse nicht mehr der Null gleich wird. Airy stellte nun die weitere Hypothese auf, nach welcher im Quarz der Gangunterschied der beiden entgegengesetzt elliptisch polarisirten Strahlen gleich sein soll dem für die gewöhnlichen einachsigen Krystalle geltenden Gangunterschiede, vermehrt um einen von der Fortpflanzungsrichtung unabhängigen, jedoch dem Quadrate der Wellenlänge verkehrt proportionalen Betrag.

Diese zweite Hypothese verträgt sich mit der Annahme, dass im Quarze die beiden Theile der Wellenfläche sich nicht mehr berühren.

Geht man von diesen beiden Hypothesen, nämlich jener der Aehnlichkeit der Vibrationsellipsen, und jener der Constanz des Ueberschusses des Gangunterschiedes aus, so führt in der That die Rechnung zu den Phänomenen, welche der Quarz im convergenten Lichte zeigt.

In neuerer Zeit wurden diese Hypothesen Airy's durch M. Croullebois[1]) experimentell verificirt, welcher die beiden elliptischen Strahlen mit Hülfe von Doppelprismen, analog den Fresnel'schen (307), trennte.

311. Allgemeine Formeln.

Wir wollen nun die Intensitätsformeln für die beiden Bilder ableiten, welche sich in einem doppeltbrechenden Analyseur zeigen, wenn die Strahlen convergent durch eine senkrecht zur Achse geschnittene Quarzplatte gegangen sind.

Wir setzen zunächst voraus, dass das einfallende Licht linear polarisirt sei. Zur Beobachtung können dieselben Apparate dienen, wie bei der chromatischen Polarisation; es handelt sich wieder darum, dass Strahlen, welche parallel durch die Platte gehen, sich in einem Punkte der Bildebene vereinigen. Für eine gegebene Farbe die Intensität im Vereinigungspunkte durch Rechnung zu finden, ist nun unsere Aufgabe. Da wir nur Strahlen in Betracht ziehen, welche nahe

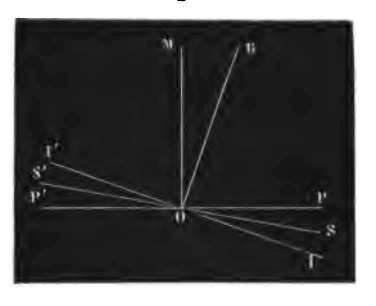
---

[1]) *Ann. de chim. et phys.* (4) XXVIII, (5) IV.

in der Richtung der Achse gehen, können wir zunächst, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, in der Art verfahren, dass wir die schief auf eine senkrecht zur Achse geschnittene Platte fallenden Strahlen als senkrecht einfallend, dafür aber die Platte selbst als entsprechend schief gegen die Achse geschnitten annehmen.

Sind, Fig. 43, PP', SS', JJ' die Durchschnitte der ursprünglichen Polarisationsebene, des Hauptschnittes des Analyseurs und des Hauptschnittes der Quarzplatte mit einer zur Richtung der Strahlen senkrechten Ebene, und bezeichnen wir durch i und s, wie in der Theorie der chromatischen Polarisation, die Winkel dieser Hauptschnitte mit der ursprünglichen Polarisationsebene, nehmen wir homogenes Licht an, setzen die Amplitude des einfallenden Lichtes der Einheit gleich und vernachlässigen die Reflexion beim Eintritte in die Quarzplatte, so können wir die Vibrationsbewegung des eintretenden Lichtes durch $\sin 2\pi \frac{t}{T}$ ausdrücken und überdies zur Abkürzung

Fig. 43.



$$2\pi \frac{t}{T} = \varphi$$

setzen.

Im Quarz zerlegt sich der Strahl in zwei entgegengesetzt elliptisch polarisirte Strahlen. Setzen wir die Platte als rechtsdrehend voraus, so ist der ordentliche Strahl von links nach rechts polarisirt, der ausserordentliche von rechts nach links.

Bezeichnen wir durch ξ und ξ' die Bewegungscomposanten parallel zu JJ', durch η und η' jene senkrecht zu JJ', und durch k eine zwischen 0 und 1 liegende Grösse, welche vom Winkel des einfallenden Strahles mit der Achse abhängt, so haben wir, da die Vibrationsellipsen einander ähnlich und um 90 Grade gegen einander gedreht sind, beim Eintritte des Lichtes in den Krystall für die Bewegung des ordentlichen Strahles:

$$\left.\begin{aligned} \eta &= m \sin(\varphi + \mu) \\ \xi &= -\, m\, k \cos(\varphi + \mu) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und für jene des ausserordentlichen:

$$\left.\begin{aligned} \eta' &= n \sin(\varphi + \nu) \\ \xi' &= \frac{n}{k} \cos(\varphi + \nu) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Da diese vier Bewegungen zusammen die Bewegung des einfallenden Strahles geben müssen, welche durch $\sin \varphi$ dargestellt ist und längs

OM vor sich geht, so muss die Summe der Projectionen auf OM gleich $\sin\varphi$ und die Summe der Projectionen auf OP gleich Null sein. Dies giebt:

$$\left.\begin{array}{l}(\eta + \eta')\cos i - (\xi + \xi')\sin i = \sin\varphi \\ (\eta + \eta')\sin i + (\xi + \xi')\cos i = 0\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Die eben erhaltenen Gleichungen müssen für jedes φ gelten. Substituirt man also für ξ, ξ', η, η' ihre Werthe aus (1) und (2), und setzt sodann die Coëfficienten von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ einzeln der Null gleich, so gelangt man zu den folgenden vier Bedingungsgleichungen:

$$(m\cos\mu + n\cos\nu)\cos i - (mk\sin\mu - \frac{n}{k}\sin\nu)\sin i = 1$$

$$(m\sin\mu + n\sin\nu)\cos i + (mk\cos\mu - \frac{n}{k}\cos\nu)\sin i = 0$$

$$(m\cos\mu + n\cos\nu)\sin i + (mk\sin\mu - \frac{n}{k}\sin\nu)\cos i = 0$$

$$(m\sin\mu + n\sin\nu)\sin i + (mk\cos\mu - \frac{n}{k}\cos\nu)\cos i = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich zunächst

$$m\cos\mu + n\cos\nu = \cos i \qquad mk\cos\mu - \frac{n}{k}\cos\nu = 0$$

$$m\sin\mu + n\sin\nu = 0 \qquad mk\sin\mu - \frac{n}{k}\sin\nu = -\sin i,$$

und schliesslich

$$m\cos\mu = \frac{\cos i}{1 + k^2}, \qquad m\sin\mu = -\frac{k\sin i}{1 + k^2}$$

$$n\cos\nu = \frac{k^2\cos i}{1 + k^2}, \qquad n\sin\nu = \frac{k\sin i}{1 + k^2}.$$

Dies nach (1) und (2) gesetzt, erhält man für die Composanten der elliptischen Bewegung:

$$\eta = \frac{1}{1 + k^2}(\cos i\sin\varphi - k\sin i\cos\varphi)$$

$$\xi = -\frac{k}{1 + k^2}(\cos i\cos\varphi + k\sin i\sin\varphi)$$

$$\eta' = \frac{1}{1 + k^2}(k^2\cos i\sin\varphi + k\sin i\cos\varphi)$$

$$\xi' = \frac{1}{1 + k^2}(k\cos i\cos\varphi - \sin i\sin\varphi).$$

Die beiden elliptischen Strahlen durchsetzen die Quarzplatte mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Bezeichnet man mit G und D die

Dicken zweier Luftschichten, welche von den beiden Strahlen in derselben Zeit durchsetzt werden wie die Quarzplatte, so muss man für den Austritt aus dem Krystall in den Ausdrücken der Bewegungscomposanten des ordentlichen Strahles φ durch $2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{D}{\lambda}\right)$ ersetzen, und in jenen des ausserordentlichen Strahles durch $2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{G}{\lambda}\right)$. Setzt man überdies zur Abkürzung

$$2\pi\frac{G}{\lambda}=\gamma,\quad 2\pi\frac{D}{\lambda}=\delta,$$

so hat man φ durch $\varphi-\gamma$ zu ersetzen für den ordentlichen Strahl, und durch $\varphi-\delta$ für den ausserordentlichen.

Man hat im Analyseur für die Bewegung des ordentlichen Strahles:

$$(\eta+\eta')\cos(i-s)-(\xi+\xi')\sin(i-s).$$

Setzt man für ξ, η, ξ', η' ihre Werthe, und beachtet man, dass in den Ausdrücken von ξ und η $\varphi-\delta$ für φ zu setzen ist, hingegen in jenen von ξ' und η' $\varphi-\gamma$ für φ, so erhält man für die Bewegung des ordentlichen Strahles im Analyseur:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+k^2}\{[&\cos i\sin(\varphi-\delta)-k\sin i\cos(\varphi-\delta)+k^2\cos i\sin(\varphi-\gamma)\\&+k\sin i\cos(\varphi-\gamma)]\cos(i-s)\\+[&k\cos i\cos(\varphi-\delta)+k^2\sin i\sin(\varphi-\delta)-k\cos i\cos(\varphi-\gamma)\\&+\sin i\sin(\varphi-\gamma)]\sin(i-s)\}.\end{aligned}$$

Man setze nun

$$\varphi-\delta=\varphi-\gamma+\gamma-\delta.$$

Substituirt man dies in den vorstehenden Ausdruck, so giebt die Summe der Quadrate der Coëfficienten von $\cos(\varphi-\gamma)$ und $\sin(\varphi-\gamma)$ die Intensität ω^2 des ordentlichen Bildes des Analyseurs. Man erhält:

$$\begin{aligned}(1+k^2)^2\omega^2=&\{\cos(i-s)[\cos i\cos(\gamma-\delta)+k\sin i\sin(\gamma-\delta)+k^2\cos i]\\&+\sin(i-s)[-k\cos i\sin(\gamma-\delta)+k^2\sin i\cos(\gamma-\delta)+\sin i]\}^2\\&+\{\cos(i-s)[\cos i\sin(\gamma-\delta)-k\sin i\cos(\gamma-\delta)+k\sin i]\\&+\sin(i-s)[k\cos i\cos(\gamma-\delta)+k^2\sin i\sin(\gamma-\delta)-k\cos i]\}^2.\end{aligned}$$

Ordnet man nach $\cos(\gamma-\delta)$ und $\sin(\gamma-\delta)$, so erhält man:

$$\begin{aligned}(1+k^2)^2\omega^2=&\{[\cos i\cos(i-s)+k^2\sin i\sin(i-s)]\cos(\gamma-\delta)\\&+k\sin s\sin(\gamma-\delta)+k^2\cos i\cos(i-s)+\sin i\sin(i-s)\}^2\\&+\{-k\sin s\cos(\gamma-\delta)+[\cos i\cos(i-s)\\&\qquad+k^2\sin i\sin(i-s)]\sin(\gamma-\delta)+k\sin s\}^2\end{aligned}$$

oder, indem man entwickelt,

$$(1 + k^2)\,\omega^2 = [\cos i \cos(i - s) + k^2 \sin i \sin(i - s)]^2 + 2\,k^2 \sin^2 s$$
$$+ \;[k^2 \cos i \cos(i - s) + \sin i \sin(i - s)]^2$$
$$+ \;2\,\{[\cos i \cos(i - s) + k^2 \sin i \sin(i - s)]$$
$$\times\;[k^2 \cos i \cos(i - s) + \sin i \sin(i - s)] - k^2 \sin^2 s\}$$
$$\times\;\cos(\gamma - \delta) + 2\,k\,(1 + k^2) \sin s \cos s \sin(\gamma - \delta).$$

Ersetzt man $2 \cos(\gamma - \delta)$ durch $2 - 4 \sin^2 \frac{\gamma - \delta}{2}$, so reducirt sich die Summe der von $\gamma - \delta$ unabhängigen Glieder auf $(1 + k^2) \cos^2 s$, und man hat:

$$(1 + k^2)^2\,\omega^2 = (1 + k^2)^2 \cos^2 s + 2\,k\,(1 + k^2) \sin s \cos s \sin(\gamma - \delta)$$
$$- 4\,\{[\cos i \cos(i - s) + k^2 \sin i \sin(i - s)]$$
$$\times\;[k^2 \cos i \cos(i - s) + \sin i \sin(i - s)]$$
$$- k^2 \sin^2 s\} \sin^2 \frac{\gamma - \delta}{2}.$$

Entwickelt man das dritte Glied auf der rechten Seite der Gleichung und dividirt auf beiden Seiten durch $(1 + k^2)^2$, so ergiebt sich nach vorgenommenen Reductionen:

$$\left.\begin{aligned}\omega^2 = \cos^2 s &+ \frac{k}{1 + k^2} \sin 2\,s \sin(\gamma - \delta)\\ &- \frac{4\,k^2}{(1 + k^2)^2} \cos 2\,s \sin^2 \frac{\gamma - \delta}{2}\\ &- \frac{(1 - k^2)^2}{(1 + k^2)^2} \sin 2\,i \sin 2\,(i - s) \sin^2 \frac{\gamma - \delta}{2}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (4)$$

Die Formel vereinfacht sich, wenn man rechts vom Gleichheitszeichen die beiden ersten Glieder durch

$$\cos^2 s \left(\cos^2 \frac{\gamma - \delta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma - \delta}{2}\right) + \frac{4\,k}{1 + k^2} \sin s \cos s \sin \frac{\gamma - \delta}{2} \cos \frac{\gamma - \delta}{2}$$

ersetzt, indem man nach vorgenommener Reduction erhält:

$$\omega^2 = \left(\cos s \cos \frac{\gamma - \delta}{2} + \frac{2\,k}{1 + k^2} \sin s \sin \frac{\gamma - \delta}{2}\right)^2$$
$$+ \left(\frac{1 - k^2}{1 + k^2}\right)^2 [\cos^2 s - \sin 2\,i \sin 2\,(i - s)] \sin^2 \frac{\gamma - \delta}{2}.$$

Bemerkt man noch, dass

$$\begin{aligned}\cos^2 s - \sin 2\,i \sin 2\,(i - s) &= \cos^2 s - \tfrac{1}{2}[\cos 2\,s - \cos(4\,i - 2\,s)]\\ &= \tfrac{1}{2}[1 + \cos(4\,i - 2\,s)]\\ &= \cos^2(2\,i - s),\end{aligned}$$

so erhält man schliesslich:

$$\left.\begin{aligned}\omega^2 = \left(\cos s \cos \frac{\gamma - \delta}{2} + \frac{2k}{1+k^2} \sin s \sin \frac{\gamma - \delta}{2}\right)^2 \\ + \left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2 \cos^2(2i - s) \sin^2 \frac{\gamma - \delta}{2}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

Man kann diese Formel verificiren, indem man k gleich 0 oder gleich 1 setzt. Im ersteren Ealle gelangt man zu jener Formel zurück, welche für Krystalle ohne Drehvermögen gilt. In der That ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \cos^2 s \cos^2 \frac{\gamma - \delta}{2} + \cos^2(2i - s) \sin^2 \frac{\gamma - \delta}{2} \\ &= \cos^2 s + [\cos^2(2i - s) - \cos^2 s] \sin^2 \frac{\gamma - \delta}{2} \\ &= \cos^2 s - \sin 2i \sin 2(i - s) \sin^2 \frac{\gamma - \delta}{2} \\ &= \cos^2 s - \sin 2i \sin 2(i - s) \sin^2 \pi \frac{G - D}{\lambda}.\end{aligned}$$

Macht man $k = 1$, so erhält man jene Formel, welche die Rotationswirkung des Quarzes in der Richtung seiner Achse darstellt. In der That reducirt sich unter dieser Voraussetzung die Formel (5) auf

$$\omega^2 = \left(\cos s \cos \frac{\gamma - \delta}{2} + \sin s \sin \frac{\gamma - \delta}{2}\right)^2 = \cos^2\left(s - \frac{\gamma - \delta}{2}\right),$$

und dieser Ausdruck hat sein Maximum für

$$s = \frac{\gamma - \delta}{2},$$

was so viel sagen will, als dass der austretende Strahl geradlinig polarisirt und gegen die ursprüngliche Polarisationsrichtung um den Winkel $\frac{\gamma - \delta}{2}$ oder $\pi \frac{G - D}{\lambda}$ gedreht ist.

Die Formel (5) zeigt, dass achromatische Linien nicht vorkommen, indem durch keine Annahme der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen von $\gamma - \delta$ oder der Wellenlänge unabhängig wird.

Was die isochromatischen Linien anlangt, so sind dieselben von weit complicirterer Gestalt, als bei den Krystallen ohne Drehvermögen. Um ihre Gestalt strenge bestimmen zu können, müsste man wissen, wie k mit der Incidenz variirt oder wie sich mit der Entfernung des Strahles aus der Richtung der Achse der Uebergang von der Circularpolarisation zur geradlinigen Polarisation vollzieht. Gleichwohl kann man, wie wir nun zeigen wollen, auch ohne diese Kenntniss die Gestalt der isochromatischen Linien in einem gewissen Grade der Annäherung bestimmen.

312. Hauptstellungen des Analyseurs. Abwesenheit des Kreuzes im Centrum. Kreisförmige Ringe.

Der einfachste Fall ist jener, wo der Hauptschnitt des Analyseurs mit der ursprünglichen Polarisationsebene parallel liegt oder auf ihr senkrecht steht. Setzt man $s = 0$, d. h. ist der Hauptschnitt des Analyseurs mit der ursprünglichen Polarisationsebene parallel, so reducirt sich die Formel (4) auf

$$\omega^2 = 1 - \left[\frac{4\,k^2}{(1+k^2)^2} + \left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2 \sin^2 2\,i\right] \sin^2 \frac{\gamma - \delta}{2},$$

und man hat folglich für die Intensität des ausserordentlichen Bildes:

$$\varepsilon^2 = \left[\frac{4\,k^2}{(1+k^2)^2} + \left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2 \sin^2 2\,i\right] \sin^2 \frac{\gamma - \delta}{2}.$$

Ist $s = \frac{\pi}{2}$, so vertauschen die beiden Bilder ihre Helligkeiten. Der Ausdruck für die Intensität des ausserordentlichen Bildes lässt das Abhandensein achromatischer Linien erkennen, denn derselbe erscheint stets als von der Wellenlänge abhängig. Nur wenn man k als sehr klein voraussetzt, d. i. wenn man das Bild in einer gewissen Entfernung von der Achse betrachtet, welche Entfernung übrigens nicht beträchtlich zu sein braucht, wird man achromatische Linien wahrnehmen müssen. In der That hat man in diesem Falle näherungsweise

$$\varepsilon^2 = \sin^2 2\,i \sin^2 \frac{\gamma - \delta}{2},$$

und dieser Ausdruck wird für jede Wellenlänge der Null gleich, wenn $i = 0$ oder $i = 90^0$. Es folgt hieraus: ist der Hauptschnitt des Analyseurs mit der ursprünglichen Polarisationsebene parallel, so zeigt das ausserordentliche Bild ein dunkles Kreuz, dessen Arme bezüglich parallel und senkrecht zur ursprünglichen Polarisationsebene liegen, sich jedoch nicht bis zum Centrum erstrecken und auch nicht vollständig dunkel sind; letzteres hat seinen Grund darin, dass k auch für eine gegen die Achse stärker geneigte Richtung nicht vollständig der Null gleich wird. Durch diese beiden charakteristischen Eigenschaften ist dieses dunkle Kreuz unterschieden von jenem, welches die einachsigen, mit dem Drehvermögen nicht begabten Krystalle zeigen. Was das Centrum des Bildes betrifft, so kann es im weissen Lichte niemals vollständig dunkel erscheinen, da $\sin^2 \frac{\gamma - \delta}{2}$ nicht gleichzeitig für alle Farben der Null gleich wird. Man hat also im Centrum ein helles Feld, dessen Farbe von der Dicke der Quarzplatte abhängt, und das Kreuz ist nur ausserhalb dieses Feldes sichtbar.

Das ordentliche Bild zeigt die complementären Erscheinungen, das Kreuz erscheint weisslich. Ist der Hauptschnitt des Analyseurs normal zur ursprünglichen Polarisationsebene, so erscheinen die Bilder vertauscht: das ausserordentliche Bild zeigt das weisse, das ordentliche Bild das schwarze Kreuz.

Was die isochromatischen Linien anlangt, so zeigen die für die Intensität der beiden Bilder gefundenen Ausdrücke, dass, sobald der Hauptschnitt des Analyseurs zur ursprünglichen Polarisationsebene parallel oder normal ist, die isochromatischen Linien die Kreisgestalt haben. Man hat also im homogenen Lichte in einiger Entfernung vom Centrum abwechselnd helle und dunkle Ringe, im weissen Lichte Farbenringe. Betrachtet man das ausserordentliche Bild im Falle, wo $s = 0$, so sind die einer bestimmten Farbe entsprechenden Maxima gegeben durch

$$\frac{\gamma - \delta}{2} = (2N + 1)\frac{\pi}{2}$$

und die Minima durch

$$\frac{\gamma - \delta}{2} = 2N\frac{\pi}{2},$$

wo N eine ganze Zahl ist. Da ferner

$$\gamma - \delta = 2\pi\frac{G - D}{\lambda},$$

so gehen diese Bedingungen über in

$$G - D = (2N + 1)\frac{\lambda}{2}$$

und

$$G - D = 2N\frac{\lambda}{2}.$$

Würde der Krystall das Drehvermögen nicht besitzen, so würde, wie wir in der Theorie der chromatischen Polarisation (217) gesehen haben, die Wegdifferenz gegeben sein durch

$$\frac{\varepsilon}{b}(b^2 - a^2)\frac{x^2 + y^2}{d^2},$$

wo $x^2 + y^2$ das Quadrat des Radius eines isochromatischen Ringes ist, und d die Brennweite der Linse, welche die Strahlen convergent macht. Nach Airy's Hypothese ist nun dieser Wegdifferenz ein von der Richtung der einfallenden Strahlen unabhängiges Glied hinzuzufügen. Bezeichnet man also durch C eine Constante, so hat man

$$G - D = \frac{\varepsilon}{b}\left[(b^2 - a^2)\frac{x^2 + y^2}{d^2} + C\right],$$

und die isochromatische Linie wird einem Maximum oder Minimum der Helligkeit entsprechen, je nachdem diese Grösse einer ungeraden oder

geraden Zahl halber Wellenlängen gleich ist. Es resultirt hieraus ein einfaches Gesetz für die hellen und dunklen Ringe irgend einer Farbe: Die Differenzen der Quadrate der Halbmesser sind constant.

Ist also der Hauptschnitt des Analyseurs parallel oder normal zur ursprünglichen Polarisationsebene, so besteht jedes Bild aus einem kreisförmigen centralen, farbigen Felde und einer Reihe kreisförmiger Farbenringe, welche von einem dunklen oder weissen Kreuze durchsetzt sind: die Arme des Kreuzes liegen senkrecht und parallel der ursprünglichen Polarisationsebene und erstrecken sich nicht bis zum Centrum des Bildes; jeder Ring zeigt längs seiner ganzen Ausdehnung dieselbe Farbe.

313. Beliebige Stellung des Analyseurs. Quadratische Curven und kreuzförmiges Feld im Centrum.

Befindet sich der Hauptschnitt des Analyseurs gegen die ursprüngliche Polarisationsebene in einer beliebigen Lage, so vereinfacht sich die Gleichung (5) nicht. Es giebt keine achromatischen Linien und die Gestalt der isochromatischen Linie ist eine complicirte. Gleichwohl führen in diesem allgemeinen Falle die folgenden Betrachtungen zu einer angenäherten Vorstellung von der Gestalt der achromatischen Linien.

Setzen wir

$$\frac{2k \tan s}{1+k^2} = \tan\psi$$

und folglich

$$\cos s = \frac{2k}{\sqrt{4k^2+(1+k^2)^2\tan^2\psi}}, \quad \sin s = \frac{(1+k^2)\tan\psi}{\sqrt{4k^2+(1+k^2)^2\tan^2\psi}},$$

so erhalten wir durch Substitution nach (5):

$$\omega^2 = \frac{4k^2}{4k^2+(1+k^2)^2\tan^2\psi}\left[\cos\frac{\gamma-\delta}{2} + \tan\psi \sin\frac{\gamma-\delta}{2}\right]^2 + \left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2 \cos^2(2i-s)\sin^2\frac{\gamma-\delta}{2},$$

oder

$$\omega^2 = \left[\cos^2 s + \frac{4k^2}{(1+k^2)^2}\sin^2 s\right]\cos^2\left(\frac{\gamma-\delta}{2}-\psi\right) + \left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2 \cos^2(2i-s)\sin^2\frac{\gamma-\delta}{2},$$

oder schliesslich

$$\omega^2 = \left[\cos^2 s + \frac{4k^2}{(1+k^2)^2}\sin^2 s\right] \times \frac{(1+\cos(\gamma-\delta-2\psi)}{2} + \left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2 \cos^2(2i-s) \times \frac{1-\cos(\gamma-\delta)}{2}.$$

Nimmt man an, dass die Punkte einer isochromatischen Linie angenähert dieselbe Entfernung vom Centrum haben, so kann man längs einer solchen Curve die Grösse k als constant ansehen, und man wird eine angenäherte Gleichung der isochromatischen Curven erhalten, wenn man den nach $\gamma - \delta$ genommenen Differentialquotienten des letzten Ausdruckes der Null gleich setzt. Man erhält so als Gleichung der isochromatischen Curven:

$$tg\,(\gamma - \delta - \psi) = tg\,\psi\,\frac{(1 + k^2)^2 cos^2 s + 4\,k^2 sin^2 s + (1 - k^2)^2 cos^2 (2i - s)}{(1 + k^2)\,cos^2 s + 4\,k^2 sin^2 s - (1 - k^2)^2 cos^2 (2i - s)} \qquad (6)$$

und man sieht, dass $tang\,(\gamma - \delta - \psi)$ eine Function von i ist. Wäre dies nicht der Fall, so wären die Curven Kreise. Es zeigt sich jedoch im Gegentheile, dass die Punkte einer isochromatischen Linie verschiedene Entfernungen vom Centrum haben. Um die Stellen grösster und kleinster Entfernung der isochromatischen Curve vom Centrum zu finden, hat man die Maxima und Minima des obigen Ausdruckes oder diejenigen der Differenz $tang\,(\gamma - \delta - \psi) - tang\,\psi$ aufzusuchen. Thut man dies, so findet man ein Maximum, wenn

$$2i - s = 0$$

oder

$$2i - s = \pi,$$

also wenn

$$i = \frac{s}{2}$$

oder

$$i = \frac{\pi}{2} + \frac{s}{2};$$

und ein Minimum, wenn

$$2i - s = \frac{\pi}{2}$$

oder

$$2i - s = \frac{3\pi}{2},$$

also wenn

$$i = \frac{\pi}{4} + \frac{s}{2}$$

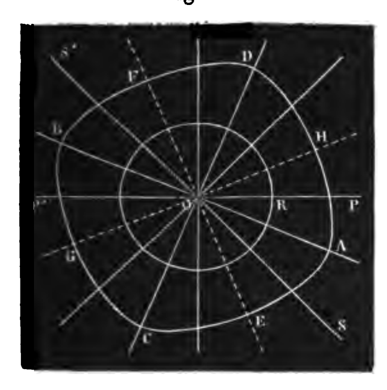
oder

$$i = \frac{3\pi}{4} + \frac{s}{2}.$$

Um die Gestalt der isochromatischen Curven zu erhalten, kann man einen Kreis vom Radius *OR*, Fig. 44, beschreiben und die Radien dieses Kreises um ein variables Stück verlängern, welches am grössten ist längs *AB* und *CD*, und am kleinsten längs *EF* und *GH*, so dass die ersteren Geraden die Winkel zwischen der ursprünglichen Polarisationsebene und dem Hauptschnitte des Analyseurs halbiren, während die letzteren wieder die Winkel der ersteren halbiren. Man erhält so eine quadrat-

ähnliche Curve. Diese Gestalt zeigen die isochromatischen Linien, wenigstens in einiger Entfernung vom Centrum.

Fig. 44.



Liegt die ursprüngliche Polarisationsebene PP', wie dies in der Figur vorausgesetzt ist, horizontal, und bildet der Hauptschnitt des Analyseurs SS' mit PP' rechts unten einen spitzen Winkel s, so sieht man, dass das höchstgelegene Eck der quadratischen Curve sich rechts von der Verticalen findet, und zwar von dieser um weniger als 45° entfernt. Ist s ein stumpfer Winkel, so verhält es sich ebenso, die höchstgelegene Ecke der quadratischen Curve findet sich noch immer rechts von der Verticalen. Giebt man dem Hauptschnitte des Analyseurs ursprünglich die Lage senkrecht zur Polarisationsebene des einfallenden Lichtes, so dass man die kreisförmigen isochromatischen Curven erhält, und dreht man hierauf den Analyseur nach rechts und nach links, so wird die höchstgelegene Ecke der alsdann entstehenden quadratischen Curve stets rechts von der Verticalen anzutreffen sein. Indessen haben wir vorausgesetzt, dass der Quarz rechtsdrehend sei. Ist er linksdrehend, so verhält es sich umgekehrt, die höchste Ecke findet sich dann auf der linken Seite der Verticalen.

Betrachten wir nun das centrale helle Feld. Um die Intensität im Centrum des ordentlichen Bildes zu erhalten, haben wir in (5) $k = 1$ zu setzen, und erhalten

$$\omega^2 = \cos^2\left(s - \frac{\gamma - \delta}{2}\right)$$

oder, wenn der Winkel $\frac{\gamma - \delta}{2}$, welcher die Rotation der Polarisationsebene eines senkrecht durch die Platte tretenden Strahles vorstellt, durch ϱ bezeichnet wird,

$$\omega^2 = \cos^2(s - \varrho).$$

Will man wissen, wie die Helligkeit längs eines Kreises variirt, dessen Centrum mit jenem des Interferenzbildes zusammenfällt, so muss man zu Formel (5) zurückkehren. Da auf dem betrachteten Kreise k und $\gamma - \delta$ constant sind, so wird die Intensität ein Minimum für

$$\cos(2i - s) = 0,$$

d. i. für

$$i = \frac{s}{2} + \frac{\pi}{4}$$

oder

$$i = \frac{s}{2} + \frac{3\pi}{4}.$$

Ist also für irgend eine Farbe das Centrum dunkel, so erstreckt sich die Lichtschwäche auch längs der Linien EF und GH, welche auf den Seiten der quadratischen Curven senkrecht stehen. Das centrale Feld zeigt dann immerhin eine Art Kreuz, dessen Arme auf den Seiten der quadratischen Curven senkrecht stehen oder die Winkel der Diagonalen dieser Curven halbiren. Hat man weisses Licht und ist das Centrum des ordentlichen Bildes für die gelbe Farbe dunkel, so zeigt das centrale Kreuz die sensible Farbe. Ist der Krystall rechtsdrehend, so entspricht die sensible Farbe des centralen Kreuzes des ordentlichen Bildes der Bedingung $s = 90^0 + \varrho$, d. i. einer Drehung nach links um $90^0 - \varrho$, wenn der Hauptschnitt des Analyseurs der ursprünglichen Polarisationsebene parallel war. Hat man also eine hinreichend dünne Platte, und dreht man den Analyseur von jener Lage aus, in welcher sein Hauptschnitt mit der ursprünglichen Polarisationsebene parallel ist, nach links, so wird man, noch ehe die Drehung 90^0 beträgt, im centralen Felde die sensible Farbe wahrnehmen. Ist hingegen der Krystall linksdrehend, so muss man den Analyseur nach rechts drehen, um zur sensiblen Farbe zu gelangen. Dies giebt ein einfaches Verfahren ab, rechtsdrehende und linksdrehende Krystalle zu unterscheiden.

314. Rotationspolarisation im convergenten, circular polarisirten Lichte.

Wir nehmen nun an, es falle convergentes, circular polarisirtes Licht auf die senkrecht zur Achse geschnittene Quarzplatte. Die Berechnung der Intensitäten der beiden Bilder des Analyseurs geschieht analog jener für geradlinig polarisirtes Licht. Wir nehmen zunächst an, die Quarzplatte sei rechtsdrehend und das einfallende Licht circular von links nach rechts polarisirt, und lassen wieder die Vereinfachung eintreten, dass wir statt der schief auffallenden Strahlen senkrecht auffallende Strahlen annehmen, hingegen die Platte entsprechend schief gegen die Achse geschnitten denken, wodurch das Resultat nicht alterirt wird. Nimmt man die Amplitude des in die Platte tretenden Circularstrahles zur Einheit, so hat man für die Bewegungscomposanten des eintretenden Lichtes

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\varphi,$$

$$\xi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\varphi,$$

wo η und ξ den Bewegungen senkrecht und parallel zum Hauptschnitte der Quarzplatte entsprechen. Indem der Circularstrahl in den Krystall eintritt, zerlegt er sich in zwei entgegengesetzt elliptisch polarisirte Strahlen. Die Bewegungscomposanten senkrecht und parallel zum Hauptschnitte der Quarzplatte sind für den ordentlichen Strahl

$$\eta' = m \sin(\varphi + \mu)$$
$$\xi' = - k m \cos(\varphi + \mu),$$

und für den ausserordentlichen

$$\eta'' = n \sin(\varphi + \nu)$$
$$\xi'' = \frac{n}{k} \cos(\varphi + \nu).$$

Die Constanten m, n, μ und ν sind bestimmt durch die beiden Gleichungen

$$\eta' + \eta'' = \eta$$
$$\xi' + \xi'' = \xi,$$

welche für alle Werthe von φ erfüllt sein müssen.

Man erhält so die vier Gleichungen

$$m \cos\mu + n \cos\nu = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$m \sin\mu + n \sin\nu = 0,$$
$$- k m \cos\mu + \frac{n}{k} \cos\nu = - \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$k m \sin\mu - \frac{n}{k} \sin\nu = 0,$$

aus welchen sich weiter ergiebt:

$$\mu = 0$$
$$\nu = 0$$
$$m = \frac{1 + k}{\sqrt{2}(1 + k^2)}$$
$$n = - \frac{k(1 - k)}{\sqrt{2}(1 + k^2)}.$$

Behalten γ und δ ihre frühere Bedeutung, so sieht man, dass beim Austritte aus dem Krystalle die Vibrationsbewegung des ordentlichen Strahles gegeben ist durch

$$\eta' = \frac{1 + k}{\sqrt{2}(1 + k^2)} \sin(\varphi - \delta)$$
$$\xi' = - \frac{k}{\sqrt{2}} \frac{(1 + k)}{(1 + k^2)} \cos(\varphi - \delta),$$

und jene des ausserordentlichen Strahles durch

$$\eta'' = -\frac{k(1-k)}{\sqrt{2}\,(1+k^2)}\,\sin(\varphi-\gamma)$$

$$\xi'' = -\frac{1-k}{\sqrt{2}\,(1+k^2)}\,\cos(\varphi-\gamma).$$

Bezeichnet man nun mit α den Winkel des Hauptschnittes des Analyseurs mit jenem der Quarzplatte, so ist die Bewegung des ordentlichen Strahles im Analyseur:

$$(\eta' + \eta'')\cos\alpha + (\xi' + \xi'')\sin\alpha$$

oder:

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}\,(1+k^2)}\,[(1+k)\sin(\varphi-\delta) - k(1-k)\sin(\varphi-\gamma)]$$
$$-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}\,(1+k^2)}\,[k(1+k)\cos(\varphi-\delta) + (1-k)\cos(\varphi-\gamma)].$$

Um die Intensität des ordentlichen Bildes zu erhalten, hat man $\varphi-\delta$ durch $\varphi-\gamma+\gamma-\delta$ zu ersetzen und die Summe der Quadrate der Coëfficienten von $\sin(\varphi-\gamma)$ und $\cos(\varphi-\gamma)$ zu nehmen. Man erhält so:

$$\omega^2 = \frac{1}{2\,(1+k^2)^2}\Big\{\big[\cos\alpha\,[(1+k)\cos(\gamma-\delta) - k(1-k)]$$
$$+ k(1+k)\sin\alpha\sin(\gamma-\delta)\big]^2$$
$$+ \big[(1+k)\cos\alpha\sin(\gamma-\delta)$$
$$- \sin\alpha\,[k(1+k)\cos(\gamma-\delta) - 1 + k]\big]^2\Big\}$$

$$= \frac{1}{2(1+k^2)^2}\big\{\cos^2\alpha[(1+k)^2 + k^2(1-k)^2 - 2k(1-k^2)\cos(\gamma-\delta)]$$
$$+ \sin^2\alpha[k^2(1+k)^2 + (1-k)^2 - 2k(1-k^2)\cos(\gamma-\delta)]$$
$$+ 2\sin\alpha\cos\alpha\big[[(1+k)\cos(\gamma-\delta)$$
$$- k(1-k)]k(1+k)\sin(\gamma-\delta)$$
$$- [k(1+k)\cos(\gamma-\delta) - 1 + k](1+k)\sin(\gamma-\delta)\big]\big\}$$

$$= \frac{1}{2(1+k^2)^2}\{(1+k^2)^2 + 2k(1-k^2)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)[1-\cos(\gamma-\delta)]$$
$$- 2(1+k^2)(1-k^2)\sin\alpha\cos\alpha\sin(\gamma-\delta)\}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{k(1-k^2)}{(1+k^2)^2}\cos 2\alpha - \frac{k(1-k^2)}{(1+k^2)^2}\cos 2\alpha\cos(\gamma-\delta)$$
$$- \frac{1-k^2}{2(1+k^2)}\sin 2\alpha\sin(\gamma-\delta).$$

Macht man in diesem für die Intensität gefundenen Ausdrucke $k=1$, so wird $\omega^2 = \frac{1}{2}$, also unabhängig von $\gamma-\delta$ und unabhängig von der

Farbe. Man kann hieraus schliessen, dass die Centra der beiden Bilder des Analyseurs im weissen Lichte achromatisch sind, wie dies schon daraus folgt, dass ein Circularstrahl sich in der Richtung der Achse des Quarzes unverändert fortpflanzt. Ueberdies geht aus der erhaltenen Gleichung hervor, dass bei Anwendung circularpolarisirten Lichtes keine achromatischen Linien erhalten werden.

315. Isochromatische Linien. Quadratische Spiralen.

Um die isochromatischen Curven angenähert zu erhalten, setzen wir

$$\frac{1+k^2}{2k} \, tang\, 2\alpha = tang\, 2\psi$$

und erhalten so für die Intensität des ordentlichen Bildes:

$$\omega^2 = \frac{1}{2} + \frac{k(1-k^2)}{(1+k^2)^2} \cos 2\alpha - \frac{k(1-k^2)\cos(\gamma-\delta-2\psi)}{(1+k^2)\sqrt{(1+k^2)^2\cos^2 2\psi + 4k^2 \sin^2 2\psi}}.$$

Indem man dem Winkel α einen bestimmten Werth ertheilt, betrachtet man Punkte des Interferenzbildes, welche auf einer bestimmten, durch das Centrum des Interferenzbildes gehenden und mit dem Hauptschnitte des Analyseurs einen Winkel α bildenden Geraden liegen. Betrachtet man überdies nur ein kleines Stückchen dieser Geraden, so ist k constant und die Intensität geht durch ein Maximum oder Minimum, wenn

$$\gamma - \delta - 2\psi = (2N+1)\pi,$$

oder

$$\gamma - \delta - 2\psi = 2N\pi,$$

sobald N eine beliebige ganze Zahl vorstellt. Man sieht leicht, wie diese Gleichungen als die Polargleichungen der isochromatischen Linien aufgefasst werden können.

Wir haben früher gesehen, dass $\gamma - \delta$ die Summe zweier Glieder vorstellt, deren eines constant ist; das andere ist proportional dem Quadrate des Abstandes des Centrums von jenem Punkte des Bildes, auf welchen sich die Differenz $\gamma - \delta$ bezieht, also proportional jener Grösse, welche wir mit $x^2 + y^2$ bezeichnet haben. Für jenen Strahl, welcher parallel der Achse hindurchgeht, ist $\gamma - \delta$ gleich der doppelten Rotation ϱ, also ist 2ϱ das constante Glied. Setzt man überdies v^2 für $x^2 + y^2$, so hat man

$$\gamma - \delta = 2\varrho + hv^2.$$

Die Gleichung der den Minimis entsprechenden isochromatischen Curven wird dann:

$$2\varrho + hv^2 - 2\psi = 2N\pi.$$

In dieser Gleichung ist nun v der Radiusvector, und ψ ist eine Function des Winkels α, welchen der Radiusvector mit dem Hauptschnitte des Analyseurs bildet.

Für jene Punkte, welche nicht zu weit vom Centrum des Phänomens entfernt sind, unterscheidet sich k wenig von der Einheit, der Winkel ψ wenig von α. Nimmt man die Gleichheit dieser beiden Winkel an, so reducirt sich die Polargleichung der isochromatischen Curven auf

$$h v^2 = 2(\alpha - \varrho) + 2 N \pi.$$

Setzt man $N = 0$, so erhält man die Gleichung

$$h v^2 = 2(\alpha - \varrho),$$

welche eine in Fig. 45 abgebildete, von rechts nach links gedrehte Spirale OAB darstellt. Die Tangente dieser Spirale im Centrum O bildet mit dem Hauptschnitte SS' des Analyseurs einen Winkel gleich ϱ.

Setzt man $N = 1$, so erhält man eine zweite Spirale OD, welche mit der ersten congruent und gegen sie um 180 Grade gedreht ist. Setzt

Fig. 45.

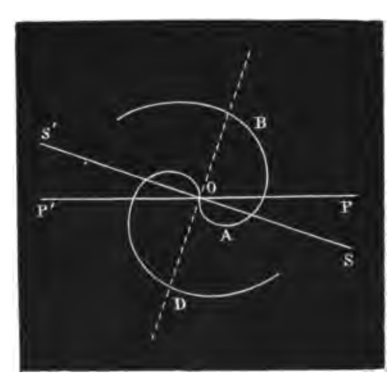


Fig. 46.

man für N grössere Zahlen, so erhält man immer wieder abwechselnd diese beiden Spiralen.

In Wirklichkeit sind die isochromatischen Curven von etwas abweichender Gestalt, was darauf zurückzuführen ist, dass ψ stets etwas grösser als α ist. Die Differenz dieser beiden Winkel ist ein Maximum oder Minimum für jene Werthe von α, welche dem Hauptschnitte des Analyseurs entsprechen, einer hierzu senkrechten Richtung, und zwei weiteren Richtungen, welche mit den beiden ersteren Winkel von 45 Graden bilden. Es folgt, dass die beiden Spiralen in der Nähe ihrer Durchschnitte mit dem Hauptschnitte und einer zu demselben senkrechten Geraden Ausbiegungen zeigen müssen, wie dies Fig. 46 darstellt. Ueberdies kann der Verlauf der Spiralen nicht bis zum Centrum verfolgt werden, indem sich dieselben in dem hellen centralen Felde verlieren. Aus diesem Grunde kann das in Bezug auf die Richtung der

Tangente der Spirale in der Nähe des Centrums erhaltene theoretische Resultat nicht experimentell verificirt werden.

Ist die Quarzplatte rechtsdrehend und das einfallende Licht von links nach rechts polarisirt, so sind die Spiralen von rechts nach links gedreht; ist die Quarzplatte zwar immer noch rechtsdrehend, aber das einfallende Licht von rechts nach links polarisirt, so sind die Spiralen im Gegentheile von links nach rechts gedreht. Umgekehrt verhält es sich bei einer linksdrehenden Quarzplatte.

316. Rotationspolarisation im convergenten, elliptisch polarisirten Lichte.

Nach Airy's Hypothese variirt die Gestalt der Ellipse der beiden gebrochenen Strahlen mit der Neigung des einfallenden Strahles gegen die Achse. Ist also das einfallende Licht elliptisch polarisirt, so muss es im Krystalle eine Richtung geben, für welche die Vibrationsellipse eines sich fortpflanzenden Strahles jener des einfallenden Strahles ähnlich ist. Für diese Richtung wird die Vibrationsellipse eines der beiden gebrochenen Strahlen jener des einfallenden Strahles gleich, während die Intensität des anderen gebrochenen Strahles Null wird. Es giebt also in dieser Richtung auch keine Interferenz, der elliptisch polarisirte Strahl pflanzt sich ohne Alteration fort, gerade so wie ein Circularstrahl in der Richtung der Achse. Man begreift demnach, wie man unter Anwendung elliptisch polarisirten Lichtes von bekannter Zusammensetzung in Erfahrung bringen kann, nach welchem Gesetze im Quarze die Vibrationsellipse von der Neigung des Strahles gegen die Achse abhängt. Obgleich dieses von Airy angewendete Verfahren nicht sehr genau ist, liess es doch erkennen, dass die elliptische Polarisation noch sehr merklich ist, so lange die Neigung des einfallendes Strahles gegen die Achse 10 Grade nicht übersteigt.

317. Zwei Quarzplatten hinter einander.

Airy hat seine Rechnungen auch auf einen zusammengesetzteren Fall ausgedehnt, wo nämlich ein convergentes, linear polarisirtes Strahlenbüschel successive durch zwei gleich dicke, senkrecht zur Achse geschnittene Quarzplatten von entgegengesetztem Zeichen hindurchgeht.

Der Gang der Rechnung ist derselbe, wie im Falle einer einzigen Platte. Der an die erste Platte gelangende geradlinig polarisirte Strahl zerlegt sich in zwei elliptisch polarisirte Strahlen, und jeder dieser beiden theilt sich beim Eintritt in die zweite Platte aufs Neue.

Man hat also vier elliptisch polarisirte Strahlen, deren Composanten parallel und senkrecht zum Hauptschnitte des Analyseurs zu nehmen sind. Setzt man die erste Quarzplatte als rechtsdrehend voraus und die zweite als linksdrehend, und steht der Hauptschnitt des Analyseurs senkrecht auf der ursprünglichen Polarisationsebene, so erhält man für die Vibrationsbewegung des ordentlichen Strahles im Analyseur, wenn überdies i der Winkel der ursprünglichen Polarisationsebene mit dem Hauptschnitte der Platten ist,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(1+k^2)^2}\{(1-k^4)\sin i\cos i\cos[\varphi-2(\gamma-\delta)] \\
&\qquad + k(1-k^2)\cos 2\alpha \sin[\varphi-2(\gamma-\delta)] \\
&\qquad - (1-k^4)\sin i\cos i\cos\varphi + k(1-k^2)\cos 2i\sin\varphi \\
&\qquad - 2k(1-k^2)\cos 2i\sin[\varphi-(\gamma-\delta)]\} \\
&= \frac{1}{(1+k^2)^2}\{(1-k^4)\sin 2i\sin(\gamma-\delta)\sin[\varphi-(\gamma-\delta)] \\
&\qquad + 2k(1-k^2)\cos 2i\cos(\gamma-\delta)\sin[\varphi-(\gamma-\delta)] \\
&\qquad - 2k(1-k^2)\cos 2i\sin[\varphi-(\gamma-\delta)]\}.
\end{aligned}$$

Um die Intensität des ordentlichen Bildes zu erhalten, hat man das Quadrat des Coëfficienten von $\sin[\varphi-(\gamma-\delta)]$ zu nehmen. Das giebt:

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \frac{(1-k^2)^2}{(1+k^2)^4}[(1+k^2)\sin 2i\sin(\gamma-\delta) \\
&\qquad + 2k\cos 2i\cos(\gamma-\delta) - 2k\cos 2i]^2 \\
&= \frac{(1-k^2)^2}{(1+k^2)^4}\left[(1+k^2)\sin 2i\sin(\gamma-\delta) - 4k\cos 2i\sin^2\frac{\gamma-\delta}{2}\right]^2 \\
&= \frac{4(1-k^2)^2}{(1+k^2)^4}\sin^2\frac{\gamma-\delta}{2}\left[(1+k^2)\sin 2i\cos\frac{\gamma-\delta}{2} - 2k\cos 2i\sin\frac{\gamma-\delta}{2}\right]^2,
\end{aligned}$$

und schliesslich

$$\omega^2 = \left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2\sin^2\frac{\gamma-\delta}{2}\left[\frac{4k}{1+k^2}\cos 2i\sin\frac{\gamma-\delta}{2} - 2\sin 2i\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\right]^2.$$

Wäre die erste Platte linksdrehend und die zweite rechtsdrehend, so müsste man das Vorzeichen — des zweiten Gliedes in der Klammer in + verwandeln.

318. Die Airy'schen Spiralen.

Der für die Intensität des ordentlichen Bildes des Analyseurs gefundene Ausdruck lässt das Vorhandensein zweier Reihen Minima, gleich Null, erkennen, oder das Vorhandensein zweier Systeme isochromatischer Curven. Das erste System ist gegeben durch die Gleichung

$$\sin \frac{\gamma - \delta}{2} = 0$$

oder

$$\frac{\gamma - \delta}{2} = n\pi,$$

welche kreisförmige Ringe bedeutet.

Da

$$\frac{\gamma - \delta}{2} = \pi \frac{G - D}{\lambda},$$

so ist die Gleichung dieser Kreise auch:

$$G - D = 2N \frac{\lambda}{2} \cdot$$

Die Kreise sind also durch die Bedingung bestimmt, dass der Gangunterschied einer geraden Zahl halber Wellen entspricht.

Ist ϱ die durch eine der Platten hervorgebrachte Rotation, so hat man auch (107)

$$\frac{\gamma - \delta}{2} = \varrho + Hv^2,$$

wo H eine Constante ist und v der Radius jenes Kreises, auf welchen sich $\frac{\gamma - \delta}{2}$ bezieht. Die Gleichung der dunklen Kreise kann also auch geschrieben werden:

$$\varrho + Hv^2 = N\pi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

und man ersieht, dass die Differenz der Quadrate der Radien zweier auf einander folgender Kreise, oder die Ringfläche, constant ist, wie bei den Ringen des Farbenglases (36) oder den Newton'schen Beugungsringen (93).

Das zweite Minimumcurvensystem ist gegeben durch

$$\operatorname{tang} \frac{\gamma - \delta}{2} = \frac{1 + k^2}{2k} \operatorname{tang} 2i,$$

welche Gleichung durch Nullsetzung des zweiten Factors des Intensitätsausdruckes erhalten wird. Betrachten wir das Phänomen in der Nähe der Achse, wo es am deutlichsten ist, so unterscheidet sich der Factor $\frac{1 + k^2}{2k}$ wenig von der Einheit, und man hat folglich angenähert:

$$\frac{\gamma - \delta}{2} = 2i + N\pi,$$

wo N irgend eine ganze Zahl ist.

Macht man zunächst $N = 0$ und ersetzt $\frac{\gamma - \delta}{2}$ durch $\varrho + Hv^2$, so erhält man als Gleichung einer ersten Curve

$$\varrho + Hv^2 = 2i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

oder

$$v^2 = \frac{2i - \varrho}{H}.$$

Da der Radiusvector v mit i beständig wächst, bedeutet diese Gleichung eine Spirale. Für $v = 0$ hat man

$$i = \frac{\varrho}{2};$$

demnach bildet die Tangente der Curve im Centrum mit der ursprünglichen Polarisationsebene einen Winkel gleich der halben, der Dicke einer der Platten entsprechenden Rotation.

Um uns eine Vorstellung vom Verlaufe der Spirale zu bilden, ziehen wir durch das Centrum der Erscheinung die beiden Geraden OX und OY (Fig. 47) senkrecht auf einander, so dass OX mit der ursprüng-

Fig. 47.

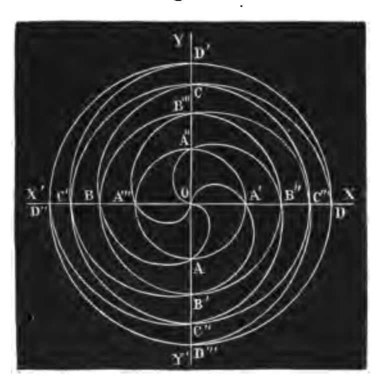


Fig. 48.



lichen Polarisationsebene zusammenfällt, und suchen die Durchschnittspunkte dieser beiden Geraden mit der Spirale.

Macht man zuerst $i = 90^0$, oder sucht man den Durchschnittspunkt der Spirale mit OY', so erhält man aus der Gleichung (2) denselben Werth für v^2, welcher sich auch aus der Gleichung (1) ergiebt, wenn man $N = 1$ setzt. Es folgt, dass die Gerade OY' von der Spirale in demselben Punkte A geschnitten wird, durch welchen auch der erste dunkle Kreis hindurchgeht. Macht man $i = 180^0$, oder sucht man den Durchschnittspunkt der Spirale mit OX', so erhält man für v^2 denselben Werth, welcher sich auch aus (1) ergiebt, wenn man $N = 2$ setzt. OX' wird also von der Spirale und dem zweiten dunklen Kreise in demselben Punkte B geschnitten. Gleicherweise sieht man, dass OY und OX von der Spirale in den Punkten C und D geschnitten werden, durch welche Punkte auch der dritte und vierte dunkle Kreis hindurchgeht, und so fort.

Wir haben bisher vorausgesetzt, dass N der Null gleich sei. Setzen wir aber nunmehr in der Gleichung

$$\frac{\gamma - \delta}{2} = 2i + N\pi$$

N der Reihe nach gleich 1, 2, 3, so erhalten wir drei neue Spiralen, welche aus der ersten Spirale durch eine Drehung um 90°, 180° und 270° erhalten werden. Macht man N grösser als 3, so erhält man die schon vorhandenen Spiralen wieder. Es giebt also im Ganzen vier Spiralen.

Diese Spiralen drehen sich, wie es die Figur zeigt, von links nach rechts, wenn die erste Quarzplatte rechtsdrehend ist. Es findet aber das Entgegengesetzte statt, wenn die beiden Platten vertauscht werden.

Die Fig. 48 zeigt das Aussehen der Erscheinung. Indem die vier Spiralen sich in der Mitte treffen, bilden sie ein Kreuz mit S-förmigen Armen. In einiger Entfernung vom Centrum zeigt sich das dunkle Kreuz, welches den nichtdrehenden einachsigen Krystallen eigen ist und sich bei diesen bis zum Centrum erstreckt. Bei Anwendung homogenen Lichtes erscheinen die Spiralen vollkommen dunkel, bei Anwendung weissen Lichtes erscheinen sowohl die Spiralen als die Kreise gefärbt, an der concaven Seite röthlich, an der convexen grünlich. Da die Minima Null sind, so gelangt das Phänomen zu prachtvoller Erscheinung. Man kann bemerken, dass die Färbung auf der concaven Seite eines Theiles einer Spirale, wie AB, Fig. 47, sich auf der concaven Seite des im folgenden Quadranten liegenden Kreisbogens BB'' fortsetzt. Gleicherweise setzt sich die Färbung der convexen Seite eines Kreisbogens wie AA''' auf der convexen Seite des im folgenden Quadranten liegenden Spiralenbogens $A'''B'''$ fort. Die zwischen den vier Armen des Kreuzes im Inneren des ersten Kreises liegenden Theile des Phänomens zeigen eine geringe Färbung.

Am einfachsten erhält man die Erscheinung der Airy'schen Spiralen mittelst des Nörremberg'schen Polarisationsapparates. Man legt eine senkrecht zur Achse geschnittene Quarzplatte auf den horizontalen Spiegel des Polarisationsapparates. Das durch die Reflexion an der schief stehenden Glasplatte polarisirte Licht geht zweimal, vor und nach der Reflexion am horizontalen Spiegel, durch die Quarzplatte, und verhält sich dann so, als wäre es durch zwei Quarzplatten von entgegengesetztem Zeichen gegangen. Man vermeidet so die Nothwendigkeit, sich zwei genau gleich dicke Platten von entgegengesetztem Zeichen zu verschaffen.

Mittelst des eben angegebenen Kunstgriffes erfährt man auch, ob eine Platte genau senkrecht zur Achse geschnitten ist, da nur in diesem Falle das durch die vier Spiralen gebildete centrale Kreuz genau symmetrisch ist.

Ueberblicken wir die gewonnenen Resultate, so sehen wir, dass zahlreiche, und theilweise sehr complicirte Erscheinungen sich durchaus in Uebereinstimmung mit den Rechnungen befinden, welche auf Grund der Airy'schen Hypothesen angestellt werden können. Die Experimente bestätigen demnach die Hypothesen Airy's, welche wir noch einmal hinstellen wollen.

1. Bei einer gegen die Achse schiefen Richtung tritt an Stelle der Circularpolarisation die elliptische Polarisation.

2. Die Ellipsen der beiden gebrochenen Strahlen sind einander ähnlich und gegen einander um 90^0 gedreht.

3. Der Gangunterschied ist gleich jenem Gangunterschiede, welcher den nichtdrehenden einachsigen Krystallen entspricht, vermehrt um ein constantes, nicht von der Fortpflanzungsrichtung abhängiges Glied.

Allein es muss bemerkt werden, dass die experimentelle Verification und Airy's Hypothesen sich nur auf solche Strahlen beziehen, welche mit der Achse kleine Winkel bilden.

319. Entdeckung der Rotationspolarisation in den Flüssigkeiten.

Die Eigenschaft gewisser Flüssigkeiten, wie der Quarz die Polarisationsebene eines geradlinig polarisirten Strahles zu drehen, wurde im Jahre 1815 von Biot durch einen glücklichen Zufall entdeckt. Uebrigens scheint es, dass Seebeck gleichzeitig oder noch früher diese Entdeckung gemacht hat. Indem Biot mit seiner Theorie der mobilen Polarisation beschäftigt war, stellte er auch Versuche an, um zu sehen, ob nicht die Farben dünner Krystallplättchen von der Beschaffenheit des äusseren Mittels abhängig wären. Indem er als äusseres Mittel Terpentinöl anwendete, bemerkte er, dass die Farben der Bilder in einer ganz eigenthümlichen Weise verändert erschienen. Natürlich stellte sich Biot die Frage, ob nicht das Terpentinöl selbst, ohne das Krystallplättchen, das polarisirte Licht eigenthümlich modificire. Nachdem also Biot das Krystallplättchen entfernt hatte, erkannte er, dass ein polarisirter Strahl, nachdem er durch eine Schicht Terpentinöl gegangen ist, im Analyseur zwei gefärbte Bilder giebt, und dass die Farbe der Bilder mit der Orientation des Analyseurs variirt. Er erkannte die *teinte sensible* wieder und konnte sich durch Anwendung homogenen Lichtes vergewissern, dass eine Schicht Terpentinöl genau so wirkt wie eine zur Achse senkrechte Quarzplatte: Terpentinöl dreht die Polarisationsebene nach links um einen Winkel, welcher der Dicke der Schicht gerade und dem Quadrate der Wellenlänge merklich verkehrt proportional ist.

Es blieb also, so sonderbar es scheinen mochte, nichts übrig, als anzunehmen, dass es Flüssigkeiten gebe, welche sich gegen das Licht wie Krystalle verhalten. Ueberdies müssen sich nothwendig bei Flüssigkeiten alle Richtungen gleich verhalten.

320. Positive und negative Flüssigkeiten.

Biot fand bald, dass das Terpentinöl nicht die einzige drehende Flüssigkeit sei, dass es vielmehr eine grosse Zahl organischer, mit Drehvermögen begabter Flüssigkeiten gebe. Unter diesen drehen einige die Polarisationsebene nach rechts, andere nach links, und man nennt die ersteren positive, die letzteren negative Flüssigkeiten.

Um das Rotationsvermögen eines Körpers zu definiren, bedient man sich einer Zahl mit Vorzeichen. Bei seinen zahlreichen Arbeiten über den Gegenstand nahm Biot den Decimeter als Längeneinheit an und bezog seine Messungen auf das rothe Licht des Kupferoxydulglases. Beispielsweise ist das Rotationsvermögen des Terpentinöls bei 20° Temperatur

$$\alpha_D = - 37{\cdot}010^0,$$

womit gesagt ist, dass eine 1 dcm lange Säule Terpentinöls die Polarisationsebene des Natriumlichtes nach links um einen Winkel von 37·010 Graden dreht.

Das Drehvermögen verschiedener Flüssigkeiten ist sehr verschieden, doch fast immer sehr klein im Vergleiche mit dem Drehvermögen des Quarzes, so dass man, um eine merkliche Wirkung zu erhalten, weit längere Säulen verwenden muss. Doch giebt es auch sehr stark drehende Flüssigkeiten; so Santonid oder Parasantonid gelöst in Chloroform unter Zusatz von Schwefelkohlenstoff, welche Lösungen bis 446° bei 1 dcm Länge drehen [1]).

Man nennt Substanzen, welche die Polarisationsebene drehen, active Substanzen, und solche, welche dieses Vermögen nicht besitzen, inactive Substanzen. Indem Biot Mischungen verschiedener organischer Substanzen anwendete, gelangte er zu den folgenden Resultaten.

1. Eine Mischung einer activen und einer inactiven Substanz ist, wenn die Substanzen nicht chemisch auf einander einwirken, selbst activ, und der Winkel der Rotation der Mischung ist proportional der Quantität der activen Substanz, so dass man diesen Winkel berechnen kann, sobald man das Drehvermögen der activen Substanz und das Mischungsverhältniss kennt. Ist α die durch die Längeneinheit der activen Substanz für sich hervorgebrachte Drehung, δ die Dichte der activen Substanz, p und p' die Gewichte der activen und der inactiven Substanz, D die Dichte der Mischung und L die Länge der vom Lichte durchsetzten Säule der Mischung, so hat man für die durch diese Säule hervorgebrachte Drehung x

$$x = \frac{L D \alpha p}{\delta (p + p')}.$$

---

[1]) Landolt-Börnstein, Phys. chem. Tab. S. 228.

2. Die Rotationswirkung einer Mischung zweier activer Flüssigkeiten, welche nicht chemisch auf einander einwirken, ist gleich der Summe der Wirkungen, welche die beiden Flüssigkeiten bei der vorhandenen Verdünnung hervorbringen würden. Sind also α und α' die Drehungen, welche die Längeneinheit der beiden Flüssigkeiten bei den Dichten δ und δ' hervorbringt, p und p' die Gewichte dieser Flüssigkeiten in der Mischung, D die Dichte der Mischung und L die Länge der Flüssigkeitssäule, so hat man für die durch die Mischung hervorgebrachte Drehung

$$x = \frac{L D}{p + p'} \left(\frac{\alpha}{\delta} p \pm \frac{\alpha'}{\delta'} p' \right).$$

Wir werden indessen später sehen, dass diese Gesetze nicht schlechtweg richtig sind.

Der Umstand, dass sich das Drehvermögen in der Mischung zweier Flüssigkeiten erhält, hat darauf geführt, feste organische Substanzen in Lösung zu bringen und auf ihr Drehvermögen zu prüfen. Man fand, dass eine grosse Zahl organischer Substanzen mit Drehvermögen begabt ist, so die Zuckerarten, die Gummiarten, Dextrin, die Campherarten, eine grosse Zahl Pflanzensäuren und dazu gehöriger Stoffe, insbesondere Weinsäure und die weinsauren Salze, dann die Alkaloïde, welche eingehend von Bouchardat und Anderen studirt worden sind und sich sämmtlich in geeigneten Lösungen als activ erweisen, ätherische Oele, Harze u. s. w. Dextrin hat seinen Namen von der Grösse und dem Sinne seines Rotationsvermögens. Was die Zuckerarten anlangt, so verhalten sie sich verschieden in Rücksicht auf die Stärke und auf den Sinn ihres Drehvermögens. Rohrzucker, welcher nach rechts dreht, wird durch die Einwirkung von Säuren in linksdrehenden Invertzucker verwandelt.

Wird eine feste active Substanz in einer inactiven Flüssigkeit gelöst, so erweist sich das Drehvermögen als proportional der Menge der activen Substanz, welche sich im Gange der Strahlen befindet, und es ist die Formel anzuwenden, welche oben für die Mischung einer activen und einer inactiven Flüssigkeit gegeben worden ist.

321. Classification der activen Substanzen.

Die drehenden Substanzen lassen sich nach H. Landolt[1]) in drei Classen eintheilen.

1. Körper, welche nur in krystallisirter Form das Drehvermögen besitzen. Diese sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, in welcher α den Winkel bedeutet, um welchen entweder der Strahl D, oder mittleres gelbes Licht, j, abgelenkt wird.

---

[1]) Das optische Drehvermögen organischer Substanzen, Dr. H. Landolt, Braunschweig 1879.

Substanz	α für 1 mm	Beobachter
Zinnober	$\alpha_D = 325^0$	Descloizeaux
Bergkrystall	$\alpha_D = 21{\cdot}67$	Biot, Broch u. A.
Natriumchlorat	$\alpha_j = 3{\cdot}67$	Marbach
Natriumbromat	$\alpha_j = 2{\cdot}80$	"
Natriumperjodat	$\alpha_D = 23{\cdot}3$	Ulrich, Groth
Kaliumhyposulfat	$\alpha_D = 8{\cdot}39$	Pape
Strontiumhyposulfat	$\alpha_j = 1{\cdot}64$	"
Calciumhyposulfat	$\alpha_j = 2{\cdot}09$	"
Bleihyposulfat	$\alpha_D = 5{\cdot}53$	"
Natriumsulfantimoniat	$\alpha_j = 2{\cdot}7$	Marbach
Uranylnatriumacetat	$\alpha_j = 1{\cdot}8$	"
Maticocampher	$\alpha_D = 2{\cdot}4$	Hintze
Benzil	$\alpha_D = 24{\cdot}92$	Descloizeaux
Aethylendiaminsulfat	$\alpha_D = 15{\cdot}5$	v. Lang
Guanidincarbonat	$\alpha_D = 14{\cdot}35$	Bodewig
Diacetylphenolphtaleïn	$\alpha_D = 19{\cdot}7$	"
Strychninsulfat	$\alpha_{Roth} = 10{\cdot}791$	Descloizeaux

Alle diese Substanzen krystallisiren entweder im regulären Systeme oder sind optisch einachsig. Jede derselben kann in rechts- und linksdrehenden Krystallen von gleichem Rotationsvermögen auftreten, und dieser Gegensatz prägt sich bei mehreren derselben schon in der Krystallform durch das Vorkommen von hemiëdrischen oder tetartoëdrischen Flächen aus, welche bei den einen Individuen rechts und bei den anderen links liegen.

2. Körper, welche im amorphen Zustande Drehungsvermögen zeigen.

Alle diese Substanzen sind Kohlenstoffverbindungen des Pflanzen- oder Thierorganismus.

	Linksdrehend	Rechtsdrehend	Inactiv
Zucker, $C_{12}H_{12}O_6$		Rohrzucker, Milchzucker, Mycose, Melitose, Melezitose, Maltose	Synanthrose
Zucker, $C_6H_{12}O_6$	Laevulose Invertzucker Invertirte Synanthrose	Dextrose, (Honigzucker, Traubenzucker, Stärkezucker, Salicin-, Amygdalin-, Phloridzin-, Gummizucker) Galactose, Eucalyn	Inosit
Mannit-Gruppe	Mannit Linksmannitan Mannitan Matezit	Nitromannit Rechtsmannitan Nitromannitan Quercit Pinit Isodulcit Bornesit	Mannitose Quercitose Sorbit Dulcit, Nitrodulcit, Dambonit, Dambose Erythrit
Kohlenhydrate, $C_6H_{10}O_5$	Inulin, Inuloïd Arab. Gummi Rübengummi	Stärke, Xyloïdin Dextrin, Glycogen Arab. Gummi Dextran (Gährungsgummi)	Cellulose Nitrocellulose Pectin
Glycoside	Amygdalin, Amygdalinsäure, Mandelsäure Salicin, Populin Phloridzin, Digitalin, Cyclamin, Coniferin	Chinovin Apiin	Glycyrrhicin Phloretin
Derivate der obigen Gruppen	Acetylderivate des Malins Gummisäure Gährungsamylalkohol	Acetylderivate von Dextrose, Milchzucker, Mannit, Mannitan, Dulcit und Stärke Glucosan, Zuckersäure Amylalkohol aus Rechtsamylchlorid, Derivate des Linksamylalkohols (Diamyl, Aethylamyl, Amylchlorid und -jodid, Cyanamyl, Amylamin, Amylvalerat, Valeraldehyd, Valeriansäure, Capronsäure)	Levulinsäure Schleimsäure Gährungsbutylalkohol Octylalkohol aus Ricinusöl Methylamil, Amylhydrür und Amylen aus act. Amylalkohol

	Linksdrehend	Rechtsdrehend	Inactiv
	Paramilchsäure Salze und Esteranhydride	Paramilchsäure	
Pflanzensäuren und dazugehörige Stoffe	Linksweinsäure Linksweinsaure Salze Linkstartramid	Rechtsweinsäure Rechtsweinsaure Salze Rechtstartramid Metaweinsäure Diweinsäure	Traubensäure Synthetische Weinsäure Pyroweinsäure Nitroweinsäure
	Natürliche Aepfelsäure	Aepfelsäure aus Rechtsweinsäure oder Asparagin	Synthetische Aepfelsäure
	Saures äpfelsaur. Ammonium in Wasser	Aepfelsaures Ammonium in Salpetersäure	Maleïnsäure Fumarsäure Bernsteinsäure
	Malamid aus Linksäpfelsäure	Neutrale äpfelsaure Salze (Zink- und Antimonammoniummalat) in Wasser	Citronensäure Citramalsäure
	Asparagin in wässerigen und alkalischen Lösungen	Asparagin in sauren Lösungen	
	Asparaginsäure in alkalischen Lösungen	Asparaginsäure in sauren Lösungen	Asparaginsäure aus Fumarsäure oder Maleïnsäure
	Glutarsäure Chinasäure	Glutaminsäure Chinovasäure in alkalischen Lösungen	
	Lactonsäure	Dextron- (Glucon-) säure	
Terpene, $C_{10}H_{16}$	Linksterpentinöl oder Terebenten (französisches von *Pinus maritima;* venetianisches von *Pinus Larix;* Templinöl von *Pinus picea* und *pumilio*)	Rechtsterpentinöl od. Australen (englisches oder amerikanisches von *Pinus balsamica, australis* u. *Toeda*; deutsches von *Pinus sylvestris, nigra* u. *abies*)	Camphen Camphilen Tereben Terebilen Polyterebene Terpinol
	Terebentenchlorhydrate Terecamphen	Australenchlorhydrate Austracamphen	
	flüssiges Terpinhydrat		festes Terpinhydrat
	Isoterebenten Terpen aus Petersilienöl	Tetraterebenten Terpen aus Citronenöl, Pomeranzenöl, Pappelöl Cicuten	
Aetherische Oele	Copaivaöl, Cubebenöl, Lavendelöl, Petersilienöl, Rautenöl, Rosenöl, Tanacetöl, Thymianöl, Wachholderöl, Krausemünzöl	Anethol, Cascarillöl, Chamillenöl, Corianderöl, Fenchelöl, Muscatöl, Myrthenöl, Sassafrasöl	Anisöl, Cassiaöl Nelkenöl Zimmtöl Thymol Gaultheriaöl Senföl

	Linksdrehend	Rechtsdrehend	Inactiv
Aetherische Oele	Links- und rechtsdrehend: Pfeffermünzöl, Kümmelöl, Rosmarinöl, Salbeiöl, Sadebaumöl, Elemiöl, Cascarillöl		
Harze	Sylvinsäure Pimarsäure Guajakharzsäure	Podocarpinsäure Dextropimarsäure Euphorbon	
Campherarten und verwandte Körper	Matricariacampher Menthol, Patchoulicampher Blumea- (Ngaï) campher, Krappcampher Borneen Camphersäure aus Matricariacampher Camphersäureanhydrid u. Camphoronsäure aus Rechtscamphersäure	Laurineencampher Borneol, Bernsteincampher, Rosmarincampher Aethyl- und Amylcampher, Bromcampher Camphersäure aus Laurineencampher Camphinsäure	Lavendelcampher Camphren Sulfocamphersäure
		Cymol aus Kümmelöl und Cuminol	
	Carvol aus Krauseminzöl Citronellol	Carvol aus Kümmelöl Absinthol Myristicol	Alle anderen Cymole Safrol Geraniol
Alkaloïde	Chinin, Cinchonidin, Homocinchonidin, Paytin, Cusconin, Aricin	Conchinin', Chinicin, Çinchonin, Cinchonicin, Chinamin, Conchinamin, Chinamicin, Dihomocinchonin, Diconchinin	
	Morphin, Codeïn, Narcotin in Alkohol Pseudomorphin Thebaïn, Papaverin, Laudanin	Narcotin in Salzsäure Laudanosin	Mekonin Narceïn Hydrocotarnin Cryptopin Aribin, Betaïn
	Strychnin, Brucin Nicotin Atropin Aconitin Geissospermin	Coniin Cicutin Pelosin (Buxin) Pilocarpin	Paraconiin Berberin Veratrin Emetin Piperin Sanquinarin
Indiff. Stoffe, Bitterstoffe etc.	Santonin, Santonsäure Pikrotoxin Jalappin	Hydrosantonsäure Hämatoxylin Echicerin, Echitin Echiteïn, Echiretin	Ostruthin Leucotin Oxyleucotin Hydrocotoin
Gallenstoffe	Cholesterin (Phytosterin)	Glycocholsäure Taurocholsäure Cholalsäure	

	Linksdrehend	Rechtsdrehend	Inactiv
Gallenstoffe		Cholalsäure Choloïdinsäure Hyoglycocholsäure Hyocholoïdinsäure Lithofellinsäure	
Leim	Glutin, Chondrin		
Eiweissstoffe	Serumalbumin Eieralbumin, Paralbumin, Natronalbuminat Caseïn, Syntonin, Peptone		

Alle jene von diesen Substanzen, welche in Krystallform gebracht worden sind [1]), erwiesen sich als optisch zweiachsig. Führt man die betreffenden Substanzen in die feste amorphe Form über, so behalten sie ihre Activität [2]).

3. Körper, welche sowohl im krystallinischen als im gelösten Zustande Drehungsvermögen besitzen.

Bis jetzt sind bloss zwei solche Substanzen bekannt: Das in Quadratoctaëdern krystallisirende wasserhaltige Strychninsulfat [3]) und der reguläre Amylamin-Alaun [4]).

Ein vollständigeres Verzeichniss der drehenden Substanzen unter Angabe der Grösse der Drehung, der Beobachter etc., ist gegeben in: Physikalisch-chemische Tabellen von H. Landolt und R. Börnstein, Berlin 1883.

322. Specifisches Drehvermögen.

Aus den angeführten Thatsachen geht hervor, dass das Rotationsvermögen der Flüssigkeiten, und der amorphen Substanzen überhaupt, der Wirkung der Molecüle zuzuschreiben ist, nicht aber von der Art ihrer Anordnung abhängt wie beim Quarz, und dass demnach die Drehung der Polarisationsebene der Menge der in der Volumeinheit enthaltenen activen Substanz proportional ist. Man gelangt so zu dem Begriffe des specifischen Drehvermögens, welches man mit Biot durch $[\varrho]$ bezeichnet.

1) Biot, *Mém. de l'Acad.* XIII, 39. Descloizeaux, Pogg. Ann. CXLI, 300. — 2) Biot, *Mém. de l'Acad.* XIII, 126. *Ann. chim. phys.* [3] X, 175; XXVIII, 351. — 3) Descloizeaux, Pogg. Ann. CII, 474. — 4) Le Bel, Ber. der deutsch. chem. Ges. V, 391.

Wenn es sich um eine active Flüssigkeit handelt, so ist das specifische Drehvermögen auszudrücken durch

$$[\varrho] = \frac{\alpha}{l\,\delta},$$

wenn δ die Dichte der Flüssigkeit und l die Länge der Flüssigkeitssäule ist, welche die Polarisationsebene um den Winkel α dreht.

Hat man eine active Substanz gelöst in einer inactiven Flüssigkeit, und ist das Gewicht der activen Substanz gleich ε, das der inactiven Flüssigkeit gleich $1 - \varepsilon$, ferner die Dichte der Lösung gleich δ, so ist offenbar die Dichte der activen Substanz in der Lösung gleich $\delta\,\varepsilon$. Ist demnach α die durch eine Säule der Lösung von der Länge gleich l hervorgebrachte Drehung, so hat man

$$[\varrho] = \frac{\alpha}{l\,\delta\,\varepsilon}.$$

Biot hat zahlreiche Experimente angestellt, um zu zeigen, dass das specifische Drehvermögen von dem gegenseitigen Abstande der Molecüle der activen Substanz unabhängig ist. So zeigte er, dass Terpentinöl sein specifisches Drehvermögen unverändert bewahrt, während die Temperatur zwischen — 10 und + 100 Grad variirt. Indem er successive 0·3, 0·4, 0·5 ... Theile Zucker in destillirtem Wasser löste und die Dichte der Lösungen bestimmte, fand er für $[\varrho]$ stets merklich denselben Werth. Ebenso verhielt es sich mit Terpentinöl; eine beträchtliche Verdünnung mit Aether ergab dasselbe specifische Drehungsvermögen. Schliesslich überzeugte sich Biot, dass Citronenöl und Terpentinöl, welche Substanzen die Polarisationsebene in entgegengesetztem Sinne drehen, wenn sie in dem durch die Formeln gegebenen Verhältnisse gemischt werden, eine vollkommen inactive Flüssigkeit geben.

Von den Abweichungen der Erscheinungen von allen diesen Gesetzen Biot's wird später die Rede sein.

Die specifische Drehung $[\varrho]$ wurde von Biot das moleculare Drehvermögen genannt. Diese Bezeichnung wurde später von Wilhelmy[1]), Hoppe-Seyler[2]) und Krecke[3]) auf eine andere Grösse übertragen:

$$[M] = \frac{P \cdot [\varrho]}{100},$$

wo P das Moleculargewicht bedeutet.

223. Bedeutung der Rotationspolarisation in der Chemie.

Man begreift die Bedeutung der Rotationspolarisation in der Chemie. Die Veränderungen des specifischen Drehvermögens verrathen Verän-

---

[1]) Pogg. Ann. LXXXI. — [2]) Journ. f. prakt. Chem. (1) LXXXIX. — [3]) Ibid. (2) V.

derungen in der Structur der Molecüle, welche sonst der Beobachtung entgehen würden. So beobachtete Biot, dass die Modificationen, welche organische Substanzen durch gewisse Lösungsmittel erfahren, sich oft während einer langen Zeitdauer vollziehen; mischt man beispielsweise Terpentinöl mit Alkohol, so wächst das specifische Drehvermögen selbst noch nach mehreren Monaten. In gleicher Weise hat Bouchardat die Wirkung der Säuren auf die Alkaloide studirt; während Morphin in saurer Lösung sein moleculares Drehvermögen unverändert bewahrt, als wäre es in Wasser gelöst, so dass man die Constitution seiner Molecüle als unverändert annehmen kann, verwandelt sich das in Wasser, Alkohol und Aether linksdrehende Narcotin im Gegentheile durch die Einwirkung der Säuren in rechtsdrehendes Narcotin, so dass man allerdings das Eintreten einer Modification der Molecüle annehmen muss.

Mittelst der auf das Drehvermögen gegründeten optischen Methode kann man ferner die Veränderungen verfolgen, welche die Stärke-, Gummi- und Zuckerarten unter dem Einflusse verdünnter Säuren erfahren, sowie die Veränderungen der Pflanzensäfte während der verschiedenen Phasen des Wachsthums.

Eine der interessantesten Anwendungen der optischen Methode rührt von Pasteur her, welcher zeigte, dass bei der Einwirkung verschiedener Säuren auf die weinsauren Salze die Vertheilung der Säuren auf die verschiedenen Basen nicht die Gesetze Berthollet's befolgt.

Schliesslich dient das Drehvermögen zur quantitativen Bestimmung des Zuckers, und in neuerer Zeit zur optischen Analyse verschiedener Substanzen, besonders der China-Alkaloide. Gleichwohl kann man aus der Unveränderlichkeit des specifischen Drehvermögens nicht mit Sicherheit auf das Abhandensein jeder chemischen Action schliessen, wie gewisse am Terpentinöl zu beobachtende Erscheinungen beweisen.

Sehr eingehende Aufschlüsse über die Beziehungen der Rotationspolarisation zur Chemie findet man in dem Werkchen „Das optische Drehungsvermögen organischer Substanzen“ von Dr. H. Landolt (l. c.).

324. Unabhängigkeit des specifischen Drehvermögens vom Aggregatzustande.

Die mit Drehvermögen begabten Substanzen zeigen zwar die Erscheinungen der Rotationspolarisation am besten im flüssigen Zustande, können dieselben jedoch auch im festen und gasförmigen Zustande zeigen. So hat Biot constatirt, dass Zucker sein Drehvermögen im festen amorphen Zustande bewahrt und dass das specifische Drehvermögen unverändert erscheint. Ebenso verhält es sich mit Weinsäure, wenn man die von Laurent angegebenen Vorsichten beobachtet. Bei allen solchen

Experimenten müssen die Substanzen im festen Zustande amorph sein, da das Vorhandensein einer krystallinischen Structur zur Folge hat, dass die Erscheinungen der Rotationspolarisation von jenen der gewöhnlichen Doppelbrechung vollständig verdeckt werden. Dies ist die Ursache, aus welcher der in Lösung stark active Campher im festen Zustande die Erscheinungen der Rotationspolarisation nicht erkennen lässt.

Das erste Experiment, um zu zeigen, dass die Substanzen ihr specifisches Drehvermögen auch beim Uebergange in den dampfförmigen Zustand nicht verlieren oder verändern, wurde von Biot im Jahre 1818 in der Orangerie von Luxembourg mit Terpentinöl unternommen. Wegen der geringen Dichte der Dämpfe musste eine Säule von 15 m Länge angewendet werden. An dem einen Ende der beiderseits mit Plangläsern geschlossenen Blechröhre befand sich ein Spiegel aus schwarzem Glase, welcher das Licht einer Lampe polarisirt eintreten liess. Am anderen Ende der Röhre befand sich ein Analyseur, welcher so gestellt wurde, dass das ausserordentliche Bild verschwand. Nachdem die Dämpfe eingelassen waren, zeigte sich das ausserordentliche Bild wieder; bei Drehung des Analyseurs veränderten sich die Farben der beiden Bilder continuirlich und blieben stets complementär. Indem sich jedoch Biot anschickte, die Drehung der Polarisationsebene zu messen, entzündeten sich die Dämpfe, der Apparat wurde durch die Flammen zerstört und der Versuch blieb unvollendet.

Biot's Versuch wurde später von Gernez[1]) mit vorzüglichen Instrumenten wieder aufgenommen. Derselbe studirte zunächst die Abhängigkeit des specifischen Drehvermögens von der Temperatur. Er fand, dass für Orangenöl, Bigaradenöl und Terpentinöl das Drehvermögen sich mit steigender Temperatur continuirlich vermindert und durch die Formel

$$[\varrho] = a - bt - ct^2$$

dargestellt werden kann, wenn t die Temperatur bedeutet und a, b, c drei rasch abnehmende Constanten. Beispielsweise hat man für Orangenöl

$$a = 115{\cdot}91, \quad b = 0{\cdot}1237, \quad c = 0{\cdot}000016.$$

Um das Drehvermögen der Dämpfe zu messen, füllte er mit denselben eine Röhre von 4 m Länge, welche von einem mit Oel gefüllten und durch eine Reihe Brenner erwärmten Mantel umgeben war. Die Drehungen der Polarisationsebene wurden nach der Methode von Fizeau und Foucault (298) für die einzelnen Linien des Spectrums gemessen. Er fand, dass das specifische Drehvermögen der Dämpfe von Campher, Orangenöl, Bigaradenöl und Terpentinöl dasselbe ist, wie im flüssigen Zustande.

Beispielsweise ergab sich für linksdrehendes Terpentinöl:

---

[1]) C. R. LXII, 1277. *Ann. de l'Éc. Norm.* I, 1.

Aggregatzustand	Temperatur	Dichte bezogen auf Wasser δ	Beobachteter Drehungswinkel α	Länge der Röhre in Decimetern l	Specifische Rotation $[\varrho] = \frac{\alpha}{l\,\delta}$
flüssig . . .	11°	0·8712	15·97°	0·5018	36·53
flüssig . . .	98	0·7996	14·47	0·50215	36·04
flüssig . . .	154	0·7505	13·50	0·50237	35·81
dampfförmig	168	0·003987	5·76	40·61	35·49

Wenn, wie bei den Substanzen der ersten Classe (113), das Drehvermögen von der krystallinischen Structur herrührt und mit dieser verschwindet, so erscheint es durch die Lagerungsweise der Molecüle bedingt. Im Gegensatze hierzu erscheint bei den Substanzen der zweiten Classe die Activität als eine Eigenschaft des Molecüls und rührt von der Anordnung der Atome in demselben her. Daher die von Biot herrührende Bezeichnung: moleculare Rotation.

Zwischen diesen beiden Classen von Substanzen in der Mitte steht, wie wir gesehen haben, der Amylamin-Alaun und das Strychninsulfat welch letzteres nach Descloizeaux im festen Zustande ein 24- oder 25 mal so grosses specifisches Drehvermögen besitzt als im gelösten Zustande.

325. Magnetische Drehung.

Fast alle durchsichtigen isotropen Körper drehen die Polarisationsebene, wenn sie sich zwischen den Polen eines Magneten befinden. Zwischen diesem Phänomen und dem an Krystallen und activen Flüssigkeiten zu beobachtenden besteht jedoch der folgende wesentliche Unterschied. Geht ein polarisirter Strahl durch einen Krystall oder eine active Flüssigkeit, und geht er hierauf nach einer erfolgten Reflexion denselben Weg zurück, so verliert er beim Rückgange die Drehung, welche er beim Hingange gewonnen hat. Die Drehung durch Magnetismus bietet das entgegengesetzte Verhalten dar: Der Strahl zeigt nach dem Hingange und Rückgange eine doppelt so grosse Drehung wie nach dem Hingange allein.

326. Rotationsdispersion der Flüssigkeiten.

Wie beim Quarz, ist auch bei den Flüssigkeiten die Drehung der Polarisationsebene nahe dem Quadrate der Wellenlänge verkehrt propor-

tional. Dass dieses Gesetz auch für die Flüssigkeiten nur angenähert richtig ist, hat schon Biot durch ein experimentelles Verfahren nachgewiesen, welches dem von Despretz auf die Prüfung des Mariotte'schen Gesetzes angewendeten analog ist. Man fülle eine Röhre mit zwei entgegengesetzt drehenden Flüssigkeiten, so dass die Rotation für eine bestimmte Farbe gleich Null ist. Wäre jenes Gesetz genau richtig, so müsste die Compensation auch für alle übrigen Farben eine vollständige sein, und es müssten die Bilder des Analyseurs farblos erscheinen. Dies ist, wie Biot durch den Versuch constatirt hat, nicht der Fall, die Bilder erscheinen stets gefärbt. Man muss also schliessen, dass jenes Gesetz keine strenge Gültigkeit hat.

Die Abweichungen von dem Gesetze sind für verschiedene Flüssigkeiten sehr verschieden; sie sind gering bei den Oelen und beträchtlich bei Campher in Alkohol gelöst. Bei der letzteren Flüssigkeit übertrifft die Drehung der Polarisationsebene des violetten Lichtes den aus der Drehung des rothen Lichtes gerechneten Werth um mehr als ein Viertel.

Ausführliche Zahlenzusammenstellungen findet man in Landolt's Tabellen (l. c.).

327. Anomale Rotationsdispersion der Weinsäure.

Weinsäure in Wasser oder Alkohol gelöst, zeigt Anomalien, welche von Biot gefunden und später von Arndtsen nach der Methode von Fizeau und Foucault genauer studirt worden sind[1]. Das Drehvermögen einer Lösung von Weinsäure in Wasser oder Alkohol nimmt keineswegs von Roth gegen Violett continuirlich zu. So erhielt Arndtsen bei einer Lösung von 50 Thln. krystallisirter Weinsäure in 50 Thln. Wasser die folgenden Drehungen:

Linie *C*	11·9°
„ *D*	13°
„ *E*	14°
„ *b*	13·7°
„ *f*	13·3°
„ *e*	10·3°.

Man sieht, dass die Rotation von Roth gegen Grün zunimmt, und dann wieder abnimmt, derart, dass sie für Violett kleiner wird als für Roth. Demnach ist auch die Farbenfolge der Bilder des Analyseurs eine anomale.

Verdünnt man die Lösung oder concentrirt man sie, so wandert das Rotationsmaximum im ersteren Falle gegen das violette Ende des Spec-

[1]) *Ann. de chim. et de phys.* (3) LIV, 403.

trums, im letzteren Falle gegen das rothe Ende. Bei einer bis zu 10 Proc. Weinsäure verdünnten Lösung fällt das Maximum in normaler Weise auf den brechbarsten Strahl *e*. Hingegen bei 80 Proc. oder 90 Proc. Säure ist die Rechtsdrehung für die rothen Strahlen am grössten, wird gegen das violette Ende des Spectrums immer kleiner und geht sogar in Linksdrehung über.

Vergleicht man die Drehungen einer bestimmten Farbe bei verschieden verdünnten Lösungen, so findet man die Drehungen nicht mehr proportional der Menge der in der Lösung enthaltenen Weinsäure, mit anderen Worten, das specifische Drehvermögen variirt beträchtlich mit der Concentration.

Biot hat gefunden, dass man für rothes Licht das specifische Drehvermögen durch die Formel

$$[\varrho] = a + b e$$

ausdrücken könne, wenn die Lösung e Procent Wasser enthält und a, b zwei Constanten sind. Dieses Resultat wurde von Arndtsen verificirt und auf die übrigen Farben ausgedehnt. Dieser bestimmte die Werthe der Constanten a und b, wie folgt:

Linie C	. . . . .	$[\varrho] = + 2{\cdot}75^0 + 0{\cdot}09\,e$
„ D	. . . . .	$[\varrho] = + 1{\cdot}95 + 0{\cdot}13\,e$
„ E	. . . . .	$[\varrho] = + 0{\cdot}15 + 0{\cdot}18\,e$
„ b	. . . . .	$[\varrho] = - 0{\cdot}83 + 0{\cdot}19\,e$
„ F	. . . . .	$[\varrho] = - 3{\cdot}60 + 0{\cdot}24\,e$
„ e	. . . . .	$[\varrho] = - 9{\cdot}61 + 0{\cdot}31\,e.$

Man sieht, wie eine Vermehrung des Wassergehaltes eine Rotation nach rechts vergrössert und eine solche nach links verkleinert. Da der Coefficient von e mit der Brechbarkeit der Strahlen rasch wächst, so überwiegt bei einer sehr verdünnten Lösung das zweite Glied des Ausdruckes für die Rotation, und diese wächst von Roth gegen Violett continuirlich, wie es dem allgemeinen Gesetze entspricht. Je concentrirter hingegen die Lösung ist, desto mehr treten die Anomalien hervor. Für $e = 0$, d. i. für die wasserfreie Weinsäure vollzieht sich die Drehung für verschiedene Farben des Spectrums in verschiedenem Sinne. Biot verificirte dieses letztere Resultat an gegossenen Platten von Weinsäure [1]), und Arndtsen [2]) gelangte zu analogen Resultaten.

Setzt man der Weinsäurelösung eine geringe Quantität Borsäure zu, so verschwinden die Anomalien der Rotationsdispersion, obzwar die Variation des specifischen Drehvermögens mit der Concentration noch gesteigert erscheint. Ebenso verschwinden die Anomalien der Rotationsdispersion der Weinsäure, wenn man die Lösungen auf höhere Temperatur bringt [3]).

---

1) *Ann. chim. phys.* (3) XXVIII, 351; XXIX, 35, 341. — 2) Ibid. (3) LIV, 415. — 3) Krecke, *Arch. Néerland* VII, 1872.

328. Abhängigkeit der Drehung vom Lösungsmittel.

Biot[1]) hatte den Satz aufgestellt: Wenn ein activer Körper in einer inactiven Flüssigkeit gelöst ist, welche nicht chemisch auf ihn einwirkt, so ist die Drehung proportional der Quantität activer Substanz. Später erkannte Biot[2]) bei mehreren Substanzen eine Abhängigkeit des specifischen Drehungsvermögens vom Procentgehalte der Lösung oder von der Natur des Lösungsmittels. Der Umstand, dass bei Rohrzuckerlösungen das Lösungsmittel nahe keinen Einfluss hat, führte auf die Construction der Saccharimeter, doch machte Biot[3]) wiederholt auf den wahren Sachverhalt aufmerksam. Dieser Gegenstand wurde später noch eingehender experimentell studirt von Oudemans jun.[4]) und Hesse[5]), und es ergab sich, dass fast alle Körper eine wesentliche Abhängigkeit ihrer specifischen Drehungen von der Concentration und noch viel mehr von der Natur des Lösungsmittels zeigten.

Um in jenen Fällen, wo das specifische Drehungsvermögen durch das Lösungsmittel alterirt wird, den wahren Werth des specifischen Drehungsvermögens zu finden, hat schon Biot[6]) einen Weg gezeigt. Ist q die Procentmenge an inactivem Lösungsmittel, so zeigt sich die Abhängigkeit der specifischen Drehung von q oft in der Form

$$[\alpha] = A + Bq,$$

wo A und B Constanten sind, in anderen Fällen in der Form

$$[\alpha] = A + Bq + Cq^2,$$

oder in der Form einer Gleichung mit noch mehr Constanten.

In diesen Formeln stellt die Constante A die specifische Drehung der reinen Substanz dar, und man findet diese specifische Drehung, wenn man durch Messungen bei verschiedenen Verdünnungsgraden die Constanten jener Gleichungen bestimmt und sodann $q = 0$ setzt.

Man muss also annehmen, dass die Constitution der Molecüle der activen Substanz durch das Lösungsmittel alterirt wird, ohne dass eine Aenderung der eigentlichen chemischen Constitution eintritt, da die Erscheinungen nur vorübergehende sind und die Körper wieder ihre ursprüngliche Rotation annehmen, sobald die indifferente Substanz entfernt ist. So deuten die Veränderungen der optischen Drehung auf eine gewisse Beweglichkeit der Atomgruppirung im Molecül hin.

---

1) *Mém. de l'Acad.* 1819, 1832. — 2) *Ann. chim. phys.* X, XXXVI. — 3) Ibid. LIX. — 4) Pogg. Ann. CILVIII. — 5) Liebig's Ann. CLXXVI. — 6) *Mém. de l'Acad.* XV, XVI. *Ann. chim. phys.* (3) X, XXVIII, XXXVI, LIX.

329. Die Doppelbrechung in den activen Flüssigkeiten.

Die Flüssigkeiten, welche die Polarisationsebene drehen, wirken auch circular doppelbrechend, d. h. sie verwandeln einen geradlinig polarisirten Strahl in zwei entgegengesetzt circularpolarisirte Strahlen, welche sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen. Der Quarz besitzt diese Eigenschaft nur in der Richtung seiner Achse, die activen Flüssigkeiten in allen Richtungen.

Man kann die Doppelbrechung der Flüssigkeiten experimentell wie beim Quarze nachweisen:

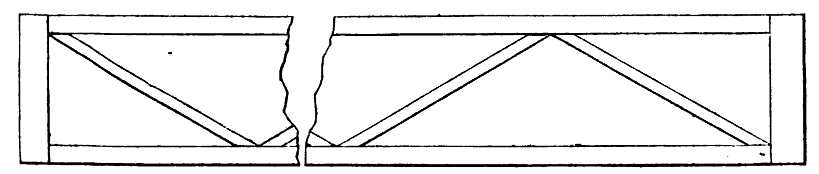
1. Ein circularpolarisirter Strahl, welcher durch eine active Flüssigkeit geht, erfährt keine Veränderung.

2. Der Babinet'sche Versuch (309), welcher die Doppelbrechung im Quarze nachweist, lässt sich auch mit drehenden Flüssigkeiten wiederholen.

3. Direct wurde die Doppelbrechung in den Flüssigkeiten von E. v. Fleischl[1]) durch den folgenden Versuch nachgewiesen.

Aus drei langen, schmalen Glasstreifen wurde eine an beiden Enden und oben offene Rinne hergestellt. Dieselbe wurde an beiden Enden durch Plangläser verschlossen, und das Innere der Rinne wurde durch vertical auf deren Boden gestellte Plangläser, welche im Zickzack zwischen den Wänden der Rinne hin und her gingen, in eine Reihe von 22 Hohlräumen prismatischer Gestalt abgetheilt. Fig. 49 stellt den Apparat in natürlichen Dimensionen dar. Die Hohlprismen wurden alternirend mit

Fig. 49.



einer rechts- und einer linksdrehenden Flüssigkeit von gleichen Brechungsexponenten gefüllt nach Analogie des Fresnel'schen Versuches (307). Ein Lichtpunkt wurde dann mittelst eines Fernrohres durch die gefüllte Rinne hindurch doppelt gesehen. Am besten gelang der Versuch mit Orangenöl und einer Mischung von Terpentinöl und Ricinusöl unter Anwendung des Natriumlichtes, welches von einer sehr kleinen Oeffnung kam. Die beiden Bilder der Oeffnung erwiesen sich als entgegengesetzt circularpolarisirt.

---

[1]) Wien. Akad. Ber. 1884.

330. Biot's Apparat zur Messung des Drehvermögens.

Die Messung des Drehvermögens der Substanzen ist namentlich in der Chemie von Bedeutung, und die Construction eines entsprechenden Apparates war andauernd Gegenstand der Bemühungen der Physiker. Der von Biot construirte Apparat [1]) kam namentlich in Frankreich in Gebrauch; doch erheischt er besondere Vorsichten. Es wird bei demselben nur Wolkenlicht verwendet und nur an solchen Tagen beobachtet, an welchen der Himmel völlig bewölkt ist.

Das von einem Heliostatenspiegel aus schwarzem Glase kommende, vollständig polarisirte Licht geht in einem verdunkelten Zimmer durch eine Röhre und einen Analyseur. Die Röhre, welche die Flüssigkeit enthält, ist beiderseits mit Plangläsern geschlossen und enthält zwei silberne Diaphragmen zur Abhaltung des falschen Lichtes. Die Messung wird damit begonnen, dass man die Röhre durch eine andere, leere und innen geschwärzte Röhre von gleicher Länge ersetzt, den Analyseur auf Auslöschung eines der beiden Bilder einstellt, und sodann an Stelle der leeren Röhre die mit Flüssigkeit gefüllte setzt. Der Winkel, um welchen man den Analyseur drehen muss, bis entweder das Bild wieder ausgelöscht wird oder die sensible Farbe erscheint, giebt die durch die Flüssigkeitssäule hervorgebrachte Rotation.

Biot arbeitete entweder mit weissem Lichte unter Beobachtung der sensiblen Farbe, oder unter Anwendung des rothen Kupferoxydulglases. Bei seinen Experimenten stellte er den Apparat in einem kleinen Zimmer mit geschwärzten Wänden auf; dasselbe hatte drei Oeffnungen: den Fensterladen, dessen Fugen sorgfältig mit schwarzer Wolle verstopft waren, die Thüre, versehen mit einem schwarzen Vorhange, und ein Fensterchen, welches leicht geöffnet und geschlossen werden konnte, zum Zwecke der Ablesungen.

Wenn man sich eines rothen Glases bedient und eines der Bilder zur Auslöschung gebracht hat, so erkennt man wohl, dass die Einstellung keine befriedigende ist, indem der Analyseur um mehrere Grade gedreht werden kann, ehe das Bild wieder erscheint. Will man genauer messen, so muss man das Mittel zweier Grenzablesungen nehmen. Macht man mehrere Ablesungen, so wird man leicht finden, dass die beiden Zahlen eines Paares von Ablesungen um 10 Grade differiren können, während die den einzelnen Paaren entsprechenden Mittel nicht um einen Viertelgrad von einander abweichen.

Benutzt man die sensible Farbe, so gebraucht man einen analogen Kunstgriff. Die Ablesungen erweisen sich als genauer, als bei Anwendung eines rothen Glases.

---

[1]) C. R. XI, 413. *Ann. de chim. et de phys.* (2), LXXV, 401.

Man kann Biot's Apparat vereinfachen, wenn man Sonnenlicht benutzt. In diesem Falle muss man als Polariseur einen Nicol anwenden, da die Polarisationswinkel für die verschiedenen Farben zu sehr verschieden sind. Bei dieser Einrichtung des Apparates, welche von Mitscherlich herrührt, hat man nicht nöthig, so viel Vorsicht auf die Abhaltung des falschen Lichtes zu verwenden, wie bei Biot's Apparat, es genügt ein am Analyseur angebrachter Schirm aus schwarzem Papier.

Die Resultate, welche mit Biot's und welche mit Mitscherlich's Apparat erhalten werden, sind strenge genommen nicht mit einander vergleichbar. Man hat deshalb bei der Prüfung der experimentellen Resultate namentlich französischer Physiker zu beachten, mit welchem Apparate die Messungen ausgeführt sind.

331. Das Polaristrobometer von Wild[1]).

Gute Resultate giebt auch das Polaristrobometer von Wild.

Die von einer Natriumflamme kommenden Strahlen treten in die Blendröhre *a* (Fig. 50), das Diaphragma *b* und den Nicol *c*. Die Fassung

Fig. 50.

dieser Stücke ist fest verbunden mit der Kreisscheibe *d* und um die Achse des Instrumentes drehbar. Die Strahlen gehen sodann durch die Flüssigkeitsröhre *e*, die Savart'sche Platte *f* (274), durch zwei Linsen und ein Diaphragma mit Fadenkreuz, *g*, *h*, *i*, welches System als astronomisches Fernrohr wirkt, schliesslich durch einen Nicol *k*, welcher mit der Platte *f* ein Savart'sches Polariskop bildet. Um den Polariseur zu drehen, dient das Getriebe *l*. Die Kreisscheibe *d* ist mit einer Theilung versehen, an welcher die Winkel der Drehung des Polariseurs mittelst des Fernrohres *m* abgelesen werden. Um den Theilkreis zu beleuchten, ist am Ende des Fernrohres *m* bei *n* ein Spiegel angebracht, welcher das Licht einer kleinen Glasflamme auf den Nonius des Theilkreises *d* reflec-

[1]) Ueber ein neues Polaristrobometer. Bern 1865.

tirt. Um bei einer bestimmten Temperatur beobachten zu können, ist die Flüssigkeitsröhre mit einem Metallrohre von grösserem Durchmesser umgeben und eine Vorrichtung getroffen, mittelst welcher der Raum zwischen den beiden Röhren von Wasser durchflossen werden kann.

Die Einstellung des Polariseurs geschieht in der folgenden Weise. Durch die Wirkung des Savart'schen Polariskops erscheint im Allgemeinen das Gesichtsfeld durchzogen von einer Schaar gerader und paralleler Interferenzlinien. Dreht man den Polariseur um 360 Grade, so verschwinden diese Streifen viermal in Abständen von je 90 Graden, nämlich immer dann, wenn der Hauptschnitt des Polariseurs mit demjenigen der ersten Kalkspathplatte des Polariskops zusammenfällt oder auf ihm senkrecht steht. Hat man den Analyseur auf einen dieser vier Punkte gebracht und schaltet sodann die active Flüssigkeit ein, so erscheinen die Streifen wieder. Die Messung der Rotation geschieht sodann durch Drehung des Polariseurs.

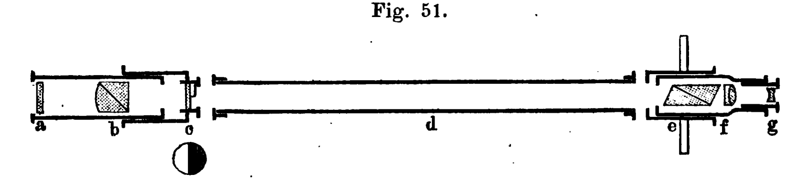
Das Instrument gestattet mit einiger Genauigkeit Zehntelgrade zu bestimmen.

332. Halbschattenapparate.

Bei den Halbschattenapparaten zeigt das Gesichtsfeld nicht, wie bei Wild's Polaristrobometer, ein Streifensystem, welches bei bestimmten Stellungen des Polariseurs verschwindet, vielmehr erscheint das kreisförmige Gesichtsfeld in zwei Hälften getheilt, welche im Allgemeinen verschieden hell und bei bestimmten Lagen des Analyseurs gleich hell erscheinen. Die Beleuchtung geschieht durch Natriumlicht. Der Halbschattenapparat ist von Jellet[1]) erfunden und später von Cornu[2]) und Laurent[3]) abgeändert. Die meiste Verbreitung hat der Apparat von Laurent gefunden.

Die Hauptbestandtheile desselben sind die folgenden (Fig. 51). *a* ist eine dünne Kaliumdichromat-Krystallplatte, welche das eintretende Na-

Fig. 51.



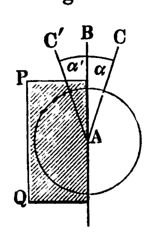
triumlicht von grünem, blauem und violettem Lichte reinigt. Als Polariseur dient das doppeltbrechende Kalkspathprisma *b*. Bei *c* befindet

[1]) *Reports of the British Association* 1860, II, 13. — [2]) *Bull. soc. chim.* (2) XIV, 140. — [3]) Dingl. polyt. Journ. CCXXIII, 608.

sich der wesentliche Bestandtheil: Das Gesichtsfeld ist zur Hälfte bedeckt von einer achsenparallelen $\frac{\lambda}{2}$-Quarzplatte. Es folgt dann die Flüssigkeitsröhre *d*, der Analyseur *e* und ein Galiläi'sches Fernrohr *fg*. Der Analyseur ist mit einer Kreisscheibe fest verbunden, an welcher die Ablesungen gemacht werden.

Die Quarzplatte *c* wirkt in der folgenden Weise. Sei, Fig. 52, *PQ* die Quarzplatte, *AB* der das Gesichtsfeld theilende Rand derselben, *AC* die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes. Die Polarisationsebene des aus der Quarzplatte austretenden Lichtes ist dann *AC'*, so dass $\alpha = \alpha'$. Bei einer gewissen Stellung des Analyseurs wird die eine Seite des Gesichtsfeldes verdunkelt sein, und man muss den Analyseur um den Winkel 2α drehen, damit die andere Seite verdunkelt werde. Dazwischen giebt es eine Mittelstellung des Analyseurs, bei welcher die beiden Hälften des Gesichtsfeldes gleich hell erscheinen. Bei dieser Mittelstellung erscheint die Beschattung der beiden Felder um so dunkler, je kleiner der Winkel α ist. Da dieser Winkel an dem Apparate variirt werden kann, lässt sich auch die Empfindlichkeit des Apparates verändern.

Fig. 52.



Es zeigt sich, dass die drei Polaristrobometer von Mitscherlich, Wild und Laurent gleich gute Resultate geben, und dass die Angaben der verschiedenen Apparate auf Zehntelgrade übereinstimmen.

333. Soleil's Saccharimeter.

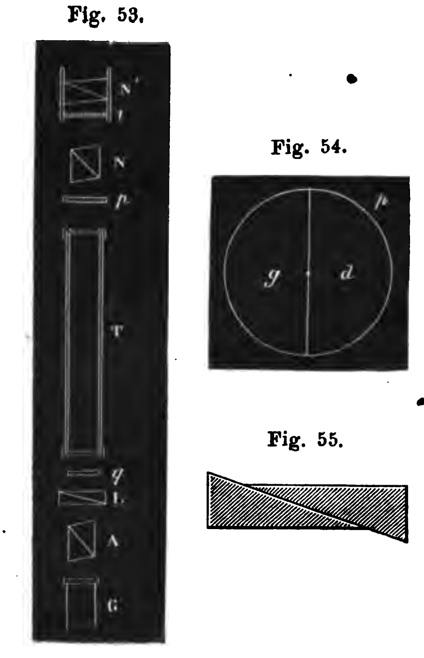
Der Apparat Biot's wurde von Soleil zu dem speciellen Zwecke der Titrage der Zuckerlösungen abgeändert [1]). Dieser, seinem Zwecke nach Saccharimeter genannte Apparat giebt direct die Quarzdicke, welche einer gegebenen Länge einer activen Flüssigkeitssäule entspricht. Er ist von grosser Empfindlichkeit und leicht zu behandeln.

Beim Soleil'schen Saccharimeter, Fig. 53 (a. f. S.), wird das Licht durch einen Nicol *N* polarisirt und tritt hierauf durch eine in Fig. 54 gesondert dargestellte Quarzplatte *p*, welche aus zwei halbkreisförmigen Hälften von gleicher Dicke und entgegengesetztem Drehvermögen besteht. Jede der Hälften dreht die Polarisationsebene des gelben Lichtes um 90 Grade. Indem das Licht durch die Platte und dann durch einen Nicol tritt, zeigen beide Hälften der Platte die sensible Farbe, wenn der Hauptschnitt des zweiten Nicols auf der ursprünglichen Polarisationsebene senkrecht steht. Nach der Platte *p* kommt die Röhre *T*, welche aus

[1]) C. R. XXI, 426; XXIV, 973.

Kupfer angefertigt und beiderseits mit Plangläsern geschlossen ist, zur Aufnahme der Flüssigkeit. Ehe das aus der Röhre tretende Licht an den Analyseur gelangt, geht es durch eine Quarzplatte q und den Compensator L. Letzterer, Fig. 55, besteht aus zwei Quarzprismen, deren Grundflächen sehr schmale, rechtwinkelige Dreiecke sind und deren Achsen auf der langen Kathetenfläche senkrecht stehen; beide Prismen drehen in dem der Platte q entgegengesetzten Sinne, und da sie sich an einander verschieben lassen, stellt der Compensator eine zur Achse senkrechte Quarzplatte von variabler und mittelst eines Nonius messbarer Dicke vor. Steht der Nonius auf Null, so ist die Dicke des Compensators gleich jener der Platte q und die Wirkungen heben sich gegenseitig auf. Gewöhnlich gestattet der Nonius eine Messung der Dickendifferenz auf $^1/_{100}$ mm.

Fig. 53. Fig. 54. Fig. 55.



Schliesslich enthält der Apparat den Analyseur A und ein kleines Galiläi'sches Fernrohr G, welches auf die Doppelplatte p eingestellt wird.

Sehen wir nun, wie mittelst dieses Apparates die Rotation gemessen werden kann, welche eine Flüssigkeitssäule von der Länge der Röhre T hervorbringt. Man beginnt damit, die Röhre T einzusetzen, entweder leer oder nachdem man sie mit Wasser gefüllt hat; letzteres thut man, um später die Einstellung des Fernrohres auf die Platte p nicht corrigiren zu müssen. Man stellt den Nonius des Compensators L mittelst der Schraube, welche eines der beiden Prismen bewegt, auf Null ein, und dreht den Analyseur, bis die beiden Hälften eines der Bilder der Platte p, z. B. des ordentlichen, die sensible Farbe zeigen. Man entfernt hierauf die Röhre T, füllt sie mit der zu untersuchenden Flüssigkeit und bringt sie wieder an ihren Platz. Ist die Flüssigkeit activ und dreht sie im selben Sinne wie die Platte q, so addiren sich die Wirkungen und die beiden Hälften des im Fernrohre erscheinenden Bildes zeigen nicht mehr die sensible Farbe. Um die Wirkung der Flüssigkeit wieder aufzuheben, muss man dann die Dicke des Compensators vergrössern. Man dreht demnach die Schraube des Compensators, bis die beiden Hälften des Bildes wieder die sensible Farbe zeigen. Die Verschiebung des Nonius giebt auf $^1/_{100}$ Millimeter genau die Zunahme der Quarzdicke des Doppelprismas L oder die Dicke einer Quarzplatte, welche die drehende

Wirkung der Flüssigkeitssäule compensirt, und hierdurch ist das Rotationsvermögen der Flüssigkeit bestimmt.

Dreht die Flüssigkeit im entgegengesetzten Sinne, so muss selbstverständlich die Quarzdicke des Compensators vermindert werden. Indem man die Schraube in der einen und anderen Richtung dreht, findet man leicht, in welcher Richtung man zur sensiblen Farbe gelangt und in welchem Sinne die Flüssigkeit dreht.

Das eben beschriebene Verfahren ist vorwurfsfrei, so lange man mit weissem Lichte operirt und so lange die Flüssigkeit farblos ist. Ist eine dieser beiden Bedingungen jedoch nicht erfüllt, so entspricht die sensible Farbe nicht mehr derselben Stelle des Spectrums und das Instrument verliert an Empfindlichkeit.

Um diesem Uebelstande abzuhelfen, hat Soleil seinem Apparate einen Bestandtheil beigefügt, welchen er den Hervorbringer der sensiblen Farbe genannt hat. Dieser Bestandtheil, welcher vorn am Saccharimeter angebracht wird, besteht aus einem Nicol *N'*, Fig. 52, und einer Quarzplatte *l*; dieses System kann mittelst einer einfachen Vorrichtung vom Beobachtungsfernrohre *G* aus um die Achse des Apparates gedreht werden. Das einfallende Licht wird durch den Nicol *N'* polarisirt, geht durch die Platte *l* und sodann durch den Nicol *N*, welcher als Analyseur wirkt und dem Lichte eine gewisse Färbung giebt. Indem man nun den Nicol *N'* dreht, findet man im Allgemeinen eine Lage, für welche die färbende Wirkung der Platte *l* die Färbung des benutzten Lichtes oder jene der Flüssigkeit neutralisirt, so dass die beiden Hälften des ordentlichen Bildes des Analyseurs *A* wieder die sensible Farbe zeigen. Gelingt es nicht, diese Compensation herbeizuführen, so kann man den Apparat immerhin noch benutzen, indem man die Färbungen der beiden Bildhälften möglichst gleich zu machen sucht.

Das Saccharimeter hat keine absolut allgemeine Anwendbarkeit, denn es setzt voraus, dass die Wirkung einer Flüssigkeitssäule durch jene an der Quarzplatte aufgehoben werden könne, während dies nur unter der Voraussetzung der Fall ist, dass das Gesetz der Rotationsdispersion für die Flüssigkeit dasselbe ist wie für den Quarz, oder dass auch bei der Flüssigkeit die Drehung dem Quadrate der Wellenlänge verkehrt proportional ist. Da aber Biot gefunden hat, dass dies bei den Zuckerlösungen zutrifft, so folgt, dass eben für Zuckerlösungen der Gebrauch des Saccharimeters völlig einwurfsfrei ist.

Das Saccharimeter hat später einige Constructionsveränderungen erfahren durch Duboscq[1]), Ventzke[2]) und Scheibler[3]). Auch hat Wild sein Polaristrobometer zum Zwecke saccharimetrischer Bestimmungen mit einer Zuckerscala versehen[4]). Ebenso v. Fleischl[5]).

---

[1]) C. R. XXXI. — [2]) Erdm. Journ. f. prakt. Chem. XXV. — [3]) Zeitschr. d. Vereins f. Rübenzuckerindustrie 1870. — [4]) Ueber ein neues Polaristrobometer und eine neue Bestimmung der Drehungsconstante des Zuckers. Bern 1865. *Mélanges phys. et chim. Bull. de l'Acad. de St. Petersbourg*, VIII. — [5]) Wien. med. Jahrb. 1885.

334. Glimmercombinationen.

Schon Fresnel (294) und Airy (295) hatten durch Combinationen dreier Krystallblättchen eine Drehung der Polarisationsebene hervorgebracht. Später hatte Nörremberg, veranlasst durch Senarmont's Arbeiten über Glimmer und Seignettesalz, Versuche mit einem Präparate ausgeführt, welches erhalten wird, wenn man eine gerade Zahl dünner Blättchen zweiachsigen Glimmers in der Art über einander legt, dass die Hauptschnitte der Blättchen sich unter 90° abwechselnd kreuzen. Fallen die Glimmerhauptschnitte mit den gekreuzten Polarisationsebenen zusammen, so verhält sich ein solches Präparat wie ein einachsiger Krystall.

Später wurde von E. Reusch[1]) die Wirkung rechts- oder linksdrehender einachsiger Krystalle durch neue Glimmercombinationen nachgeahmt.

Auf zwei Glasplatten wurden Cartons geklebt, welche vorher je drei unter 60° sich schneidende rechtwinkelige Ausschnitte zum Einlegen der länglichen Glimmerlamellen erhalten hatten. Die Lamellen waren möglichst dünn und gleich dick, und in allen fiel der Hauptschnitt mit der längeren Dimension zusammen. Angenommen, man habe 48 Lamellen; die eine Hälfte wird nun verwendet, um nach Fig. 56 die Lamellen in der Ordnung 1, 2, 3 zu einer von links nach rechts ansteigenden Treppe zu schichten; die andere Hälfte wird nach Fig. 57 zu einer von rechts nach links aufsteigenden Treppe geschichtet. Vor dem Auflegen einer neuen Lamelle wird auf die liegende ein Tropfen von dickflüssigem Copalfirniss gegeben. Man erhält so zwei Präparate, deren Lamellen in dem mit *R* bezeichneten Stück nach Rechts, in *L* nach Links ansteigen.

Fig. 56.

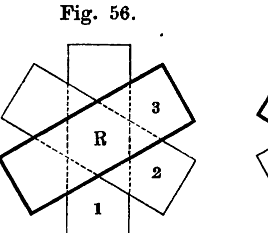
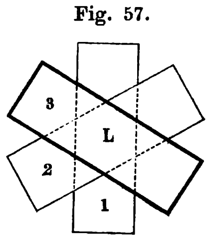


Fig. 57.



Die Präparate *R* und *L* verhalten sich nun in der centralen, regulär sechseckigen Ueberdeckung sehr nahe wie ein rechts- oder linksdrehender Bergkrystall.

Ganz dieselben Wirkungen wurden erhalten mit zwei Präparaten, in welchen vier Lamellensysteme unter 45° zu einer rechten und linken Treppe geschichtet waren.

---

[1]) Pogg. Ann. CXXXVIII, 1869.

Reusch's Entdeckung musste wichtig erscheinen, weil sie Licht auf die Ursache des optischen Drehvermögens der Krystalle zu werfen versprach; in der That erfuhr dieser Gegenstand eine noch eingehendere Behandlung durch L. Sohncke[1]), welcher schon früher[2]) die mathematische Theorie der Erscheinungen, welche eine aus drei Blättchen bestehende Glimmercombination bietet, entwickelt hatte.

Sohncke gelangte durch Beobachtung und Messung in Uebereinstimmung mit seinen Rechnungen zu den folgenden bemerkenswerthen Resultaten.

1. Die Drehung der Polarisationsebene ist der Dicke der durchlaufenen Schicht proportional.

2. Der Einfluss des Polarisationsazimuthes des einfallenden Lichtes auf die Grösse der Drehung ist unmerklich bei sehr dünnen Blättchen.

3. Die Drehung ist abhängig von der Wellenlänge. Sie ist in erster Annäherung dem Quadrate der Wellenlänge verkehrt proportional und lässt sich mit grosser Annäherung durch die von Boltzmann verbesserte Biot'sche Formel darstellen, und zwar um so besser, je dünner die Blättchen.

4. Die Drehung nimmt mit steigender Temperatur ab.

5. Je mehr die Richtung der Strahlen von der Normalen abweicht, um so mehr verliert sich die Erscheinung der Drehung.

Bei fortgesetzter Verminderung der Blättchendicke muss man demnach zu Combinationen gelangen, deren Drehwirkung mit derjenigen des Quarzes und anderer drehender Krystalle qualitativ völlig übereinstimmt.

Sohncke hat hieraus den folgenden Satz als einen wenigstens wahrscheinlichen gezogen:

„Drehende Krystalle haben eine Structur analog der Glimmercombination.“

Zu demselben Schlusse war Sohncke schon früher auf einem anderen Wege gekommen. Indem er die Hypothese aufstellte: „Die congruenten Grundgebilde, aus denen ein Krystall aufgebaut ist, sind so angeordnet, dass ihre Schwerpunkte ein endliches Stück eines unbegrenzten regelmässigen Punktsystems bilden“, hatte er alle für die Krystalle möglichen Structurformen ermittelt und sie mit den wirklich beobachteten übereinstimmend gefunden[3]). Nun giebt es unter diesen nicht wenige mit einer schraubenförmigen Anordnung der Punkte, und zwar existiren immer zwei symmetrische Formen, von denen der einen ein rechter, der anderen ein linker Windungssinn zukommt. Schon bei Auffindung dieser Schraubensysteme schloss Sohncke, dass sie den Schlüssel zur Erklärung des optischen Drehvermögens liefern müssten.

Neuestens hat M. E. Mallard[4]) eine Theorie der Rotationspolarisation gegeben, welche auch die Glimmercombinationen umfasst.

---

[1]) Pogg. Ergbd. VIII. — [2]) Math. Ann. von C. Neumann, IX. — [3]) Pogg. Ergbd. VII. — [4]) J. d. Phys. X.

335. Theorie der Rotationspolarisation. Einleitung.

Man nennt oft Airy als den Begründer der Theorie der Rotationspolarisation. Allein, wie schon früher bemerkt, sind Airy's Arbeiten über die Wirkung einer Quarzplatte auf das convergente Licht mehr geometrische Analysen der experimentellen Resultate, weitergeführt mittelst einiger Hypothesen über die Natur der Lichtschwingungen jener Strahlen, welche sich nahe der Achse im Quarze fortpflanzen, während sich kein Versuch einer mechanischen Erklärung findet.

In dieser letzteren Beziehung sind die Arbeiten, auf welche wir jetzt näher eingehen wollen, auch nicht befriedigend, doch führen sie die Erscheinungen der Rotationspolarisation auf Differentialgleichungen zurück, welche sich an die für die Doppelbrechung abgeleiteten anschliessen und sowohl die Gesetze der Doppelbrechung, als jene der Rotationspolarisation darstellen. Es ergiebt sich dann die Aufgabe, die Differentialgleichungen mechanisch zu interpretiren. Mac Cullagh war der erste, welcher im Jahre 1836 [1]) untersuchte, welche Veränderungen man mit den Differentialgleichungen der Doppelbrechung vornehmen müsse, um die Erscheinungen der Rotationspolarisation einzubegreifen, und wir wollen auf seine Arbeiten zunächst eingehen.

336. Differentialgleichungen der Rotationspolarisation für einachsige Krystalle in der Richtung der Achse.

Wir betrachten zunächst den Fall, wo ein polarisirter Strahl einen einachsigen, drehenden Krystall in der Richtung der Achse durchsetzt.

In der Theorie der Dispersion (205) haben wir gesehen: Wenn ein Krystall kein Rotationsvermögen besitzt, und man überdies die Dispersion vernachlässigt, also nur die Differentialquotienten der zweiten Ordnung beibehält, so sind die Differentialgleichungen der Aetherbewegung eines polarisirten, in der Richtung der Achse fortschreitenden Strahles:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= b^2\,\frac{d^2\xi}{dz^2} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= b^2\,\frac{d^2\eta}{d^2z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Hierbei ist die Wellennormale oder Krystallachse als z-Achse angenommen, sind x, y, z die Coordinaten eines Aethermolecüls, ξ, η, ζ die

---

[1]) Jr. Trans. XVII, 461. *Proced. of the Jr. Acad.*, I, 383.

Composanten der augenblicklichen Veränderungen dieser Coordinaten und b die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in der Richtung der Achse des Krystalls. Diese Gleichungen werden befriedigt durch

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \alpha \sin(kz - st + \varphi)\\ \eta &= \beta \sin(kz - st + \chi)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wo α, β, φ, χ beliebig sind.

Was die Grössen k und s anlangt, so ist ihr Verhältniss bestimmt und wird erhalten, wenn man (2) nach (1) setzt. Indem man in der ersten der Gleichungen (1) für ξ seinen Werth setzt, erhält man

$$-s^2\xi = -k^2b^2\xi,$$

und hieraus

$$s^2 = b^2k^2 \quad \text{und} \quad \frac{s}{k} = b.$$

Das Verhältniss $\frac{s}{k}$ ist also gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle.

Um nun alle Eigenschaften einer Quarzplatte in der Richtung ihrer Achse zu erhalten, genügt es, in die Differentialgleichungen (1) zwei neue Glieder einzuführen, so dass sie werden:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= b^2\frac{d^2\xi}{dz^2} + c\frac{d^3\eta}{dz^3}\\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= b^2\frac{d^2\eta}{dz^2} - c\frac{d^3\xi}{dz^3}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

wo c eine Constante bedeutet. Diese Veränderung der Gleichungen ist eine durchaus willkürliche und wird eingeführt, weil sie den experimentellen Thatsachen entspricht.

Nach der eingetretenen Aenderung der Differentialgleichungen ist es nicht mehr möglich, ξ und η unabhängig von einander zu bestimmen, die Bewegung des Aethermolecüls geht längs einer bestimmten Curve vor sich.

Was die Integration der Gleichungen (3) anlangt, so hat man immer noch

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha \sin(kz - st + \varphi)\\ \eta &= \beta \sin(kz - st + \chi)\end{aligned}$$

als Integrale, und man erhält jetzt:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -s^2\xi \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -s^2\eta$$

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} = -k^2\xi \quad \frac{d^2y}{dz^2} = -k^2\eta$$

$$\frac{d^3\xi}{dz^3} = -k^3\alpha\cos(kz - st + \varphi), \quad \frac{d^3\eta}{dz^3} = -k^3\beta\cos(kz - st + \chi).$$

Substituirt man diese Werthe in die Differentialgleichungen (3), so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \alpha s^2 \sin(kz - st + \varphi) &= b^2 k^2 \alpha \sin(kz - st + \varphi) \\ &\quad + c k^3 \beta \cos(kz - st + \chi) \\ \beta s^2 \sin(kz - st + \chi) &= b^2 k^2 \beta \sin(kz - st + \chi) \\ &\quad - c k^3 \alpha \cos(kz - st + \varphi) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (4)$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn die Coëfficienten von $\sin(kz - st)$ und von $\cos(kz - st)$ der Null gleich sind, und dies führt auf die folgenden vier Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha s^2 \cos\varphi &= a b^2 k^2 \cos\varphi - c k^3 \beta \sin\chi \\ \alpha s^2 \sin\varphi &= a b^2 k^2 \sin\varphi + c k^3 \beta \cos\chi \\ \beta s^2 \cos\chi &= \beta b^2 k^2 \cos\chi + c k^3 \alpha \sin\varphi \\ \beta s^2 \sin\chi &= \beta b^2 k^2 \sin\chi - c k^3 \alpha \cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Man kann den Anfang der Zeit so wählen, dass $\varphi = 0$ wird. Dann wird die erste der vier Bedingungsgleichungen:

$$\alpha s^2 = a b^2 k^2 - c k^3 \beta \sin\chi,$$

und die zweite:

$$0 = c k^3 \beta \cos\chi.$$

Diese letztere Gleichung führt auf

$$\chi = \frac{\pi}{2},$$

und hierdurch wird die erste Gleichung:

$$\alpha s^2 = a b^2 k^2 - c k^3 \beta,$$

ferner die vierte:

$$\beta s^2 = \beta b^2 k^2 - c k^3 \alpha,$$

woraus folgt:

$$\frac{\alpha}{\beta} = - \frac{c k^3}{s^2 - b^2 k^2}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\alpha^2 = \beta^2$$

$$\alpha = \pm \beta.$$

Die Bewegungsgleichungen werden, wenn man in dieselben die eben erhaltenen Bedingungen

$$\varphi = 0, \quad \chi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{und} \quad \beta = \pm \alpha$$

einführt,

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha \sin(kz - st) \\ \eta &= \pm \alpha \cos(kz - st) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Zu diesen beiden Gleichungen gehört noch die Gleichung

$$s^2 = b^2 k^2 \mp c k^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

welche erhalten wird, wenn man in den Gleichungen (5) für φ, χ und β die gefundenen Werthe einsetzt.

Das Zeichen — in der Gleichung (7) entspricht dem Zeichen + in der zweiten der Gleichungen (6) und umgekehrt.

Die Gleichungen (6) repräsentiren zwei entgegengesetzt circularpolarisirte Strahlen, welche sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen.

Wir wollen zunächst aus den Gleichungen (6) einen Ausdruck für die Rotation herleiten.

Die Gleichung (7) kann geschrieben werden

$$s^2 = k^2 (b^2 \mp c k)$$

oder

$$s = bk \left(1 \mp \frac{c k}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Da die Differenz der beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sehr klein ist, muss $\frac{s}{k}$ zwei sehr wenig von einander verschiedene Werthe haben, und es muss folglich die Constante c sehr klein sein. Man kann also s in eine convergente Reihe entwickeln, diese hierauf umkehren und derart k als Function von s darstellen. Beschränken wir uns auf die beiden ersten Glieder der Reihe, so haben wir

$$k = ms + n s^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Führt man diesen Werth von k in die Bedingungsgleichung (7) ein, vernachlässigt die Glieder mit höheren Potenzen von s als der der dritten, und setzt hierauf die Coëfficienten von s^2 und s^3 einzeln der Null gleich, so erhält man die Werthe von m und n. Nimmt man das obere Zeichen, so wird die Gleichung (7):

$$s^2 = b^2 (m^2 s^2 + 2 m n s^3) - c m^3 s^3,$$

und man erhält weiter:

$$1 = m^2 b^2$$

$$2 m n b^2 = c m^3$$

und

$$m = \frac{1}{b}$$

$$n = \frac{c m^2}{2 b^2} = \frac{c}{2 b^4}.$$

Setzt man dies nach (8), so ergiebt sich

$$k = \frac{s}{b} + \frac{c s^2}{2 b^4}.$$

Nimmt man hingegen das untere Zeichen der Gleichung (7), so ergiebt sich

$$k' = \frac{s}{b} - \frac{c s^2}{2 b^4}.$$

Aus den erhaltenen Resultaten lässt sich die Grösse der Rotation berechnen, welche durch eine senkrecht zur Achse geschnittene Platte eines drehenden Krystalls hervorgebracht wird. Setzen wir der Einfachheit wegen voraus, die Polarisationsebene des einfallenden Strahles stehe auf der x-Achse senkrecht. Beim Durchgange durch den Krystall zerlegt sich der Strahl in zwei entgegengesetzt circularpolarisirte Strahlen. Die Vibrationsbewegungen dieser beiden Strahlen können dargestellt werden, und zwar jene des ersten durch

$$\xi = - \alpha \sin s t$$
$$\eta = \alpha \cos s t,$$

und jene des zweiten durch

$$\xi' = - \alpha \sin s t$$
$$\eta' = - \alpha \cos s t.$$

Man sieht, dass der erste Strahl von rechts nach links polarisirt ist, und der zweite von links nach rechts. Nachdem die Strahlen eine Dicke z des Krystalls durchsetzt haben, sind die Bewegungsgleichungen für den ersten Strahl

$$\xi = \alpha \sin (k z - s t)$$
$$\eta = \alpha \cos (k z - s t),$$

und für den zweiten Strahl

$$\xi' = \alpha \sin (k' z - s t)$$
$$\eta' = - \alpha \cos (k' z - s t).$$

Setzt man die Constante c als positiv voraus, so ist k' kleiner als k und man sieht, dass der von rechts nach links polarisirte Circularstrahl die geringere Fortpflanzungsgeschwindigkeit hat, oder dass der Krystall rechtsdrehend ist. Ist die Constante c negativ, so verhält es sich umgekehrt.

Hat der Strahl eine Krystallplatte von der Dicke z durchsetzt, so sind die Bewegungscomposanten demnach:

$$\xi + \xi' = \alpha [\sin (k z - s t) + \sin (k' z - s t)]$$
$$\eta + \eta' = \alpha [\cos (k z - s t) - \cos (k' z - s t)]$$

oder

$$\xi + \xi' = 2 \alpha \sin \left(\frac{k + k'}{2} z - s t \right) \cos \frac{k - k'}{2} z$$
$$\eta + \eta' = - 2 \alpha \sin \left(\frac{k + k'}{2} z - s t \right) \sin \frac{k - k'}{2} z,$$

woraus man schliesslich erhält:

$$\frac{\eta + \eta'}{\xi + \xi'} = - \operatorname{tang} \frac{k - k'}{2} z.$$

Die Schwingungen des austretenden Strahles sind also geradlinig und bilden mit der x-Achse einen Winkel nach rechts gleich $\frac{k - k'}{2} z$, d. h. die Polarisationsebene ist nach rechts um diesen Winkel abgelenkt, der Krystall ist rechtsdrehend.

Für eine Dicke gleich eins des Krystalls wird die Rotation

$$\varrho = \frac{k - k'}{2}$$

oder nach den für k und k' gefundenen Werthen

$$\varrho = \frac{c s^2}{2 b^4}.$$

Bezeichnet man aber durch T die Schwingungsdauer, und durch λ die Wellenlänge im Krystalle, so zeigen die Gleichungen (2) unmittelbar, dass

$$T = \frac{2 \pi}{s}$$

und folglich

$$s = \frac{2 \pi}{T} = \frac{2 \pi V}{\lambda},$$

wenn V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Krystalle bedeutet. Hierdurch wird der Ausdruck für die Rotation:

$$\varrho = \frac{2 \pi^2 c V^2}{b^4 \lambda^2}.$$

Setzt man V für alle Strahlen als constant voraus, d. h. vernachlässigt man die Dispersion, so sieht man, dass die Rotation dem Quadrate der Wellenlänge verkehrt proportional erscheint. Wenn dieses Gesetz nur angenähert richtig ist, so stimmt dies mit den Vernachlässigungen der sich auf die Dispersion beziehenden Glieder überein.

Man könnte in die Differentialgleichungen nebst dem dritten Differentialquotienten von η und ξ nach z auch noch andere Differentialquotienten von ungerader Ordnungszahl einführen, wie

$$\frac{d \eta}{d z} \text{ und } \frac{d \xi}{d z} \text{ oder } \frac{d^5 \eta}{d z^5} \text{ und } \frac{d^5 \xi}{d z^5},$$

doch müsste man annehmen, dass diese im Vergleiche mit dem dritten Differentialquotienten mit sehr kleinen Coëfficienten behaftet sind.

337. Differentialgleichungen für Strahlen schief gegen die Achse.

Die vorstehenden Rechnungen lassen sich für den Fall der schiefen Fortpflanzung erweitern. Nehmen wir zunächst für einen Augenblick an, der Krystall besitze kein Drehvermögen. Soll eine einfallende Welle einfach gebrochen werden, so muss sie parallel oder senkrecht zur Projection der Achse auf ihre eigene Ebene polarisirt sein. Welche Lage immer aber die Polarisationsebene des einfallenden Strahles habe, man kann denselben stets in zwei Strahlen zerlegt denken, welche parallel und senkrecht zur Projection der Achse auf die Ebene der Welle polarisirt sind, und für jeden dieser beiden Strahlen, sowohl den ordentlichen als den ausserordentlichen, gelten die Differentialgleichungen, welche wir in der Theorie der Dispersion entwickelt haben (205). Nimmt man die Normale der Welle zur z-Achse, und die Projection der Achse des Krystalls auf die Ebene der Welle zur y-Achse, so dass auch die x-Achse auf die Wellenebene fällt, so sind die Differentialgleichungen der Wellenbewegung für den ordentlichen Strahl

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = A\frac{d^2\xi}{dz^2}$$

und für den ausserordentlichen

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = B\frac{d^2\eta}{dz^2}.$$

A und B sind die Quadrate der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des ordentlichen und des ausserordentlichen Strahles, und folglich hat man

$$A = b^2$$
$$B = b^2 - (b^2 - a^2)\sin^2\theta,$$

wenn θ der Winkel der Wellennormale mit der Achse des Krystalls ist und a, b dieselbe Bedeutung haben, wie in der Theorie der Doppelbrechung.

Mac Cullagh verfährt für drehende Substanzen mit diesen beiden Differentialgleichungen wie in dem zuerst abgehandelten Falle, indem er schreibt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= A\frac{d^2\xi}{dz^2} + c\frac{d^3\eta}{dz^3} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= B\frac{d^2\eta}{dz^2} - c\frac{d^3\xi}{dz^3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die Integrale dieser Gleichungen sind:

$$\xi = \alpha\sin(kz - st + \varphi)$$
$$\eta = \beta\sin(kz - st + \chi),$$

und wir erhalten durch Substitution dieser Werthe nach (1), wie im vorhergehenden Falle, vier Bedingungsgleichungen von der Form

$$\left.\begin{array}{l} m \cos\varphi = n \cos\varphi + p \sin\chi \\ m' \sin\varphi = n' \cos\varphi + p' \cos\chi \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

Man kann die Phase einer der beiden Bewegungen beliebig annehmen und $\varphi = 0$ setzen, woraus, wie im vorhergehenden Falle, folgt:

$$\cos\chi = 0.$$

Die beiden Bewegungscomposanten haben also eine Phasendifferenz gleich $\frac{\pi}{2}$ und man kann schreiben:

$$\xi = \alpha \sin(kz - st)$$
$$\eta = \pm \beta \cos(kz - st).$$

Statt das doppelte Vorzeichen beizubehalten, bezeichnen wir durch h das Verhältniss $\frac{\pm\beta}{\alpha}$, so dass h positiv oder negativ sein kann. Hierdurch werden die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \xi = \alpha \sin(kz - st) \\ \eta = h\alpha \cos(kz - st) \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

Die erste und vierte der vier Bedingungsgleichungen nehmen dann die Form an:

$$\alpha s^2 = A k^2 \alpha - c h k^3 \alpha$$
$$h \alpha s^2 = B k^2 h \alpha - c k^3 \alpha,$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{array}{l} s^2 = A k^2 - c h k^3 \\ s^2 = B k^2 - \dfrac{c k^3}{h} \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich h und k bestimmen. Das Verhältniss $\frac{s}{k}$ giebt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und die Grösse h die Gestalt der Vibrationsellipse.

Eliminirt man h aus den beiden Gleichungen (4), so erhält man

$$-\frac{s^2 - A k^2}{c k^3} = \frac{c k^3}{B k^2 - s^2}$$

oder

$$(s^2 - A k^2)(s^2 - B k^2) = c^2 k^6 \quad \dots\dots\dots \quad (5)$$

welche Gleichung nur mehr k enthält.

Zur Bestimmung von h hat man aus den Gleichungen (4)

$$0 = (A - B) k^2 - c k^3 \left(h - \frac{1}{h}\right),$$

oder

$$h - \frac{1}{h} = \frac{A - B}{c\,k}$$

oder schliesslich

$$h^2 - \frac{A - B}{c\,k}\,h - 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Da die Constante c sehr klein ist, ändert sich die Gleichung (5) sehr wenig, wenn man das Glied rechts vom Gleichheitszeichen der Null gleich setzt. Es folgt, dass die Gleichung (5) zwei Wurzeln hat, welche sehr wenig von $\frac{s^2}{A}$ und $\frac{s^2}{B}$ verschieden sind. Setzt man diese beiden aus (5) gezogenen Werthe von k nach (6), so giebt diese letztere Gleichung für jedes der beiden k^2 zwei Werthe von h, von welchen jedoch nur je einer beizubehalten ist. Bemerken wir, dass das letzte Glied der Gleichung (6) die negative Einheit ist, und bezeichnen wir durch $\frac{\beta}{\alpha}$ eine der beiden Wurzeln derselben, so folgt, dass die andere $-\frac{\alpha}{\beta}$ ist. Andererseits erhalten wir aus der Gleichung (4) einen angenäherten Werth für h, indem wir in einer der Gleichungen das Glied mit c vernachlässigen, dieselbe nach k auflösen und den so für k gefundenen Werth in die zweite Gleichung einsetzen. Man erhält aus der ersten Gleichung

$$k = \frac{s^2}{A},$$

und dann giebt die zweite

$$s^2\left(1 - \frac{B}{A}\right) = -\frac{c\,k^3}{h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Für den Quarz, welcher attractiv ist, hat man $B < A$ und folglich $1 - \frac{B}{A} > 0$. Damit das zweite Glied der Gleichung (7) positiv sei, muss h negativ sein, wenn c positiv ist, d. h. wenn der Krystall rechtsdrehend ist (336).

Es folgt aus diesen Betrachtungen: setzt man in die Gleichung (6) jenen Werth von k^2, welcher nahe gleich $\frac{s^2}{A}$ ist, so hat man von den beiden Wurzeln, welche diese Gleichung für h giebt, die negative zu nehmen, wenn der Krystall rechtsdrehend ist, die positive, wenn linksdrehend. Umgekehrt entspricht der $\frac{s^2}{B}$ benachbarte Werth von k^2 einem positiven Werthe von h für die linksdrehenden Krystalle und einem negativen für die rechtsdrehenden.

Kehren wir zur Gleichung (6) zurück und setzen wir voraus, dass

k nahe gleich $\frac{s}{\sqrt{A}}$ sei; dann muss die negative Wurzel genommen werden, und diese ist:

$$h = \frac{A-B}{2ck} \sqrt{\frac{(A-B)^2}{4c^2k^2} + 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Setzen wir diesen Werth von h in eine der Gleichungen (4), beispielsweise in die erste, so ergiebt sich zwischen s und dem $\frac{s}{\sqrt{A}}$ benachbarten Werthe von k eine Relation, nämlich

$$s^2 - Ak^2 = -\frac{A-B}{2}k^2 + ck^3\sqrt{\frac{(A-B)^2}{4c^2k^2} + 1}$$

$$= -\frac{A-B}{2}k^2 + k^2\sqrt{\frac{(A-B)^2}{4} + c^2k^2},$$

woraus man erhält

$$s^2 = \frac{A+B}{2}k^2 + \frac{k^2}{2}\sqrt{(A-B)^2 + 4c^2k^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Zu den beiden Gleichungen (8) und (9) gesellen sich die beiden folgenden Gleichungen, welche in analoger Weise erhalten werden:

$$h' = \frac{A-B}{2ck'} + \sqrt{\frac{(A-B)^2}{4c^2k'^2} + 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

$$s^2 = \frac{A+B}{2}k'^2 - \frac{k'^2}{2}\sqrt{(A-B)^2 + 4c^2k'^2} \quad . \; . \; . \quad (11)$$

Diese Gleichungen von allgemeiner Natur müssen nun in jedem besonderen Falle besonders discutirt werden. Betrachten wir zunächst den einfachen Fall, wo die Wellennormale mit der Krystallachse einen beträchtlichen Winkel bildet. Unter dieser Voraussetzung ist das erste Glied unter dem Wurzelzeichen sehr gross im Vergleiche mit dem zweiten Gliede und man kann die Wurzel in der gewöhnlichen Weise durch einen Näherungswerth ersetzen. h' erscheint nun als sehr gross und h als nahezu verschwindend. Dieser kleine Werth von h besagt, dass in einer beträchtlicheren Entfernung von der Achse die Schwingungen des ordentlichen Strahles in einer sehr gestreckten Ellipse vor sich gehen, deren grosse Achse auf dem Hauptschnitte des Krystalls senkrecht steht. Was den ausserordentlichen Strahl anlangt, so besagt der grosse Werth von h', dass die Schwingungen ebenfalls in einer sehr gestreckten Ellipse vor sich gehen, deren grosse Achse jedoch in den Hauptschnitt fällt.

Entwickeln wir nun den Werth von s^2 aus Gleichung (9), indem wir für die Wurzel ihren Näherungswerth setzen; es ergiebt sich

$$s^2 = \frac{A+B}{2}k^2 + \frac{k^2}{2}\left(A - B + \frac{2c^2k^2}{A-B}\right),$$

oder

$$s^2 = A k^2 + \frac{c^2 k^4}{A - B}.$$

Geht man von der Gleichung (11) aus, so erhält man in gleicher Weise

$$s^2 = B k'^2 - \frac{c^2 k'^4}{A - B}.$$

Es folgt hieraus, dass man k und k' nach der Methode der Umkehrung der Reihen nach steigenden Potenzen von s entwickeln kann. Beschränkt man sich auf die beiden ersten Glieder, so nehmen die Ausdrücke für k und k' die Form

$$k = \frac{s}{\sqrt{A}} + m s^2$$

$$k' = \frac{s}{\sqrt{B}} + m' s^2$$

an, wo die Factoren m und m' entgegengesetzte Vorzeichen haben. Durch Subtraction erhält man

$$k - k' = s\left(\frac{1}{\sqrt{A}} - \frac{1}{\sqrt{B}}\right) + (m - m') s^2.$$

Da m und m' der Constante c proportional sind, so folgt, dass die Differenz $k - k'$ sich aus zwei Gliedern zusammensetzt, deren erstes unabhängig vom Drehvermögen ist und in dem Maasse wächst, als man sich von der Achse entfernt, während das zweite Glied, sehr klein im Vergleiche mit dem ersten, eine Function des Drehvermögens ist. In dem Maasse, als man sich von der Achse entfernt, überwiegt die Doppelbrechung über die Rotationspolarisation.

Interessanter ist jener Fall, wo die Wellennormale mit der Krystallachse einen sehr kleinen Winkel bildet. In diesem Falle sind $(A - B)^2$ und $4 c^2 k^2$ von derselben Grössenordnung und das früher entwickelte Näherungsverfahren ist nicht mehr anwendbar. A und B sind sehr wenig von einander verschieden, ebenso k und k', und die Differenz der beiden letzteren Grössen ist von der Grössenordnung der Constante c.

Die Theorie führt zunächst zu einem Principe, welches, wie wir wissen, schon von Airy als Hypothese seinen Rechnungen zu Grunde gelegt wurde, und welches durch das Experiment seine Bestätigung erfährt. In der Gleichung (6) ändert sich der Coefficient von h sehr wenig, wenn k durch k' ersetzt wird. Zwischen der positiven Wurzel der Gleichung (6) und der negativen Wurzel derselben Gleichung, welche man erhält, nachdem k' für k gesetzt ist, besteht also nahe dieselbe Relation, wie zwischen den beiden Wurzeln der Gleichung (6), d. h. das Product derselben ist genau oder nahe gleich -1. Ist aber dieses Product gleich -1, so zeigt dies an, dass die Achsen der Ellipse, auf welche sich k bezieht, verkehrt proportional sind den Achsen der anderen Ellipse,

oder dass die beiden Ellipsen geometrisch ähnlich sind und von den Aethermolecülen in entgegengesetztem Sinne durchlaufen werden. In der That gelangte Airy bei seinen auf die Aehnlichkeit der beiden Ellipsen gegründeten Rechnungen zu Resultaten, welche mit jenen des Experimentes übereinstimmten. Was die Verschiedenheit des Sinnes betrifft, in welchem die beiden Ellipsen durchlaufen werden, so besteht dieselbe stets in Folge der Verschiedenheit des Zeichens der beiden Werthe von h. Der ordentliche Strahl ist von links nach rechts polarisirt, der ausserordentliche von rechts nach links.

Um das Verhältniss h zu finden, können wir in erster Annäherung

$$k = \frac{2\pi}{l}$$

setzen, wenn l die Wellenlänge des ordentlichen Strahles im Krystalle ist (171). Die Gleichung (6) wird, wenn für A, B und k ihre Werthe gesetzt werden,

$$h^2 - \frac{l(b^2 - a^2)\sin^2\theta}{2\pi c} h - 1 = 0,$$

und wenn man die negative Wurzel dieser Gleichung nimmt, erhält man

$$h = \frac{l}{4\pi c}(b^2 - a^2)\sin^2\theta - \sqrt{\frac{l^2}{16\pi^2 c^2}(b^2 - a^2)\sin^4\theta + 1}.$$

Für jeden Werth von θ kann nach dieser Formel das Verhältniss der Achsen der Vibrationsellipse berechnet und mit den Experimenten verglichen werden.

Um k und k' zu erhalten, hat man aus (9)

$$\frac{2s^2}{A+B} = k^2\left[1 + \frac{1}{A+B}\sqrt{(A-B)^2 + 4c^2k^2}\right]$$

und, wenn man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die Wurzel zieht und sodann für die rechte Seite der Gleichung einen Näherungswerth setzt,

$$\frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{A+B}} = k\left[1 + \frac{1}{2(A+B)}\sqrt{(A-B)^2 + 4c^2k^2}\right].$$

Man erhält einen analogen Ausdruck für k' und hat schliesslich:

$$k = \frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{A+B}} \frac{1}{1 + \frac{1}{2(A+B)}\sqrt{(A-B)^2 + 4c^2k^2}}$$

$$k' = \frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{A+B}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2(A+B)}\sqrt{(A-B)^2 + 4c^2k^2}}.$$

Da der Nenner des zweiten Factors rechts vom Gleichheitszeichen in jeder der beiden Gleichungen wenig von der Einheit verschieden ist, erhält man durch weitere Vernachlässigung:

$$k = \frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{A+B}}\left[1 - \frac{1}{2(A+B)}\sqrt{(A-B)^2 + 4c^2k^2}\right]$$

$$k' = \frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{A+B}}\left[1 + \frac{1}{2(A+B)}\sqrt{(A-B)^2 + 4c^2k'^2}\right].$$

Man kann in der Vernachlässigung noch weiter gehen und sowohl k als k' auf der rechten Seite jeder dieser beiden Gleichungen durch den Näherungswerth $\frac{s^2}{A}$ ersetzen. Berechnet man hierauf $k - k'$, d. h. die Phasendifferenz der beiden elliptisch polarisirten Strahlen für die Plattendicke gleich eins, so erhält man

$$k' - k = \frac{s\sqrt{2}}{(A+B)^{3/2}}\sqrt{(A-B)^2 + \frac{4c^2s^2}{A}}.$$

Um einen für die experimentelle Verification geeigneten Ausdruck zu erhalten, ist es nöthig, andere Constanten einzuführen.

Ersetzen wir A durch b^2, $A - B$ durch $(b^2 - a^2)\sin^2\theta$, nehmen für $A + B$ den Näherungswerth $2b^2$ und für s den früher gefundenen Werth $\frac{2\pi}{T}$, so haben wir

$$(k' - k)^2 = \frac{\pi^2}{2b^6T^2}\left[(b^2 - a^2)^2\sin^4\theta + \frac{16c^2\pi^2}{b^2T^2}\right],$$

oder, da

$$bT = l,$$

schliesslich

$$(k' - k)^2 = \frac{\pi^2}{2b^4l^2}\left[(b^2 - a^2)\sin^4\theta + \frac{16\pi^2c^2}{l^2}\right],$$

welche Formel experimentell verificirbar ist.

338. Experimentelle Verification.

Die obigen Formeln wurden im Jahre 1839 von Mac Cullagh gegeben. Sie unterscheiden sich in Rücksicht auf die experimentelle Verification sehr wenig von jenen Formeln, welche Cauchy auf Jamin's Bitte diesem letzteren geliefert hat, und diese wieder sehr wenig von der Formel V. v. Lang's. Jamin kannte Mac Cullagh's Abhandlung nicht und hatte sich vorgesetzt, experimentell zu untersuchen, ob die Erscheinungen, welche drehende Krystalle zeigen, mit der Annahme übereinstimmen, dass in diesen Krystallen der Radiusvector des Huyghens'schen Ellipsoides um ein constantes Stück verkürzt sei[1]).

---

[1]) C. R. XXX, 99. *Ann. de chim. et de phys.* (3) XXX, 55.

Bei seiner experimentellen Verification gebrauchte Jamin eine senkrecht zur Achse geschnittene Quarzplatte, welche gegen die auffallenden Strahlen beliebig gedreht werden konnte und bestimmte den Winkel θ für jede einzelne der Beobachtungen. Das Licht fiel nach seinem Austritte auf einen Babinet'schen Compensator (258), welcher dazu diente, die zwischen den beiden parallel und senkrecht zum Hauptschnitte polarisirten Composanten des austretenden Lichtes bestehende Phasendifferenz zu messen. Eben diese Phasendifferenzen wollte Jamin mit den theoretischen Phasendifferenzen vergleichen. Die erhaltenen Zahlen stimmten mit den Formeln Cauchy's überein.

V. v. Lang[1]) gab eine directe Bestätigung der Formeln, indem er die Brechungsquotienten im Quarze für verschiedene Werthe von θ wirklich maass. Er benutzte hierzu ein Quarzprisma, dessen beide Seiten nahezu gleich geneigt gegen die optische Achse waren, und verfuhr nach der Spectrometer-Methode unter Anwendung des Natriumlichtes. Es ergab sich, wenn wieder θ der Winkel der Wellennormale mit der Achse ist, und n, n' die beiden Brechungsquotienten,

θ	n	n'
0° 27·0′	1·5441887	1·5442605
1 54·7	1925	2649
2 48·4	1942	2766
4 40·0	2043	3043
5 4·8	2088	3009.

Die Uebereinstimmung zwischen diesen beobachteten Werthen und den theoretischen war eine befriedigende. Ueberdies geht aus diesen Messungen hervor, dass es in der Nähe der Achse beim Quarze keine Welle mit constanter Geschwindigkeit mehr giebt, die ordentliche wie die ausserordentliche Welle ändern sich nach einem anderen Gesetze als wie bei den gewöhnlichen einachsigen Körpern. Die folgende Tabelle enthält die auf Grund der obigen Zahlen gerechneten Brechungsquotienten n und n' von fünf zu fünf Graden, und die Brechungsquotienten (n) und (n'), welche unter der Annahme gerechnet sind, dass der Quarz nicht mit Drehvermögen begabt wäre, sondern sich wie ein gewöhnlicher Krystall verhielte.

θ	n	(n)	n'	(n')
0°	1·5441884	1·5442243	1·5442602	1·5442243
5	2093	2243	43081	42929
10	2200	2243	45009	44965
15	2225	2243	48309	48290
20	2234	2243	52816	52806
25	2242	2243	58382	58380.

Man sieht aus dieser Tabelle ferner, dass bei einer Neigung von 25° zur optischen Achse die Wirkung der Rotationspolarisation auch

[1]) Sitzber. d. Wiener Akad. d. Wissensch. 1896.

schon bis in die siebente Decimalstelle der Brechungsquotienten verschwindet.

Die Differenz der Brechungsquotienten in der Richtung der optischen Achse beträgt nach den vorhergehenden Zahlen

$$n_0' - n_0 = 0{\cdot}0000718.$$

Man kann diese Grösse auch aus dem Drehungswinkel δ bestimmen, welchen die Polarisationsebene eines Lichtstrahles erfährt, der parallel der Achse durch eine Quarzplatte von bekannter Dicke d hindurchgeht. Man hat nämlich für den Drehungswinkel

$$\delta = \frac{d}{\lambda}(n_0' - n_0) . 180^0,$$

wo λ die Wellenlänge des Lichtes in Luft bedeutet. Für $d = 1$ mm und für die Fraunhofer'sche Linie D hat man nach Stefan $\delta = 21{\cdot}79^0$, so dass, da nach Fraunhofer für die genannte Linie $\lambda = 0{\cdot}0005888$ mm ist, die letzte Gleichung

$$n_0' - n_0 = 0{\cdot}0000713$$

giebt.

Neuestens hat Cornu[1]) den Satz aufgestellt, dass der Mittelwerth der beiden Geschwindigkeiten, mit welchen sich das Licht in einem drehenden Krystalle längs der Achse fortpflanzt, gleich ist der Geschwindigkeit des ordentlichen Strahles senkrecht zur Achse, und den analogen Satz in Bezug auf die magnetische Circularpolarisation.

Mit diesem Satze fand Cornu seine Messungen in Uebereinstimmung, ohne ihn als endgiltig experimentell verificirt anzusehen. Die obigen Zahlen V. v. Lang's liefern indessen eine schöne experimentelle Bestätigung des Cornu'schen Satzes. Die letzte Tabelle giebt nämlich für $\theta = 0^0$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right) = 0{\cdot}6475743$$

und

$$\frac{1}{(n)} = 0{\cdot}6475743,$$

d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ordentlichen Strahles im Quarz stimmt genau überein mit dem arithmetischen Mittel der beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in der Richtung der Achse.

339. Theorie der Rotationspolarisation in den zweiachsigen Krystallen.

Die Gesetze der Lichtfortpflanzung in den zweiachsigen Krystallen sind experimentell so gut wie gar nicht studirt. Mit der Theorie dieser

[1]) C. R. XCII.

Gesetze beschäftigten sich zuerst Mac Cullagh und Cauchy, doch veröffentlichten beide nur Andeutungen einer Theorie.

Mac Cullagh[1]) wurde durch seine theoretischen Betrachtungen zu Resultaten geführt, nach welchen in den zweiachsigen Krystallen die Polarisation des Lichtes im Allgemeinen eine elliptische ist, jedoch in den Richtungen der optischen Achsen eine circulare, so dass diese Krystalle längs den Richtungen der optischen Achsen mit Rotationsvermögen begabt wären. Dieses theoretische Resultat Mac Cullagh's konnte bisher nicht experimentell verificirt werden, da es schwer ist, geeignete Krystalle zu erhalten.

Cauchy hat im Jahre 1847[2]) Gleichungen bekannt gemacht, welche sich auf die Rotationspolarisation der zweiachsigen Krystalle beziehen. Wie Mac Cullagh, fügte er den gewöhnlichen Differentialgleichungen Glieder bei; statt jedoch die dritten Differentialquotienten einzuführen, führte er die ersten Differentialquotienten ein. Letzteres hat zur Folge, dass man bei dem oben angewendeten Grade der Annäherung zu einem von der Wellenlänge unabhängigen Resultate gelangt.

Clebsch[3]) entwickelte die von Cauchy aufgestellten Formeln. In Bezug auf die zweiachsigen Krystalle fand er, dass ihre Eigenschaften in den Richtungen der optischen Achsen vergleichbar sind mit den Eigenschaften der einachsigen Krystalle in der Richtung ihrer optischen Achse. Er suchte eine mechanische Erklärung der von Cauchy in die Differentialgleichungen eingeführten Glieder zu geben, gegen welche Erklärung Verdet Einsprache erhob.

Briot gab in seinem *Essai sur la théorie mathématique de la lumière* eine vollständige Theorie der Rotationspolarisation und gelangte zu Differentialgleichungen, welche in der That die ungeraden Differentialquotienten enthalten, deren Anwesenheit das Rotationsvermögen anzeigt (336). Briot nimmt in seiner Lichttheorie an, dass der Aether in einem Krystalle sich wie ein isotropes Mittel verhält, analog dem freien Aether, jedoch sich von diesem durch Ausdehnungen oder Verdichtungen nach gewissen durch die Linien des Krystalls bestimmten Richtungen unterscheidet. In zweiter Annäherung nimmt Briot periodische, durch die Körpermolecüle hervorgebrachte Ungleichheiten in der Vertheilung des Aethers an, welche zu den früher erwähnten allgemeinen Ungleichheiten hinzukommen. Aus den periodischen Ungleichheiten leitet Briot die Dispersion ab, und aus den periodischen Ungleichheiten in den asymmetrischen Mitteln die Rotationspolarisation. Briot nimmt an, dass in den activen Flüssigkeiten eine grosse Zahl kleiner asymmetrischer Krystalle schwimmen. Er erhält hierdurch in jeder Richtung zwei entgegengesetzt kreisförmig polarisirte Strahlen von verschiedener Geschwindigkeit. In Briot's Differentialgleichungen er-

[1]) *Proceed. of the Jr. Acad.* I, 383. — [2]) C. R. XXV, 331. — [3]) Journ. Crelle, LVII, 319.

scheinen die Derivirten der ersten Ordnung nicht. Bleibt man bei den Derivirten der dritten Ordnung stehen, so findet man die Drehung der Polarisationsebene dem Quadrate der Wellenlänge verkehrt proportional. Wenn man bis zu den Gliedern der fünften Ordnung fortschreitet, so erhält man eine complicirtere Formel, welche eine grössere Annäherung an das Experiment gestattet. Schon Fresnel hatte angenommen, dass im Quarz die Reihen der Aethermolecüle in eine Helix gewunden seien. Auch Briot theilt diese Vorstellung. Ein zur Achse des Quarzes senkrechter Strahl zerlegt sich nach Briot in zwei elliptische Schwingungen von entgegengesetztem Sinne; die kleine Achse der Ellipse ist sehr klein im Vergleich mit der grossen Achse; im Quarz ist sie davon nahezu nur der fünfhundertste Theil: die beiden Vibrationen sind also nahezu geradlinig.

Boussinesq, welcher ebenfalls eine vollständige Wellentheorie des Lichtes entwickelt hat [1]), gelangte zu dem Resultate: Abgesehen von der Dispersion ist das Drehvermögen einer durchsichtigen Mischung gleich der Summe der Drehvermögen der einzelnen Bestandtheile, während jedes derselben der Dichte des entsprechenden Bestandtheiles proportional ist. Er behandelte auch die Drehung der Polarisationsebene durch den Magnetismus, und seine Rechnungen ergaben Glieder, welche auf eine Drehung der Polarisationsebene führen, indem in den transversalen Wellen entgegengesetzt kreisförmige Schwingungen hervortreten, welche sich zu linearen Schwingungen wieder vereinigen und damit die Polarisationsebene um einen Winkel drehen, welcher dem durchlaufenen Wege und dem Cosinus desjenigen Winkels proportional ist, den die Magnetachse mit der Wellennormale bildet, und nahezu im umgekehrten Verhältniss des Quadrates der Wellenlänge variirt, wie dies in der That der Erfahrung entspricht.

V. v. Lang hatte eine Theorie der Doppelbrechung [2]) gegeben, in welcher der Lichtäther als ein gewöhnliches elastisches Medium betrachtet, von den Körpermolecülen aber angenommen wird, dass sie in beständigen Schwingungen begriffen sind. Diese Theorie wurde später auch auf circularpolarisirende Medien ausgedehnt [3]), und in den Krystallen ausser der gewöhnlichen netzförmigen Anordnung der kleinsten Theilchen noch eine spiralförmige Lagerung derselben angenommen. v. Lang gelangte zu dem Resultate, dass sich in jeder Richtung zwei entgegengesetzt elliptisch polarisirte Wellen fortpflanzen; die Ellipsen sind ähnlich und um 90 Grade gegen einander gedreht. In den Richtungen der beiden optischen Achsen ergab sich Circularpolarisation.

In neuester Zeit wurde die Theorie der Circularpolarisation namentlich behandelt von M. E. Mallard [4]), Ch. Soret [5]), E. Ketteler [6]), W. Voigt [7]) und E. Lommel [8]).

---

[1]) Liouville, J. XIII, p. 313, 340, 425. — [2]) Sitzungsber. der Wien. Akad. LXXIII, 1876. — [3]) Ibid. LXXV, 1877. — [4]) J. d. Phys. X. — [5]) *Arch. de Gen.* XI. — [6]) Wied. Ann. 1882, 1884. — [7]) Ibid. 1883, 1884. — [8]) Ibid. 1883.

340. Theorie des Drehvermögens activer Lösungen. Einleitung.

Wir gehen im Folgenden von der Voraussetzung aus, dass in den einachsigen sowohl als zweiachsigen, mit Drehvermögen begabten Krystallen, an die Stelle der geradlinigen Polarisation die elliptische Polarisation tritt, und dass die Ellipsen des ordentlichen und des ausserordentlichen Strahles einander angenähert ähnlich sind. Um sich von den Eigenschaften der activen Lösungen Rechenschaft zu geben, muss man das folgende Problem lösen: Welche Modification erfährt das geradlinig polarisirte Licht beim Durchgange durch eine inactive Flüssigkeit, in welcher eine sehr grosse Zahl unregelmässig vertheilter Moleoüle suspendirt sind, welche einen geradlinig polarisirten Strahl in zwei entgegengesetzt elliptisch polarisirte Strahlen zerlegen? Man wird auf dieses Problem durch zahlreiche Experimente geführt, welche beweisen, dass das Molecül in der Lösung seine Constitution bewahrt, und dass folglich die Lösung eines mit Drehvermögen begabten Krystalls in einer inactiven Flüssigkeit als eine Mischung activer und inactiver Molecüle anzusehen ist.

Wir wollen zunächst versuchen, von jenem ersten Gesetze Rechenschaft zu geben, nach welchem die durch eine Flüssigkeit hervorgebrachte Drehung der Polarisationsebene proportional ist der Dicke der Flüssigkeitsschicht.

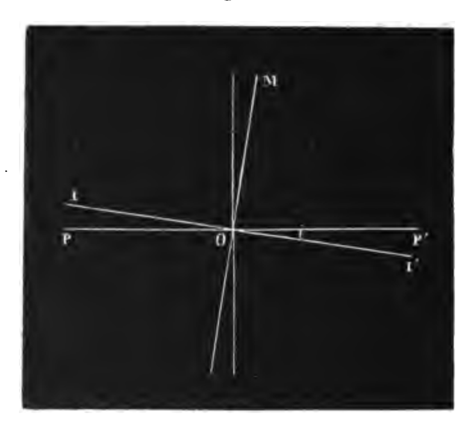
341. Wirkung eines einzigen Krystallblättchens.

Es trete ein geradlinig polarisirter Strahl in beliebiger Richtung durch ein dünnes, mit Rotationsvermögen begabtes Krystallblättchen. Nehmen wir zur Ebene der Fig. 58 (a. f. S.) eine Ebene parallel der, als eben vorausgesetzten, einfallenden Welle. Seien PP' die Spur der ursprünglichen Polarisationsebene auf der Ebene der Figur, und II' jene des Hauptschnittes des Blättchens. Die schwingende Bewegung des einfallenden Lichtes kann in zwei Bewegungen zerlegt werden, parallel und senkrecht zu II', und mögen diese beiden Richtungen die ξ-Achse und die η-Achse eines Coordinatensystems sein. Man erhält so zwei rechtwinkelig polarisirte Strahlen, und kann diese nach (311) ersetzen durch zwei entgegengesetzt elliptisch polarisirte Strahlen. Bezeichnet man mit i den Winkel zwischen dem Hauptschnitte des Blättchens und der ursprünglichen Polarisationsebene, durch k eine zwischen 0 und 1 liegende, von der Orientation des Blättchens gegen den Strahl abhängige Grösse, und setzt man

$$\frac{2\pi t}{T} = \varphi,$$

so findet man, wie wir gesehen haben (311), dass die Vibrationsbewegungen der beiden elliptisch polarisirten Strahlen durch die Gleichungen

Fig. 58.



$$\eta = \frac{1}{1+k^2}(\cos i \sin \varphi - k \sin i \cos \varphi),$$

$$\xi = -\frac{k}{1+k^2}(\cos i \cos \varphi + k \sin i \sin \varphi)$$

und

$$\eta' = \frac{1}{1+k^2}(k^2 \cos i \sin \varphi + k \sin i \cos \varphi)$$

$$\xi' = \frac{1}{1+k^2}(k \cos i \cos \varphi - \sin i \sin \varphi)$$

gegeben sind, und zwar beziehen sich die ersteren Gleichungen auf den von links nach rechts, die letzteren auf den von rechts nach links polarisirten Strahl.

Indem die beiden elliptisch polarisirten Strahlen die Platte durchsetzen, entsteht zwischen denselben eine gewisse Phasendifferenz. Will man daher die Ausdrücke für die Vibrationsbewegung beim Austritte aus der Platte erhalten, so muss man für den von links nach rechts polarisirten Strahl $\varphi - \delta$ statt φ, und für den von rechts nach links polarisirten Strahl $\varphi - \gamma$ statt φ setzen, wo δ und γ die in (313) besprochene Bedeutung haben.

Man erhält so:

$$\eta = \frac{1}{1 + k^2} [\cos i \sin(\varphi - \delta) - k \sin i \cos(\varphi - \delta)],$$

$$\xi = -\frac{k}{1 + k^2} [\cos i \cos(\varphi - \delta) + k \sin i \sin(\varphi - \delta)],$$

$$\eta' = \frac{1}{1 + k^2} [k^2 \cos i \sin(\varphi - \gamma) + k \sin i \cos(\varphi - \gamma)],$$

$$\xi' = \frac{1}{1 + k^2} [k \cos i \cos(\varphi - \gamma) - \sin i \sin(\varphi - \gamma)].$$

Um den Bewegungszustand beim Austritte aus der Platte darzustellen, nehmen wir zur x-Achse die Spur der ursprünglichen Polarisationsebene, und zur y-Achse eine senkrechte Gerade: Wir erhalten:

$$y = (\eta + \eta') \cos i - (\xi + \xi') \sin i$$
$$x = (\eta + \eta') \sin i + (\xi + \xi') \cos i.$$

Setzt man für ξ, ξ', η, η' ihre Werthe, so erhält man

$$\begin{aligned}(1 + k^2) y = {} & \cos^2 i [\sin(\varphi - \delta) + k^2 \sin(\varphi - \gamma)] \\ & - \sin i \cos i [k \cos(\varphi - \delta) - k \cos(\varphi - \gamma)] \\ & + \sin i \cos i [k \cos(\varphi - \delta) - k \cos(\varphi - \gamma)] \\ & + \sin^2 i [k^2 \sin(\varphi - \delta) + \sin(\varphi - \gamma)],\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}(1 + k^2) y = {} & \cos^2 i [\sin(\varphi - \delta) + k^2 \sin(\varphi - \gamma)] \\ & + \sin^2 i [k^2 \sin(\varphi - \delta) + \sin(\varphi - \gamma)].\end{aligned}$$

Gleicherweise findet man:

$$\begin{aligned}(1 + k^2) x = {} & \sin i \cos i [\sin(\varphi - \delta) + k^2 \sin(\varphi - \gamma)] \\ & - \sin^2 i [k \cos(\varphi - \delta) - k \cos(\varphi - \gamma)] \\ & - \cos^2 i [k \cos(\varphi - \delta) - k \cos(\varphi - \gamma)] \\ & - \sin i \cos i [k^2 \sin(\varphi - \delta) + \sin(\varphi - \gamma)],\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}(1 + k^2) x = {} & k \cos(\varphi - \gamma) - k \cos(\varphi - \delta) \\ & + \sin i \cos i [(1 - k^2) \sin(\varphi - \delta) - (1 - k^2) \sin(\varphi - \gamma)],\end{aligned}$$

und schliesslich

$$\begin{aligned}(1 + k^2) x = {} & - 2 k \sin \frac{\delta - \gamma}{2} \sin\left(\varphi - \frac{\delta + \gamma}{2}\right) \\ & - (1 - k^2) \sin 2 i \sin \frac{\delta - \gamma}{2} \cos\left(\varphi - \frac{\delta + \gamma}{2}\right).\end{aligned}$$

Kehren wir zu dem für $(1 + k^2) y$ gefundenen Werthe zurück und schreiben wir ihn:

$$(1 + k^2)\,y = \frac{\cos^2 i}{2}\Big\{(1 + k^2)[\sin(\varphi - \delta) + \sin(\varphi - \gamma)] + (1 - k^2)[\sin(\varphi - \delta) - \sin(\varphi - \gamma)]\Big\} + \frac{\sin^2 i}{2}\Big\{(1 + k^2)[\sin(\varphi - \gamma) + \sin(\varphi - \delta)] + (1 - k^2)[\sin(\varphi - \gamma) - \sin(\varphi - \delta)]\Big\}.$$

Indem man diesen Ausdruck vereinfacht und den für $(1 + k^2)\,x$ gefundenen hinzufügt, erhält man:

$$(1 + k^2)\,y = (1 + k^2)\cos\frac{\delta - \gamma}{2}\sin\left(\varphi - \frac{\delta + \gamma}{2}\right) - (1 - k^2)\cos 2i\sin\frac{\delta - \gamma}{2}\cos\left(\varphi - \frac{\delta + \gamma}{2}\right),$$

$$(1 + k^2)\,x = -2k\sin\frac{\delta - \gamma}{2}\sin\left(\varphi - \frac{\delta + \gamma}{2}\right) - (1 - k^2)\sin 2i\sin\frac{\delta - \gamma}{2}\cos\left(\varphi - \frac{\delta + \gamma}{2}\right).$$

Es ist leicht zu ersehen, welche Bewegung durch diese beiden Gleichungen dargestellt wird. x und y erscheinen als Summen zweier Glieder, die beiden ersten Glieder zeigen dieselbe Phase, ebenso die beiden letzten Glieder, und der Phasenunterschied zwischen den ersten und letzten Gliedern ist $\frac{\pi}{2}$. Man hat also zwei geradlinig polarisirte Strahlen mit der Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$.

Der durch die beiden letzten Glieder gegebene Strahl hat die Amplitude

$$\frac{1 - k^2}{1 + k^2}\sin\frac{\delta - \gamma}{2}$$

und ist im Azimuth $2i$ polarisirt.

Setzen wir $\delta > \gamma$ voraus, also dass der von links nach rechts elliptisch polarisirte Strahl in der Krystallplatte langsamer geht als der von rechts nach links polarisirte, so sind die beiden Composanten des eben betrachteten Strahles negativ. Seine Phase ist:

$$\varphi - \frac{\delta + \gamma}{2} - \frac{\pi}{2},$$

und seine Intensität:

$$\left(\frac{1 - k^2}{1 + k^2}\right)^2 \sin^2\frac{\delta - \gamma}{2}.$$

Die beiden ersten Glieder repräsentiren auch einen geradlinig polarisirten Strahl, dessen Phase

$$\varphi - \frac{\delta + \gamma}{2},$$

und dessen Intensität

$$\frac{1}{(1 + k^2)^2}\left[(1 + k^2)\cos^2\frac{\delta - \gamma}{2} + 4k^2\sin^2\frac{\delta - \gamma}{2}\right]$$

sind.

Um das Polarisationsazimuth dieses Strahles zu finden, bemerken wir, dass das Verhältniss des zu x gehörigen und des zu y gehörigen Gliedes die Tangente des Winkels ist, welchen die Polarisationsebene dieses Strahles und die ursprüngliche Polarisationsebene einschliessen. Bezeichnet man diesen Winkel mit ϱ, so hat man

$$tang\,\varrho = \frac{2k}{1 + k^2}\,tang\,\frac{\delta - \gamma}{2}.$$

Alles dies zusammengefasst, besteht die Wirkung eines mit Rotationsvermögen begabten Blättchens auf einen geradlinig polarisirten Strahl in Folgendem: Der eintretende geradlinig polarisirte Strahl verwandelt sich in zwei geradlinig polarisirte Strahlen. Von diesen ist der eine im Azimuthe $2i$ polarisirt, hat die Phase $\varphi - \frac{\delta + \gamma}{2} - \frac{\pi}{2}$ und die Intensität $\left(\frac{1 - k^2}{1 + k^2}\right)^2 \sin^2\frac{\delta - \gamma}{2}$. Der andere ist in einer Ebene polarisirt, welche mit der ursprünglichen Polarisationsebene einen Winkel bildet, dessen Tangente $\frac{2k}{1 + k^2}\,tang\,\frac{\delta - \gamma}{2}$ ist, hat die Phase $\varphi - \frac{\delta + \gamma}{2}$ und die Intensität

$$\frac{1}{(1 + k^2)^2}\left[(1 + k^2)\cos^2\frac{\delta - \gamma}{2} + 4k^2\sin^2\frac{\delta - \gamma}{2}\right].$$

Setzen wir die Platte als sehr dünn voraus, so werden die Winkel ϱ und $\frac{\delta - \gamma}{2}$ auch sehr klein, und folglich proportional ihren Tangenten. Man kann also schreiben:

$$\varrho = \frac{2k}{1 + k^2}\cdot\frac{\delta - \gamma}{2}.$$

Andererseits sieht man, dass, wenn $\frac{\delta - \gamma}{2}$ sehr klein ist, die Intensität des unter dem Azimuthe ϱ polarisirten Strahles nahe gleich 1, und die des anderen, unter dem Azimuthe $2i$ polarisirten, nahe gleich 0 wird. Die Wirkung eines sehr dünnen Blättchens auf einen geradlinig polarisirten Strahl besteht also einzig darin, die Polarisationsebene zu drehen. Das Rotationsvermögen ist $\frac{2k}{1 + k^2}$, also am grössten für $k = 1$.

442. Wirkung zahlreicher, unregelmässig orientirter Krystallblättchen.

Wir wollen nun den Fall betrachten, wo ein geradlinig polarisirter Strahl durch eine grosse Zahl activer Blättchen geht. Wir setzen voraus, dass die Blättchen gleich dick sind und dass ihre Krystallachsen gegen den einfallenden Strahl gleich geneigt sind, dass hingegen ihre Hauptschnitte alle möglichen Lagen haben. Sei n die Zahl der Blättchen, i_1 der Winkel des Hauptschnittes des ersten Blättchens mit der ursprünglichen Polarisationsebene, i_2 der Winkel des Hauptschnittes des zweiten Blättchens mit jenem des ersten, i_3 der Winkel des Hauptschnittes des dritten Blättchens mit jenem des zweiten, u. s. f. bis i_n, und mögen alle Winkel nach rechts gezählt werden.

Indem der Strahl durch das erste Blättchen geht, theilt er sich, wie wir (341) gesehen haben, in zwei geradlinig polarisirte Strahlen, von welchen der eine im Azimuthe $2\,i$, der andere im Azimuthe ϱ polarisirt ist. Bezeichnet man durch b^2 die Intensität des ersten dieser beiden Strahlen, und durch a^2 jene des zweiten, so hat man:

$$b = \frac{1 - k^2}{1 + k^2} \sin \frac{\delta - \gamma}{2}$$

$$a = \frac{1}{1 + k^2} \sqrt{(1 + k^2) \cos^2 \frac{\delta - \gamma}{2} + 4\,k^2 \sin^2 \frac{\delta - \gamma}{2}}.$$

Beim Durchgange durch das zweite Blättchen theilt sich jeder dieser beiden Strahlen neuerdings, so dass vier Strahlen entstehen. Beim Austritte aus dem dritten Blättchen hat man acht Stralen, und im Allgemeinen beim Austritte aus dem p ten Blättchen 2^p Strahlen, und beim Austritte aus dem ganzen Systeme 2^n Strahlen.

Von diesen 2^n Strahlen betrachten wir zunächst jenen, welcher in allen Blättchen die dem Buchstaben a entsprechende Modification erfahren hat. Die Polarisationsebene dieses Strahles ist um $n\,\varrho$ gedreht, seine Amplitude ist a^n und seine Phase

$$\varphi - n\,\frac{\delta + \gamma}{2}.$$

Sodann giebt es Strahlen, welche die Modification a in $n - 1$ Blättchen erfahren haben und in einem einzigen Blättchen die Modification b, d. i. den Durchgang unter dem Azimuthe $2\,i$. Die Amplitude dieser Strahlen ist $a^{n-1}\,b$, und da die Modification b in jedem der n Blättchen eintreten kann, giebt es n solche Strahlen.

Ebenso kann die Modification b zweimal und die Modification a $n - 2$ mal eintreten. Die Zahl solcher Strahlen ist gleich der Zahl der

Combinationen der zweiten Classe von n Elementen, also gleich $\frac{n(n-1)}{1.2}$.

Im Allgemeinen wird ein Strahl $n - q$ mal die Rotation ϱ, und q mal die Rotation $2i$ erfahren können. Ein solcher Strahl wird die Amplitude $a^{n-q} b^q$ haben und es wird

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{1.2.3\ldots q}$$

solcher Strahlen geben.

Dies kurz wiederholt:

Es giebt

	von der Amplitude	und Phase
1 Strahl	a^n	$\varphi - n\frac{\delta+\gamma}{2}$
$\frac{n}{1}$ Strahlen	$a^{n-1}b$	$\varphi - (n-1)\frac{\delta+\gamma}{2} - \frac{\delta+\gamma}{2} - \frac{\pi}{2}$
. . . .	. . . .	. . . .
. . . .	. . . .	. . . .
$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-q+1)}{1.2.3\ldots q}$	$a^{n-q}b^q$	$\varphi - n\frac{\delta+\gamma}{2} - q\frac{\pi}{2}$
. . . .	. . . .	. . . .
. . . .	. . . .	. . . .
$\frac{n}{1}$	ab^{n-1}	$\varphi - n\frac{\delta+\gamma}{2} - (n-1)\frac{\pi}{2}$
1 Strahl	b^n	$\varphi - n\frac{\delta+\gamma}{2} - n\frac{\pi}{2}$.

Jene Strahlen, welche die Amplitude $a^{n-1}b$ haben, sind sämmtlich von gleicher Phase, allein das Polarisationsazimuth ändert sich von einem dieser Strahlen zum anderen. Ein Strahl, welcher zuerst durch p Blättchen unter der Modification a gegangen ist, hat das Polarisationsazimuth $p\varrho$, und da der Hauptschnitt des $(p+1)$ten Blättchens mit der ursprünglichen Polarisationsebene den Winkel

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_{p+1}$$

bildet, da ferner der Winkel dieses Hauptschnittes mit der Polarisationsebene des hindurchgehenden Strahles gleich

$$(i_1 + i_2 + \cdots + i_{p+1}) - p\varrho$$

ist, und der Strahl in diesem Blättchen die Modification b, also eine Drehung der Polarisationsebene gleich

$$2(i_1 + i_2 + \cdots + i_{p+1}) - 2p\varrho$$

erfährt, so ist das Azimuth des Strahles beim Austritte aus dem $p+1$ten Blättchen:

$$2\sum_1^{p+1}(i) - 2p\varrho + p\varrho = 2\sum_1^{p+1}(i) - p\varrho,$$

wenn

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_{p+1} = \sum_1^{p+1}(i)$$

gesetzt wird. Indem der Strahl durch die $n - (p + 1)$ übrigen Blättchen geht, erfährt er neuerdings Modificationen a, d. i. eine Drehung um

$$[n - (p + 1)]\varrho.$$

Das Azimuth der Polarisationsebene des Strahles beim Austritte aus dem Systeme ist also:

$$2\sum_1^{p+1}(i) + [n - (2p + 1)]\varrho.$$

Da p alle Werthe zwischen 1 und n annehmen kann, kann auch der letzte Ausdruck n verschiedene Werthe annehmen, und das zweite Glied liegt stets zwischen $(n - 1)\varrho$ und $-(n - 1)\varrho$.

Aehnlich verhält es sich mit der zweiten Gruppe von Strahlen, deren Zahl $\frac{n(n-1)}{1.2}$, deren gemeinschaftliche Amplitude $a^{n-2}b^2$, und deren gemeinsame Phase $\varphi - n\frac{\delta + \gamma}{2} - \frac{2\pi}{2}$ ist. Auch hier ist das Azimuth variabel von einem Strahle zum anderen.

Dies vorausgesetzt, bemerken wir, dass der Strahl, welcher in allen Blättchen die Modification a erfahren hat, und dessen Intensität a^n ist, bei seinem Austritte unter dem Azimuthe $n\varrho$ polarisirt ist. Es wird sich nun darum handeln, zu zeigen, dass dieser Strahl der einzige ist, welcher beim Austritte eine merkliche Intensität hat, sofern nur die Zahl n der Blättchen sehr gross ist.

Zu diesem Zwecke zerlegen wir die Vibrationsbewegungen sämmtlicher Strahlen parallel und senkrecht zum Azimuthe $n\varrho$. Senkrecht zu diesem Azimuth haben wir zunächst die ganze Bewegung

$$a^n \sin\left(\varphi - n\frac{\delta + \gamma}{2}\right);$$

sodann eine grosse Zahl anderer Bewegungen, welche dadurch erhalten werden, dass man die den einzelnen Strahlen entsprechenden Bewegungen mit gewissen Cosinus multiplicirt, deren Werthe zwischen -1 und $+1$ liegen. Alle diese Bewegungen haben Phasen, welche von einer Gruppe zur anderen um $\frac{\pi}{2}$ variiren. Die Summe ihrer Projectionen wird ausserordentlich vergrössert, wenn man die Phasen als gleich annimmt und sämmtliche Cosinus durch die Einheit ersetzt. Da man n Strahlen von der Amplitude $a^{n-1}b$ hat, $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Strahlen von der Amplitude $a^{n-2}b^2$, u. s. f., so erhält man, wenn man in der That sämmtliche Phasen als unter einander gleich und sämmtliche Cosinus als der Einheit gleich annimmt, für die resultirende Amplitude:

$$n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 + \cdots$$

oder nach dem Binomialsatze:

$$(a + b)^n - a^n.$$

Wir wiederholen: Die Bewegungscomposante senkrecht zum Azimuthe $n \varrho$ ist gegeben als Summe zweier Glieder, von welchen das erste

$$a^n \sin\left(\varphi - n \frac{\delta + \gamma}{2}\right)$$

ist, während das zweite Glied sehr klein ist im Vergleiche mit

$$(a + b)^n - a^n.$$

Wenn wir also zeigen werden, dass für ein unendlich grosses n die Grösse $(a + b)^n - a^n$ sich einer endlichen Grenze, und a^n sich der Einheit nähert, so werden wir gezeigt haben, dass für ein sehr grosses n die Intensität des im Azimuthe $n \varrho$ polarisirten Strahles nahe gleich 1 ist, und dass es ausserdem keine merkliche Bewegung giebt.

Suchen wir zunächst die Grenze von a^n für ein unendlich wachsendes n. Man hat:

$$a = \frac{1}{1 + k^2} \sqrt{(1 + k^2) \cos^2 \frac{\delta - \gamma}{2} + 4 k^2 \sin^2 \frac{\delta - \gamma}{2}}$$

und

$$a^2 = \frac{1}{(1 + k^2)^2} \left[(1 + k^2)^2 \cos^2 \frac{\delta - \gamma}{2} + 4 k^2 \sin^2 \frac{\delta - \gamma}{2}\right],$$

und, wenn $1 - \sin^2 \frac{\delta - \gamma}{2}$ für $\cos^2 \frac{\delta - \gamma}{2}$ gesetzt wird,

$$a^2 = 1 - \frac{(1 - k^2)^2}{(1 + k^2)^2} \sin^2 \frac{\delta - \gamma}{2}.$$

Da andererseits k zwischen 0 und 1 liegt, hat man

$$0 < \frac{(1 - k^2)^2}{(1 + k^2)^2} < 1$$

und folglich

$$a^2 < 1.$$

Erheben wir den für a^2 gefundenen Ausdruck zur $n$ten Potenz, so ergiebt sich

$$a^{2n} = \left(1 - \frac{(1 - k^2)^2}{(1 + k^2)^2} \sin^2 \frac{\delta - \gamma}{2}\right)^n.$$

Ersetzen wir den Sinus durch den Bogen, so verkleinert sich das Resultat:

$$a^{2n} > \left[1 - \frac{(1 - k^2)^2}{(1 + k^2)^2} \left(\frac{\delta - \gamma}{2}\right)^2\right]^n.$$

Aendern wir hingegen das Zeichen in der Klammer, so vergrössert sich das Resultat:

$$a^{2n} < \left[1 + \frac{(1-k^2)^2}{(1+k^2)^2}\left(\frac{\delta-\gamma}{2}\right)^2\right]^n.$$

Wir setzen zwar n als sehr gross voraus; gleichwohl müssen wir den gesammten Gang als endlich annehmen, und können setzen:

$$n(\delta - \gamma) = \theta,$$

wo θ eine endliche Grösse ist. Setzen wir für $\delta - \gamma$ seinen Werth $\frac{\theta}{n}$, so ergiebt sich

$$a^{2n} > \left[1 - \frac{(1-k^2)^2}{(1+k^2)^2}\frac{\theta^2}{4n^2}\right]^n$$

$$a^{2n} < \left[1 + \frac{(1-k^2)^2}{(1+k^2)^2}\frac{\theta^2}{4n^2}\right]^n,$$

oder, wenn

$$\frac{(1-k^2)^2}{(1+k^2)^2}\cdot\frac{\theta^2}{4} = h$$

gesetzt wird,

$$a^{2n} > \left(1 - \frac{h}{n^2}\right)^n$$

$$a^{2n} > \left(1 + \frac{h}{n^2}\right)^n.$$

Entwickeln wir diese beiden Ausdrücke in die Binomialreihe, so erhalten wir eine sehr grosse, doch endliche Zahl Glieder. Es ergiebt sich:

$$a^{2n} > 1 - n\frac{h}{n^2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{h^2}{n^4} - \cdots$$

$$a^{2n} < 1 + n\frac{h}{n^2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{h^2}{n^4} + \cdots$$

Nimmt man in der ersten dieser beiden Ungleichungen die positiven Glieder negativ, so besteht die Ungleichung *a fortiori* und man hat

$$a^{2n} > 1 - n\frac{h}{n^2} - \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{h^2}{n^4} - \cdots$$

$$a^{2n} < 1 + n\frac{h}{n^2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{h^2}{n^4} + \cdots$$

Die Ungleichungen werden bestehen, wenn man alle Factoren $\frac{n}{1}$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-2}{3}$, etc. durch den grösseren Factor n ersetzt, wodurch man erhält:

$$a^{2n} > 1 - n\frac{h}{n^2} - n^2\frac{h^2}{n^4} - n^3\frac{h^3}{n^6} - \cdots$$

$$a^{2n} < 1 + n\frac{h}{n^2} + n^2\frac{h^2}{n^4} + n^3\frac{h^3}{n^6} + \cdots$$

oder

$$a^{2n} > 1 - \frac{h}{n} - \frac{h^2}{n^2} - \frac{h^3}{n^3} - \cdots$$

$$a^{2n} < 1 + \frac{h}{n} + \frac{h^2}{n^2} + \frac{h^3}{n^3} + \cdots$$

Wird n unendlich gross, so sieht man, dass die Reihe, welche in diesen beiden Ungleichungen zur Einheit zu addiren oder von ihr zu subtrahiren ist, sich der Grenze

$$\frac{h}{n}\left(1 + \frac{h}{n} + \frac{h^2}{n^2} + \cdots\right) = \frac{h}{n}\,\frac{1}{1 + \frac{h}{n}}$$

nähert, und diese Grenze ist 0 für $n = \infty$.

Da die beiden Grenzen von a^{2n} gleich 1 sind, sind auch a^{2n} und a^n der Einheit gleich.

Es bleibt übrig, zu zeigen, dass die Grösse $(a + b)^n - a^n$ bei unendlich wachsendem n endlich bleibt. Diese Grösse ist kleiner als

$$(1 + b)^n - a^n,$$

und die Grenze dieser letzteren Grösse ist

$$(1 + b)^n - 1.$$

Nun ist

$$1 + b = 1 + \frac{1 - k^2}{1 + k^2} \sin \frac{\delta - \gamma}{2};$$

die gesuchte Grenze ist demnach kleiner als

$$\left(1 + \frac{1 - k^2}{1 + k^2}\,\frac{\theta}{2n}\right)^n - 1$$

oder, wenn

$$\frac{1 - k^2}{1 + k^2}\,\frac{\theta}{2} = g$$

gesetzt wird, kleiner als

$$\left(1 + \frac{g}{n}\right)^n - 1.$$

Nun nähert sich $\left(1 + \frac{g}{n}\right)^n$ bei unendlich wachsendem n der Grenze e^g. Demnach ist die Grenze von $(a + b)^n - a^n$ kleiner als $e^g - 1$, also endlich.

Wir sehen: Geht ein geradlinig polarisirter Strahl durch ein System von n dünnen, mit Rotationsvermögen begabten Blättchen, sind die

Blättchen sämmtlich gleich dick und sehr gross an Zahl, sind ferner sämmtliche Achsen gegen den einfallenden Strahl gleich geneigt, während die Hauptschnitte beliebig orientirt sind, so reducirt sich die Wirkung dieses Systems darauf, die Polarisationsebene um den Winkel $n\varrho$ zu drehen.

443. Constitution flüssiger activer Substanzen.

Bei den Flüssigkeiten schreibt man die drehende Wirkung dem Bau der Molecüle zu. Nach Pasteur[1]) sind die Molecüle einzutheilen in solche, welche einen symmetrischen Bau besitzen, und solche von asymmetrischem Bau. Die ersteren sind überdeckbar mit ihrem Spiegelbilde, die letzteren nicht. Zu den ersteren Formen gehört die gerade Treppe, der Würfel, zu den letzteren die Wendeltreppe, die Schraube, das unregelmässige Tetraeder. Die asymmetrischen Molecüle sollen die optische Activität hervorbringen, und zwar in einem oder dem anderen Sinne, je nach dem Sinne, in welchem die Atome in den Molecülen angeordnet sind.

Als Beispiel diene die Weinsäure. Es giebt eine Rechtsweinsäure, welche nach rechts dreht, und eine Linksweinsäure, welche nach links dreht. Nach Pasteur nimmt man in der ersteren eine rechts-, in der letzteren eine gleich stark nach links geschraubte Atomgruppirung an. Man erhält aber Rechts- und Linksweinsäure durch Zerspaltung der inactiven Traubensäure[2]), deren Inactivität demnach daher rührt, dass sie eine Verbindung theils rechts-, theils linksdrehender Molecüle ist. Die Natriumammoniumsalze der beiden Säuren drehen ebenfalls nach rechts und nach links und unterscheiden sich durch das Vorkommen von rechts- und linkshemiedrischen Flächen.

Analoge optische Modificationen treten auch bei anderen Substanzen auf.

Was die Abhängigkeit der optischen Activität von der chemischen Constitution anlangt, so ist zunächst von Hoppe-Seyler[3]), sowie von E. Mulder[4]) auf Grund der Erscheinung, dass das Drehungsvermögen natürlicher organischer Substanzen sich bis zu einem gewissen Grade in ihre Derivate fortpflanzt, die Ansicht geäussert worden, dass die Activität nicht von der Gruppirung sämmtlicher Atome im Molecül, sondern nur von einer bestimmten Anzahl derselben herrühre. Ferner haben Le Bel[5]) und Van't Hoff[6]) eine Hypothese aufgestellt, welche das Drehungsvermögen direct mit der Constitutionsformel in Verbindung setzt. Wenn

[1]) *Recherches sur la dissymétrie moléculaire des produits organiques naturels. Leçons de chimie professées en* 1860, Paris 1861. — [2]) Pasteur, *Ann. chim. phys.* (3) XXIV, XXVIII, XXXVIII. — [3]) Journ. f. prakt. Chem. LXXXIX. — [4]) Zeitschr. f. Chem. 1868. — [5]) *Bull. soc. chim.* (2) XXII, 1874. — [6]) Ibid. (2) XXIII, 1875.

ein Kohlenstoffatom mit vier unter sich verschiedenen Radicalen verbunden ist, soll ein Molecül von asymmetrischer Form entstehen und als solches Drehungsvermögen zeigen. Man gelangt in der That zu dem Ergebnisse, dass bis jetzt kein Fall nachweisbar ist, welcher den folgenden Sätzen widerspricht:

1. Die activen Substanzen enthalten stets ein oder mehrere asymmetrische Kohlenstoffatome.

2. Körper, welchen asymmetrische Kohlenstoffatome fehlen, zeigen kein Drehvermögen.

Ausführliches über die Constitution flüssiger activer Substanzen, die Abhängigkeit der optischen Activität von der chemischen Constitution, die künstliche Darstellung activer Substanzen und das optische Verhalten der Derivate activer Körper findet man in dem schönen Werkchen: Das optische Drehvermögen organischer Substanzen etc., von Dr. H. Landolt, Braunschweig 1879.

Bibliographie.

Erscheinungen der Rotationspolarisation.

1811. Arago, Sur une modification remarquable qu'éprouvent les rayons lumineux dans leur passage à travers certains corps diaphanes, *Mém. de la prem. classe de l'Inst.*, XII, 93. — *OEuvres complètes,* X, 36.

1812. Arago, Mémoire sur plusieurs nouveaux phénomènes d'optique, *OEuvres complètes,* X, 35.

1813. Biot, Mémoire sur un nouveau genre d'oscillations que les molécules de la lumière éprouvent en traversant certains cristaux, *Mém. de la prem. classe de l'Inst.*, XIII, 218.

1815. Biot, Découverte de la polarisation rotatoire dans les liquides, *Bullet. de la Soc. Philomath.*, décembre 1815, 190.

1815. Biot, Comparaison du sucre et de la gomme arabique dans leur action sur la lumière polarisée, *Bull. de la Soc. Philomath.*, 1816. — *Ann. de chim. et de phys.*, (2), IV, 90.

1818. Biot, Mémoire sur les rotations que certaines substances impriment aux axes de polarisation des rayons lumineux, *Mém. de l'Acad. des sc.*, II, 41.

1818. Fresnel, Mémoire sur les couleurs développées, dans des fluides homogénes par la lumière polarisée, *Mém. de l'Acad. des sc.*, XX, 163. — *OEuvres complètes,* I, 655. — *Ann. de chim. et de phys.* (3), XVII, 172.

1821. W. Herschel, On the Rotations Imprimed by Plates of Rock Crystal on the Planes of Polarisation of the Rays of Light as Connected with Certain Particularities in its Crystallization, *Cambr. Trans.*, I, 43.

1821. **Brewster**, On Circular Polarization as Exhibited in the Optical Structure of the Amethyst, *Edinb. Trans.* IX, 139.

1822. **Fresnel**, Mémoire sur la double réfraction que les rayons lumineux éprouvent en traversant les aiguilles de cristal de roche suivant des directions parallèles à l'axe, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXVIII, 147. — *OEuvres complètes*, I, 731.

1831. **Airy**, On the Nature of the two Rays Produced by the Double Refraction of Quartz, *Cambr. Trans.*, IV, part I, 79, 198.

1832. **Biot**, Mémoire sur la polarisation circulaire et ses applications à la chimie organique, *Mém. de l'Acad. des sc.* XIII, 39.

1833. **Biot**, Sur un caractère optique à l'aide duquel on reconnaît immédiatement les sucs végétaux qui peuvent donner un sucre analogue au sucre de canne de ceux qui ne peuvent donner que du sucre analogue au sucre de raisin, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), LII, 58.

1835. **Biot**, Sur le pouvoir rotatoire des acides tartrovinique et tartrométhylique, *C. R.*, II, 616.

1835. **Biot**, Mémoire sur les propriétés moléculaires de l'acide tartrique, *C. R.*, I, 457. — *Inst.*, III, 396.

1835. **Biot**, Sur une relation très-simple qui existe, dans les dissolutions d'acide tartrique, entre leurs proportions constituantes et leur densité *C. R.*, I, 349, 365. — *Inst.*, III, 372.

1836. **Biot**, Méthodes mathématiques pour discerner les mélanges et les combinaisons chimiques définies ou non définies qui agissent sur la lumière, *Mém. de l'Acad. des sc.*, XV, 93. — *C. R.*, I, 66, 177, 457.

1836. **Biot**, Examen comparatif du sucre de canne et du sucre de betterave soumis aux expériences de la polarisation circulaire, *C. R.*, II, 384.

1837. **Biot**, Sur le pouvoir rotatoire de l'acide tartrique et de ses combinaisons, *C. R.*, V, 668, 767, 856. — *Inst.*, V, 390.

1837. **Biot**, Mémoire sur plusieurs points fondamentaux de mécanique chimique, *Mém. de l'Acad. des sc.* XVI, 229.

1837. **Babinet**, Mémoire sur la double réfraction circulaire, *C. R.*, IV, 900. — *Inst.*, V, 249.

1837. **Biot**, Sur le pouvoir rotatoire de l'acide tartrique et de ses combinaisons, *C. R.*, V, 668, 767, 856. — *Inst.*, V, 390.

1837. **Biot**, Observations sur la différence physique qui existe entre l'amidon et la dextrine, *C. R.*, V, 905. — *Inst.*, VI, 26, 33.

1838. **Biot**, Sur l'emploi de la lumière polarisée pour manifester les différences des combinaisons isomériques, *C. R.*, VI, 663. — *Ann. de chim. et de phys.*, (2), LXIX, 22.

1838. **Biot**, Propriétés optiques des combinaisons ternaires formées par l'acide tartrique, l'eau et les terres, *C. R.*, VI, 153.

1839. **Biot**, Sur la cause physique qui produit le pouvoir rotatoire dans le quartz cristallisé, *C. R.*, VIII, 683. — *Inst.*, VII, 453.

1839. **Babinet**, Sur une propriété optique de la poussière de cristal de roche, *C. R.*, VIII, 762.

1839. **Deville**, Sur le pouvoir rotatoire du produit résultant de l'action du chlore sur l'essence de térébentine, *C. R.*, IX, 823. — *Inst.*, VII, 453.

1839. **Biot**, Sur l'importance de l'étude de certains produits chimiques à l'aide des méthodes optiques, *C. R.*, IX, 824.

1840. **Biot**, Expériences sur le pouvoir rotatoire du camphre liquide de Bornéo, *C. R.*, IX, 824.

1840. **Biot**, Sur la construction et l'usage des appareils destinés à éprouver le pouvoir rotatoire des liquides, *C. R.*, XI, 413. — *Ann. de chim. et de phys.*, (2), LXXV. — *Inst.*, VIII, 301.

1840. Biot, Mémoire sur la chimie atomique, *C. R.*, XI, 603, 620. — *Inst.*, VIII, 66, 365.

1842. Biot, Sur un point de l'histoire de l'optique relativ aux phénomènes de polarisation, *C. R.*, XV, 962. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LIX, 326.

1842. Biot, Sur l'emploi des propriétés optiques pour l'analyse quantitative des solutions qui contiennent des substances douées du pouvoir rotatoire, *C. R.*, XV, 619. — *Inst.*, X, 357.

1842. Powell, Appareil simplifié pour appliquer la polarisation circulaire aux recherches chimiques, *12th Rep. of Brit. Assoc.* — *Inst.*, X, 410.

1843. Biot, Sur l'identité des modifications imprimées par les corps fluides à la lumière polarisée dans l'état de repos ou de mouvement, *C. R.*, XVII, 1209.

1843. Biot, Indications fournies par les phénomènes de la polarisation circulaire et parti qu'on en peut tirer relativement à la composition de certaines solutions, *C. R.*, XVII, 519, 685.

1843. Earnshaw, Sur une nouvelle expérience d'optique, *Phil. Mag.*, (3), XXII, 92.

1843. Baden-Powell, Expérience de polarisation rotatoire montrant qu'un rayon polarisé circulairement et se réfléchissant sous l'incidence normale se polarise circulairement en sens contraire, *Phil. Mag.*, (3), XXII, 262.

1843. Biot, Sur le pouvoir rotatoire d'une matière sucrée recueillie sur les feuilles du tilleul, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), VII, 351.

1843. Bouchardat, Sur les propriétés optiques des alcalis végétaux, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), IX, 213.

1843. Baden-Powell, An Apparatus for the Circular Polarization of Light in Liquids, *Phil. Mag.*, (3), XXII, 241.

1843. Biot, Sur l'application des propriétés optiques à l'analyse quantitative des mélanges dans lesquels le sucre de canne cristallisé est associé à des sucres incristallisables, *C. R.*, XVI, 619.

1843. Clerget, Sur un procédé expéditif pour obtenir, à l'aide de la polarisation de la lumière l'analyse quantitative et qualitative des solutions sucrées, *C. R.*, XVI, 1000.

1844. Bouchardat, Sur les propriétés optiques de la salicine et de la phloridzine, *C. R.*, XVIII, 298.

1844. Bouchardat, Sur les propriétés optiques de l'amygdaline, de l'acide amygdalique et des produits résultant de l'action des bases sur la salicine, *C. R.*, XIX, 1174. — *Inst.*, XI, 398.

1844. Biot, Sur l'emploi de la lumière polarisée pour étudier diverses questions de mécanique chimique, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), X, 5, 175, 307, 385: XI, 82.

1845. Biot, Sur les phénomènes optiques opérés dans le cristal de roche, *C. R.*, XXI, 643.

1845. Biot, Sur les propriétés optiques des appareils à deux rotations, *C. R.*, XXI, 453.

1845. Soleil, Nouvel appareil propre à la mesure des déviations dans les expériences de polarisation rotatoire, *C. R.*, XXI, 426.

1845. Biot, Sur les propriétés optiques de l'essence de térébenthine, *C. R.*, XXI, 1.

1845. Biot, Sur une modification de l'appareil de polarisation employé en Allemagne pour des usages pratiques, *C. R.*, XXI, 539. — *Inst.*, X, 317.

1845. Biot, *Instructions pratiques sur l'observation et la mesure des propriétés qu'on apelle rotatoires*, Paris.

1845. **Soleil**, Note sur un moyen de faciliter les expériences de polarisation rotatoire et présentation d'un appareil imaginé dans ce dessein, *C. R.*, XX, 1805. — *Inst.*, XIII, 214.

1845. **Biot**, Sur les moyens d'observation qu'on peut employer dans la mesure des pouvoirs rotatoires, *C. R.*, XX, 1747. — *Inst.*, XIII, 224.

1845. **Biot**, Observations sur la note de M. Soleil, *C. R.*, XX, 1811. — *Inst.*, XIII, 237.

1845. **Soleil**, Notes sur la structure et le pouvoir rotatoire du quartz cristallisé, *C. R.*, XX, 435.

1845. **Biot**, Remarques à l'occasion d'une communication de M. Ebelmen sur une production de silice diaphane, *C. R.*, XXI, 503.

1846. **Broch**, Détermination du pouvoir rotatoire moléculaire du quartz par une méthode applicable à tous les phénomènes chromatiques, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXIV, 119. — *Répert. de phys.*, VII, 113.

1846. **Biot**, Sur la manière de faire des mélanges liquides exerçant un pouvoir rotatoire d'intensité désignée, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XVIII, 81.

1846. **Clerget**, Note relative au moyen de simplifier l'analyse des sucres et des liqueurs sucrées par l'action de ces substances sur la lumière polarisée, *C. R.*, XXII, 1138.

1846. **Clerget**, Analyse des sucres, *C. R.*, XXIII, 256. — *Inst.*, XIV, 262. — *Bullet. de la Soc. d'encourag.*, octobre 1846.

1846. **Dubrunfaut**, Note sur quelques phénomènes rotatoires et quelques propriétés des sucres, *C. R.*, XXIII, 38. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XVIII, 99.

1846. **Biot**, Sur les phénomènes rotatoires opérés par le cristal de roche, *C. R.*, XXII, 92.

1847. **Soleil**, Sur un perfectionnement apporté au pointage du saccharimètre, *C. R.*, XXIV, 973.

1847. **Laurent**, Action des alcalis chlorés sur la lumière polarisée, *C. R.*, XXIV, 219.

1847. **Bouchardat**, Des propriétés optiques de l'inuline, *C. R.*, XXV. 274.

1847. **Dubrunfaut**, Note sur le glucose, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXI, 178.

1848. **Babinet**, Rapport sur le saccharimètre de M. Soleil, *C. R.*, XXVI, 169. — *Inst.*, XVI, 45, 55.

1848. **Babinet**, Rapport sur les recherches saccharimétriques de M. Clerget, *C. R.*, XXVI, 240.

1848. **Botzenhart**, Ueber Vergrösserung der durch Flüssigkeiten bewirkten Drehung der Polarisationsebene, *Berichte der Freunde der Naturwissenschaft in Wien*, II, 173.

1848. **Lespiau**, Dosage du sucre dans l'urine des diabétiques par le saccharimètre de M. Soleil, *C. R.*, XXVI, 305.

1848. **Biot**, Sur l'importance de l'examen optique des urines pour reconnaître à temps l'existence d'une affection diabétique, *C. R.*, XXVII, 617.

1849. **Clerget**, Analyse des substances saccharifères au moyen des propriétés optiques de leurs dissolutions et évaluation de leur rendement industriel, *Ann. de chim et de phys.*, (3), XXVI, 175. — *Inst.*, XVII, 66.

1849. **Bouchardat**, Sur les propriétés optiques de l'acide camphorique, *C. R.*, XXVIII, 319. — *Inst.*, XVII, 73.

1849. **Becquerel**, Recherches sur le pouvoir rotatoire moléculaire de l'albumine du sang et des liquides organiques, *C. R.*, XXIX, 625.

1849. **Biot**, Sur la manifestation du pouvoir rotatoire moléculaire dans les corps solides, *C. R.*, XXIX, 681. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXVIII, 215, 351. — *Inst.*, XVII, 393.

1850. Biot, Recherches expérimentales ayant pour but de savoir si l'eau, près de son maximum de densité ou près de son point de congélation, mais encore liquide, exerce quelque action sur la lumière polarisée, *C. R.*, XXX, 281.

1850. Dulong et Soleil, Note sur un nouveau compensateur pour le saccharimètre, *C. R.*, XXXI, 248.

1850. Biot, Détermination générale des lois de variation du pouvoir rotatoire dans les systèmes liquides où un corps doué de ce pouvoir se trouve en présence d'un ou de deux corps inactifs qui se combinent avec lui sans le décomposer, *C. R.*, XXXI, 101. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXIX, 35, 341.

1850. Salm-Hertzmar, Ueber das Verhalten einiger Krystalle gegen polarisirtes Licht, *Pogg. Ann.*, LXXXIV, 515.

1850. Fremy, Nouvelles observations sur les transformations que la chaleur fait éprouver aux acides tartrique et paratartrique, *C. R.*, XXXI, 200.

1850. Wilhelmy, Ueber das Gesetz, nach welchem die Einwirkung der Säuren auf den Rohrzucker stattfindet, *Pogg. Ann.*, LXXXI, 413, 499.

1850. Wilhelmy, Ueber das moleculare Drehungsvermögen der Substanzen, *Pogg. Ann.*, LXXXI, 527.

1851. Clerget, Nouvelles observations sur le saccharomètre optique, *C. R.*, XXXIII, 32.

1851. Mitscherlich, Anleitung zum Gebrauch des Polarisationsapparates für zuckerhaltige Flüssigkeiten, *Chem. Centralbl.*, 1851, p. 881.

1851. Biot, Remarques à l'occasion d'une note de M. Fremy, *C. R.*, XXXII, 3.

1852. Biot, Expériences ayant pour but d'établir que les substances douées de pouvoir rotatoire, lorsqu'elles sont en dissolution dans des milieux inactifs qui ne les attaquent pas chimiquement, contractent avec eux une combinaison passagère sans proportions fixes, *C. R.*, XXXV, 233. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXVI, 257.

1852. Biot, Sur l'application de la théorie de l'achromatisme à la compensation des mouvements angulaires que le pouvoir rotatoire imprime aux plans de polarisation des rayons lumineux d'inégale réfrangibilité, *C. R.*, XXXV, 613. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXVI, 405. — *Inst.*, XX, 349, 361.

1852. Pelouze, Sur le pouvoir rotatoire de la sorbine, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXV, 229. — *C. R.*, XXXIV, 377. — *Inst.*, XX, 81.

1852. Biot, Remarques sur la communication de M. Piria. Recherches sur la populine, *C. R.*, XXXIV, 149. — *Inst.*, XX, 33.

1852. Biot et Pasteur, Observations optiques sur la populine et la salicine artificielles, *C. R.*, XXXIV, 66. — *Inst.*, XX, 129.

1852. Billet, Sur les franges d'interférence qu'on peut obtenir par le concours des rayons polarisés circulairement, *Mém. de l'Acad. de Dijon.*

1853. A. Loër, Sur le pouvoir rotatoire de l'acide camphométhylique, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXVIII, 483.

1853. Bouchardat et Boudet, Sur le pouvoir rotatoire de la quinidine, de la codéine, de la papavérine et de la picrotoxine, *Journ. de Pharm.*, avril 1853.

1853. Berthelot, Action de la chaleur sur l'essence de térébenthine, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXIX, 5; XL, 5. — *C. R.*, XXXVI, 425. — *Inst.*, XXI, 82.

1853. Doyère et Poggiale, Note sur la présence, dans le lait, d'un principe albuminoïde déviant à gauche la lumière polarisée, *C. R.*, XXVI, 430. — *Cosmos*, II, 391.

1855. H. Soleil, *Note sur un moyen de reconnaître si les faces parallèles entre elles d'une plaque de cristal de roche sont parallèles à l'axe du cristal ou inclinées sur cet axe,* Paris.

1855. Béchamp, Note sur l'influence que l'eau pure et certaines dissolutions salines exercent sur le sucre de canne, *C. R.*, XL, 436. — *Inst.*, XXIII, 90.

1855. Pasteur, Mémoire sur l'alcool amylique, *C. R.*, XLI, 296. — *Inst.*, XXIII, 294.

1855. Berthelot, Sur quelques matières sucrées, méhtose, eucalyne, pinite, *C. R.*, XLI, 292. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XLVI, 66. — *Inst.*, XXIII, 306, 313.

1855. Guérard, Étalement des couleurs de la polarisation rotatoire, *Cosmos*, VI, 454.

1855. Lesting, Ueber die Zuckerbestimmung im diabetischen Harn auf optischem Wege, *Liebig's Ann.*, XCVI, 93.

1855. Rammelsberg, Beiträge zur näheren Kenntniss der rechten und linken Doppelsalze und der Traubensäure, *Pogg. Ann.*, XCVI, 28.

1856. Dubrunfaut, Sur la variation du pouvoir rotatoire du sucre de lait, *C. R.*, XLII, 228. — *Inst.*, XXIV, 61.

1856. Pasteur, Note sur le pouvoir rotatoire du sucre de lait, *C. R.*, XLII, 347. — *Inst.*, XXIV, 91.

1856. Béchamp, Sur la variation du pouvoir rotatoire du sucre de fécule, *C. R.*, XLII, 640, 896. — *Inst.*, XXIV, 161.

1856. Dubrunfaut, Sur la rotation variable du glucose mamelonné de raisin, *C. R.*, XLII, 739. — *Inst.*, XXIV, 161.

1856. Dubrunfaut, Sur le pouvoir rotatoire du sucre interverti, *C. R.*, XLII, 901. — *Inst.*, XXIV, 260.

1856. E. Robiquet, Note sur le diabétomètre, *C. R.*, XLIII, 920. — *Inst.*, XXIV, 393.

1856. E. Robiquet, *Instructions sur l'usage du diabétomètre,* Paris.

1856. Béchamp, Mémoire sur les produits de la transformation de la fécule et du ligneux sous l'influence des alcalis, du chlorure de zinc et des acides, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XLVIII, 458.

1856. De Senarmont, Note sur un moyen expérimental proposé par M. H. Soleil pour reconnaître si une plaque de cristal de roche est parallèle ou inclinée à l'axe, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XLVI, 89.

1856. Dubrunfaut, Note sur l'acide tartrique, *C. R.*, XLII, 112. — *Inst.*, XXIV, 52.

1856. Biot, Note sur l'emploi du mot *glucose*, *C. R.*, XLII, 351. — *Inst.*, XXIV, 92.

1856. Dubrunfaut, Note sur l'inuline, *C. R.*, XLII, 803.

1856. J. Jeanjean, Sur l'huile essentielle contenue dans l'alcool de garance, *C. R.*, XLII, 857. — *Inst.*, XXIV, 176.

1856. Biot, Remarques à l'occasion de cette communication, *C. R.*, XLII, 859. — *Inst.*, XXIV, 176.

1856. J. Jeanjean, Note sur le camphre de Bornéo retiré de l'alcool de garance, *C. R.*, XLIII, 103. — *Inst.*, XXIV, 260.

1856. Pohl, Ueber die Verwendbarkeit des Mitscherlich'schen Polarisationssaccharometers zu chemisch technischen Proben, *Wien. Ber.*, XXI, 492.

1857. Descloiseaux, Observations sur le pouvoir rotatoire des cristaux et des dissolutions de sulfate de strychine, *C. R.*, XLIV, 909. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LI, 364. — *Inst.*, XXV, 149.

1857. Mitscherlich, Ueber die Mycose, den Zucker des Mutterkorns, *Berl. Monatsber.*, 1857, p. 469. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LIII, 232. — *Inst.*, XXVI, 112.

1857. A. Würtz, Note sur l'acide caproïque, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LI, 358.
1858. Brewster, On the Use of Amethyst Plates in Experiments on the Polarization of Light, *28th Rep. of Brit. Assoc.*, 13. — *Inst.*, XXVI, 362.
1858. Arndtsen, Note sur le pouvoir rotatoire de divers liquides, *C. R.*, XLVII, 738. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LIV, 403.
1858. Berthelot, Sur le pouvoir rotatoire du camphre de Bornéo, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LVI, 84.
1858. Berthelot, Sur la tréholose, nouvelle espèce de sucre, *C. R.*, XLVI, 1276.
1858. Berthelot, Sur la mélézitose, nouvelle espèce de sucre, *C. R.*, XLVII, 224.
1859. Descloiseaux, Étude du camphre ordinaire, *C. R.*, XLVII, 1064. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LVI, 219.
1860. Biot, Introduction aux recherches de mécanique chimique dans lesquelles la lumière polarisée est employée auxiliairement comme réactif, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LIX, 206.
1860. H. W. Dowe, Eine Bemerkung über Flüssigkeiten, welche die Polarisationsebene des Lichtes drehen, *Berl. Monatsber.*, 1860, p. 292. — *Pogg. Ann.*, CX, 290.
1860. C. Stammer, Ueber den Einfluss des Kalkgehalts in Zuckerlösungen auf deren specifisches Gewicht und Polarisation, *Dingler's Journ.*, CLVI, 40.
1860. Biot, Appendice sur un point de l'histoire de l'optique relatif aux phénomènes de la polarisation rotatoire, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LIX, 326.
1860. Luboldt, Drehungsvermögen flüchtiger Oele, zusammengestellt nach den natürlichen Familien der Stammpflanzen, *Erdmann's Journ.*, LXXIX, 352.
1861. Buignet, Sur le pouvoir rotatoire de plusieurs substances employées en médecine, *C. R.*, LII, 1082. — *Journ. de Pharm.*, (3), XL, 252.
1861. H. Soleil, Note sur les déviations des plans de polarisation des couleurs résultantes dans une lame de quartz perpendiculaire à l'axe et traversée par la lumière blanche, *C. R.*, LIII, 640.
1861. Buignet, Recherches sur la matière sucrée contenue dans les fruits acides, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXI, 233.
1861. F. Mahla, A Note of the Power of Polarisation of American Oil of Turpentine, *Silliman's Journ*, XXXII, 107.
1862. Béchamp, Mémoire sur la xyloïdine et sur de nouveaux dérivés nitriques de la fécule, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXIV, 311.
1862. L. Corvisart, Observations sur le suc gastrique, les peptones, et leur action sur la lumière polarisée, *C. R.*, LV, 62.
1863. D. Jellett, On a New Optical Saccharometer, *Proceed. of Ir. Acad.*, VIII, 279.
1863. F. Hoppe, Ueber die Circumpolarisationsverhältnisse der Gallensäure und ihre Zersetzungsproducte, *Erdmann's Journ.*, LXXXIX, 257.
1864. Jodin, Sur les modifications du pouvoir rotatoire des sucres produites par des substances inactives, *C. R.*, LVIII, 613. — *Inst.*, XXXII, 114.
1864. Wild, Ueber ein neues Saccharometer, *Pogg. Ann.*, CXXII, 626. — *Ann. de chim. et de phys.*, (4), III, 501.
1864. Gernez, Sur le pouvoir rotatoire des liquides actifs et de leurs vapeurs, *C. R.*, LVIII, 1108. — *Ann. de l'Éc. Norm.*, I, 1.
1864. De Vry et Alluard, Du pouvoir rotatoire de la quinine, *C. R.*, XIX, 201.
1865. Stephan, Ueber die Farbenzerstreuung durch Drehung der Polarisationsebene in Zuckerlösungen, *Pogg. Ann.*, CXXVI, 658.

1865. H. Wild, Ueber ein neues Polaristrobometer und eine neue Bestimmung der Brechungsconstante des Zuckers, *Bern* 1865.

1865. C. Scheibler, Ueber das Wild'sche Saccharimeter, *Zeitschr. d. Ver. f. Rübenzuckerind. im Zollverein*, 1864.

1865. J. Stefan, Ueber die Farbenzerstreuung durch Drehung der Polarisationsebene in Zuckerlösungen, *Pogg. Ann.*, CXXVI.

1865. M. Tscherinoff, Ueber die Bestimmung des Harnzuckers aus der Drehung der Polarisationsebene, *Wien. Ber.*, LI.

1865. J. Mayer, Detection of the adulteration of essential oils with oils of turpentine by the saccherimeter, *Silliman Journ.*, (2), XXXIX.

1866. P. Desains, Recherches sur l'action rotatoire que le quartz exerce sur le plan de polarisation des rayons les moins réfrangibles, *C. R.*, LXII, 1277.

1866. J. Stefan, Ueber Interferenzversuche mit dem Soleil'schen Doppelquarz, *Wien. Ber.*, LIII.

1866. P. Desains, Untersuchung über die Drehwirkung, welche der Quarz auf die Polarisationsebene der weniger brechbaren Strahlen des Spectrums ausübt, *Pogg. Ann.*, CXXVIII.

1866. Jellet, On a fluid possessing opposite rotatory powers for rays at opposite euds of the spectrum, *The Athenaeum, J.*, London 1866.

1866. C. Scheibler, Ueber die Klärung der Zuckerlösungen zu Polarisationsversuchen, *Zeitschr. f. Chem.*, 1866.

1866. H. Bodenbender, Ueber den Einfluss der Erden auf das Rotationsvermögen des Rohrzuckers, *Zeitschr. f. Chem.*, 1866.

1866. H. Bodenbender, Ueber den Einfluss der Alkalien auf den Polarisationseffect des Rohrzuckers, *Zeitschr. f. Chem.*, 1866.

1866. C. Anders, Ueber die technische Bestimmung des Zuckers durch die Polarisationsmethode und deren Fehlerquellen, *Dingl. Journ.*, CLXXXII.

1867. Hoppe-Seyler, Sur le pouvoir rotatoire spécifique du sucre du raisin, *Zeitschr. f. Chem.*, 1867.

1867. De Vriy, Ueber das Drehungsvermögen einiger ätherischer Oele, *Erdmann's Journ.*, CI.

1867. Landolt, Bericht über die chemischen Analysen bei den auf Veranlassung des königlich preussischen Ministeriums für Handel etc. im Herbst 1866 zu Cöln angestellten Raffinirungsversuchen mit Rüben-Rohzucker, *Berlin* 1867.

1867. C. Scheibler, Die bedeutendsten Fehlerquellen bei der optischen Zuckerbestimmung und deren Beseitigung, *Zeitschr. f. Chem.*, X.

1867. Gernez, Scheidung rechts- und linksdrehender weinsaurer Salze, *Liebig's Ann.*, CXLIII.

1867. Dubrunfaut, Méthodes mélassimétriques et la saccharimétrie, *Mondes* (2), XV.

1867. Jelett, Nouvel instrument pour la mesure des pouvoirs rotatoires, *Bull. Soc. Chim.*, 1867.

1868. A. de la Rive, Untersuchungen über die magnetische Polarisationsdrehung, *Pogg. Ann.*, CXXXV. — *C. R.*, LXVI.

1868. A. de la Rive, Sur la cause à laquelle on peut attribuer la grandeur du pouvoir rotatoire magnétique de l'alcool thallique, *C. R.*, LXVII.

1868. E. Mulder, Das specifische Drehungsvermögen kohlenstoffhaltiger Verbindungen, *Zeitschr. f. Chem.*, (2, IV), XI.

1868. Scheibler, Ueber den Einfluss der Deckgläschen für Beobachtungsröhren bei der optischen Zuckerbestimmung, *Ber. deutsch. chem. Ges.*, I.

1868. Ditscheiner, Phénomène optique présenté par les réseaux, *Mondes* (2), XVIII.

1868. J. Duboscq, Appareil Noremberg-Wheatstone, *Mondes* (2), XVIII.

1869. E. Reusch, Untersuchungen über Glimmercombinationen, *Pogg. Ann.*, CXXXVII.

1869. H. Wild, Ueber die neue Gestalt meines Polaristrobometers, *Dingler's Journ.*, CXCIV.

1869. Maumené, Sur une erreur des évaluations saccharimé riques, *C. R.*, LXIX.

1869. E. Beblo, Einfluss der Alkalien auf das Polarisationsvermögen einiger Zuckerarten, *Progr. d. Görlitzer Realsch.*

1869. R. Lüdtke, Ueber den Einfluss mechanischer Veränderungen auf die magnetische Drehungsfähigkeit einiger Substanzen, *Pogg. Ann.*, CXXXVII.

1869. Dubrunfaut, Sur l'equivalent rotatoire du sucre de canne et de cristal de roche considéré romme base de saccharimetrie, *Monit. Scient.*

1869. Jellet, On a method by which the formation of certain definite chemical compounds may be opticalli etablished, *Rep. Brit. Assoc.*, 1869.

1870. V. v. Lang, Ueber die Lichtgeschwindigkeit im Quarz, *Wien. Ber.*, LX.

1870. Des Cloizeaux, Sur les propriétés optiques du benzile et de quelques corps de la famille du camphre, à l'état de cristaux et à l'état de dissolution, *Pogg. Ann.*, CXLI.

1870. De la Rive, Recherches sur la polarisation rotatoire magnétique des liquides, *Ann. de chim.*, (4), XXII.

1870. C. Tuchschmid, Einfluss der Temperatur auf das moleculare Drehungsvermögen einiger circularpolarisirender Substanzen, *Erdmann's Journ.*, (2), II.

1870. Maumené, Préparation de sucre optiquement neutre on agyre par voie aqueuse, *Mondes*, (2), XXIII.

1870. Maumené und Dubrunfaut, Ueber den Invertzucker, *Zeitschr. f. Chem.*, XXIII.

1870. Dubrunfaut, Note sur le sucre inverti, *C. R.*, LXIX.

1870. J. Apjohn, Neue Methode zur Analyse von Zuckern und Syrupen, *Dingl. Journ.*, CXCVI.

1870. C. Scheibler, Ueber Thonerdehydrat als neues Klärungsmittel für Zuckerlösungen behufs deren Polarisation, *Dingl. Journ.*, CXCVII.

1870. Dupré, Bestimmung dreier Arten Zucker in Lösung, *Dingl. Journ.*, CXCVI.

1870. C. Cramer, Untersuchung der Pflanzenzelle im polarisirten Lichte, *Wolf, Zeitschr.*, XIV.

1870. Weber u. Scheibler, Vorträge über Saccharimeter, *Verh. d. Ver. z. Bef. d. Gew. i. Pr.*

1870. E. Th. Chapmann, Note on some reactions of alcohols, *Journ. chem. Soc.*, (2), VIII.

1871. Croullebois, Recherches nouvelles sur la double réfraction elliptique du quartz, *C. R.*, LXXII.

1871. Jègorow, Ueber die Drehung der Polarisationsebene unter dem Einflusse von Elektromagneten, *Bull. d. St. Pétersb.*, XV.

1871. Gill, Ueber einige Verbindungen von Metallsalzen mit Rohrzucker, *Ber. d. chem. Ges.*, IV.

1871. O. Popp, Circularpolarisation des Ricinusöls, *Chem. Centralbl.*

1871. O. Hesse, Ueber die Anwendung der Polarisation zur Bestimmung des Werthes der Chinarinden, *Ber. d. chem. Ges.*, IV.

1871. J. De Vry, On the application of molecular rotation to the determination of the value of cinchona barks, *Journ. of chem. soc.*, (2), IX.

1871. De La Rive, Recherches sur la polarisation rotatoire magnétique des liquides, *Ann. de chim.*, (4), XXII.

1871. Villari, Sal tempo che impiega il fluita magnetizzarsi, smagnetizzarsi e far ruotare il piano di polarizzazione, *Rendic. Lomb.*, (2), III.

1872. V. D. Sande Backhuyzen, Zur Theorie des Polaristrobometers und des drehenden Nicols, *Pogg. Ann.*, CXLV.

1872. W. Spottiswoode, On optical phenomena produced by crystals submitted to circulary polarised light, *Phil. Mag.*, (4), XLIV.

1872. Bertrand, Becquerel, Fizeau, Rapport sur un mém. d. M. Croullebois rélativ à la double réfraction elliptique du quarz, *C. R.*, LXXIV.

1872. F. W. Krecke, Ueber die Beziehungen der Drehungsfähigkeiten organischer Körper, *Erdmann u. Kolbe, J.*, (2), V.

1872. F. W. Krecke, Influence de la température sur le pouvoir rotatoire de l'acide tartrique et des tartrates, *Inst.*

1872. H. Ritthausen, Ueber das Drehungsvermögen von Glutan- und Aepfelsäure, *Erdmann u. Kolbe, J.*, (2), V.

1872. Jungfleisch, Transformation réciproque des acides tartriques inactiv et racémique. Préparation de l'acide tartrique inactiv, *C. R.*, LXXV.

1872. P. Casamajor, On the purification of solutions for the optical saccharimeter, *Chem. News*, XXV.

1872. O'Sullivan, On the transformation-products of starch, *Journ. chem. soc.*, (2), X.

1872. O. H. Schiff, Das Drehungsvermögen des aus Cymol dargestellten Terpentinöls, *Ber. d. chem. Ges.*, V.

1872. C. Kohlrausch, Beitrag zur Erzielung übereinstimmender Untersuchungsresultate beim Rohrzuckerhandel, *Dingl. Journ.*, CCVI.

1872. Lecoq de Boisbaudran, Note sur quelques expériences encore inachevés relatives à la transformation réciproque des acides tartriques droit et gauche, *Bull. soc. chim.*, (2), XVIII.

1872. O. Kohlrausch, Ueber den Einfluss der schwefelsauren Thonerde und des Bleiessigs auf die Polarisation von Zuckerlösungen, *Chem. Centralbl.*

1873. Stefan, Ueber die mit dem Soleil'schen Doppelquarz ausgeführten Interferenzversuche, *Wien. Ber.*, LXVI.

1873. M. Oudemans jr., Einfluss optisch inactiver Lösungsmittel auf das Drehungsvermögen optisch activer Substanzen, *Pogg. Ann.*, CXLVIII.

1873. Is. Pierre u. Ed. Puchot, Étude sur l'action des principaux dérivés de l'alcool amylique sur la lumière polarisée, *C. R.*, LXXVI.

1873. N. Ley, Zur Frage über die optischen Eigenschaften einiger Verbindungen der Pentan-Reihe, *Ber. d. chem. Ges.*, VI.

1873. H. Landolt, Ueber Gesetzmässigkeiten bezüglich des molecularen Drehvermögens der Weinsäure und ihrer Salze, *Ber. d. chem. Ges.*, VI.

1873. Oudemans jr., Bemerkungen zu der vorstehenden Arbeit, *Ber. d. chem. Ges.*, VI.

1873. H. Landolt, Entgegnung auf die Bemerkung, *ibid.*

1873. Oudemans, Erwiderung auf die Entgegnung, *ibid.*

1873. Scheibler, Ueber das Vorkommen der Arabinsäure (Gummi) in den Zuckerrüben und über den Arabinzucker (Gummizucker), *Ber. d. chem. Ges.*, VI.

1873. F. W. Krecke, La mannite et la nitromannite considérées dans leur action sur la lumière polarisée, *Arch. néerl.*, VII.

1873. G. Bouchardat, De la production du pouvoir rotatoire dans les dérivés neutres de la mannite, *C. R.*, LXXVI.

1873. Wislicenus, Ueber die optisch-active Milchsäure der Fleischflüssigkeit, die Paramilchsäure, *Lieb. Ann.*, CLXVII.

1873. E. Bichat, Recherches sur la polarisation rotatoire magnétique, *Ann. de l'école norm.*

1873. J. E. Dibbits, La loi de Berthollet contrôlée par la rotation du plan de polarisation des sels de cinchonine, *Arch. néerl.*, VIII.

1873. Le Bel, Procédé pour préparer l'alcool amylique activ, *C. R.*, LXXVII.

1873. F. Jicinski, Die gewichtsanalytische Polarisation der Zuckerrübe und einige Verbesserungen der Saftgehaltsbestimmungen mittelst Polarisation, *Dingl. Journ.*, CCVIII.

1873. Schmidt und Hänsch, Anweisung zur Spectro-Calometrie der Zuckersäfte nach Prof. Vierordt's Methode, *Berlin, bei Schmidt u. Hänsch.*

1873. Salleron, Saccharimètre à pénombres, *Mondes,* (2), XXXI.

1873. V. Wartha, Ueber den Zuckergehalt vergohrener Weine und die optische Bestimmung desselben, *Pol. Centralbl.*

1873. Howard, On the optical properties of some modifications of the Cinchona Alkaloids, *Journ. chem. soc.*, (2), XI.

1873. Jungfleisch, Umwandlung der rechtsdrehenden Camphersäure durch Wärme, *Ber. d. chem. Ges.,* VI.

1873. G. Bouchardat, Du pouvoir rotatoire spécifique de la quinine et de la cinchonine, *Bull. d. l. soc. chim.*, XX.

1873. M. Croullebois, Mémoire sur la double refraction elliptique du quarz, *Ann. de chim. et de phys.,* (4), XXVIII.

1873. Vignon, Du pouvoir rotatoire de la mannite, *C. R.*, LXXVII.

1873. E. Jungfleisch, Sur la synthèse des matières organiques douées du pouvoir rotatoire. Production des acides tartriques droit et gauche, en partout du gaz oléfiant, *C. R.,* LXXVI.

1874. L. Boltzmann, Ueber den Zusammenhang der Drehung der Polarisationsebene und der Wellenlänge der verschiedenen Farben, *Pogg. Jubelb.*

1874. Vignon, Sur le mannite, *Ann. de chim.,* (5), II.

1874. Laurent, Sur un nouveau saccharimètre et sur un moyen pour rendre la flamme de la soude absolument monochromatique, *C. R.,* LXXVIII.

1874. Montgolfier, Observations sur les pouvoirs rotatoires du camphre et de quelques autres corps, *Bull. soc. chim.,* (2), XXII.

1874. J. Ribau, De l'isotérébenthène au point de vue physique, *C. R.,* LXXIX.

1874. C. Hintze, Vorläufige Mittheilung über eine neue circularpolarisirende Substanz, *Tschermak, miner. Mitth.*

1874. Backhoven, On a new amyl-alcohol, *Sillim. Journ.*, (3), VII.

1874. J. A. Le Bel, Sur les relations qui existent entre les formules atomiques des corps organiques et la pouvoir rotatoire de leur dissolution, *Bull. soc. chim.*, (2), XXII.

1874. O. O. Friedrich, Ueber die optische und magnetische Circularpolarisation des Lichtes und der Wärme und ihre Anwendung in wissenschaftlicher und technischer Beziehung, *Dresden, v. Zahn.*

1874. Weiler, Instrument zum Messen von Beobachtungsröhren der Polarisationsapparate, *Dingl. Journ.,* CCXIV.

1874. L. Weiss, La détermination quantitative du sucre par la voie optique, *Inst.,* II.

1874. A. C. Oudemans, Sur le pouvoir rotatoire spécifique des principaux alcaloides de quinquin á l'état libre et à l'état combiné, *Arch. néerl.,* X.

1875. Croullebois, Mémoire sur les interferences des rayons elliptiques, *Ann. d. chim.,* (5), IV.

1875. V. v. Lang, Ueber die Abhängigkeit der Circularpolarisation des Quarzes von der Temperatur, *Wien. Ber.,* (2), LXXI.

1875. J. L. Soret u. Ed. Sarazin, Sur la polarisation rotatoire du quartz, *C. R.,* LXXXI.

1875. O. Hesse, Ueber das Verhalten der Lösungen einiger Substanzen im polarisirten Lichte, *Lieb. Ann.,* CLXXVI.

1875. Hoppe-Seyler, Ueber die Rotationsconstante des Traubenzuckers, *Zeitschr. f. anal. Chem,,* XIV.

1875. J. E. H. Gordon, On the determination of Verdet's Constant in Absolute Units, *Proc. Roy. Soc.,* XXIII.

1875. **A. Béchamp**, Sur les matières optiquement actives, autres que le glycose qui existent normalement dans le vin et le charactérisent, *C. R.*, LXXX.
1875. **G. J. Bremer**, Vorläufige Mittheilung über eine neue Aepfelsäure, welche die Polarisationsebene rechts dreht, *Ber. d. chem. Ges.*, VIII.
1876. **Baumgartner**, Ueber den Einfluss optisch inactiver Lösungsmittel auf das Drehungsvermögen optisch activer Substanzen bei verschiedener Concentration, *Carl Rep.*, XII.
1876. **H. Landolt**, Zur Kenntniss des specifischen Drehungsvermögens gelöster Substanzen, *Ber. d. chem. Ges.*, IX.
1876. **H. Landolt**, Ueber das specifische Drehungsvermögen des Camphers, *Ber. deutsch. chem. Ges.*, IX.
1876. **H. Landolt**, Das optische Drehungsvermögen organischer Substanzen, *Braunschweig, 1879.*
1876. **B. Tollens**, Ueber das specifische Drehungsvermögen der Glycose (des Traubenzuckers) und Nachtrag dazu, *Ber. d. chem. Ges.*, IX.
1876. **O. Hesse**, Studien über das Drehungsvermögen der wichtigeren Chinaalkaloide, *Lieb. Ann.*, CLXXXII.
1876. **A. C. Oudeman's jr.**, Ueber das specifische Drehungsvermögen der wichtigeren Chinaalkaloide im freien und gebundenen Zustande, *Lieb. Ann.*, CLXXXII.
1876. **J. C. Draper**, Effect of temperature on the power of solutions of quinine to rotate polarized light, *Sillim. Journ.*, (3), XI.
1876. **A. Müntz**, De l'influence de certains sels et de la chaux sur les observations saccharimétriques, *C. R.*, LXXXII.
1876. **H. Haas**, Ueber das optische und chemische Verhalten einiger Eiweisssubstanzen, insbesondere der dialysirten Albumine, *Pflüger, Arch.*, XII.
1876. **J. H. Van 't Hoff**, Die Identität von Styrol aus Cinnamol, ein neuer Körper aus Styrax, *Ber. d. chem. Ges.*, IX.
1876. **J. H. Van 't Hoff**, Beiträge zur Kenntniss des Styrax, *Ber. d. chem. Ges.*, IX.
1876. **Berthelot**, Sur le pouvoir rotatoire du styrolène, *Journ. chem. soc.*, I.
1876. **G. J. W. Bremer u. J. H. Van 't Hoff**, Ueber die aus activer Weinsäure erhaltene Bernsteinsäure, *Ber. d. chem. Ges.*, IX.
1876. **Le Bel**, Ueber den activen Amylalkohol, *Ber. d. chem. Ges.*, IX.
1876. **Bremer**, Ueber optisch wirksame Aepfelsäuren, *Ber. d. chem. Ges.*, VIII.
1876. **J. de Montgolfier**, Sur l'isomérie du pouvoir rotatoire dans les camphols, *C. R.*, LXXXIII.
1876. **Calderon**, Sur les différents pouvoirs rotatoires que présente le sucre de canne selou le procédé employé pour les mesures, *C. R.*, LXXXIII.
1876. **Girard u. Laborde**, Ueber die optische Inactivität des reducirten Zuckers, welcher in Handelswaaren enthalten ist, *Dingl. Journ.*, CCXX.
1876. **A. Riche et Ch. Bardy**, Recherches sur l'analyse commerciale de sucres bruts, *C. R.*, LXXXII.
1876. **H. Pellet u. P. Champion**, Influence de l'asparagène contenue dans les jus sucrés sur l'essai saccharimétrique; destruction du pouvoir rotatoire de l'asparagène, méthode de dosage, *C. R.*, LXXXII.
1876. **Cossa**, On the specific rotatory power of asparagène, *R. Acc. de Lincei.*
1876. **Cannizzaro**, Il potere rotatorico degli acidi santonico etc., *Accad. dei Lincei.*
1876. **Neubauer**, Optical behaviour of wines, *Journ. chem. soc.*, II.
1876. **H. Becquerel**, Recherches sur la polarisation rotatoire magnétique, *C. R.*, LXXXII.
1876. **Jellett**, On chemical optics, *Trans. of Jr. R. Acad.*

1876. V. v. Lang, Ueber die Drehung der Polarisationsebene durch den Quarz, *Wien. Ber.*, LXXIV.
1876. J. L. Soret u. J. L. Sarasin, Sur la polarisation rotatoire du quartz, *C. R.*, LXXXIII. — *Pogg. Ann.*, CLVII.
1876. A. Müntz u. E. Aubin, Recherche sur la mannite au point de vue des ses propriétés optiques, *C. R.*, LXXXIII.
1876. L. Sohncke, Zur Theorie des optischen Drehvermögens von Krystallen, *Clebsch, Ann.*, IX.
1876. L. Sohncke, Die Glimmercombinationen von Reusch und das optische Drehvermögen von Krystallen, *Pogg. Ergbd.*, VIII.
1876. C. Bodewig, Ueber die Krystallform und die Circularpolarisation des kohlensauren Guanidins, *Pogg. Ann.*, CLVII.
1876. C. Hintze, Ueber die Circularpolarisation des Matiko-Camphers, *Pogg. Ann.*, CLVII.
1876. Zepharovich, Sur les propriétés cristallographiques et optiques de quelques dérivés de camphre, *Inst.*
1877. H. Landolt, Untersuchungen über das optische Drehungsvermögen, *Lieb. Ann.*, CLXXXIX.
1877. B. Tollens, Ueber die specifische Drehung des Rohrzuckers, *Ber. d. chem. Ges.*, X.
1877. M. Schmitz, Ueber das specifische Drehungsvermögen des Rohrzuckers, *Ber. d. chem. Ges.*, X.
1877. J. H. Van 't Hoff, Ueber den Zusammenhang zwischen optischer Activität und Constitution, *Ber. d. chem. Ges.*, X.
1877. G. Bouchardat, Ueber das Drehungsvermögen des Mannits und seiner Abkömmlinge, *C. R.*, LXXXIV.
1877. A. Müntz und E. Aubin, Sur les propriétés optiques de la mannite, *C. R.*, LXXXIV.
1877. Berthelot, Ueber das Drehungsvermögen des Metastyrolen, *C. R.*, LXXXV.
1877. J. A. Le Bel, Ueber die Abwesenheit des dem Triäthylmethylstibinjodid zugeschriebenen Drehungsvermögens, *Bull. Soc. chim.*, XXVII.
1877. Petit, Drehungsvermögen des Coniin und Pilocarpin, *Ber. d. chem. Ges.*, X.
1877. Balbiano, Dérivés de l'alcool amylique de fermentation, *Bull. soc. chim.*, XXVIII.
1877. L. Prunier, Sur quelques propriétés physiques de la quercite, *C. R.*, LXXXV.
1877. Villiers, On melezitose, *Sillim. Journ.*, (3), XIII.
1877. A. Schnacke, Ueber das Wasserlein'sche Saccharimeter, *Dingl. Journ.*, CCXXII.
1877. H. Morin, Sur le sucre réducteur des produits commerciaux dans ses rapports avec la saccharimétrie, *C. R.*, LXXXV.
1877. H. Pellet, Influence de l'alcalinité des diverses substances sur la pouvoir rotatoire du sucre, *Bull. soc. chim.*, XXVIII.
1877. Bardy, De Luynes etc., Report on saccharimetric methods, *Mon. scient.*
1877. H. D. Kruseman, Sur la réduction de la lévulose, *Arch. Néerl.*, XII.
1877. A. Poehl, Chemische und botanisch-histologische Untersuchungen der Eucalyptusblätter, *Chem. Centralbl.*
1877. F. A. Flückiger, Praktische Notizen über das Drehungsvermögen ätherischer Oele, *Arch. f. Pharm.*, VII.
1877. C. Neubauer, Quantitative Bestimmung der Dextrose neben der Levulose auf indirectem Wege, *Ber. d. chem. Ges.*, X.
1877. Sachsse, Ueber die quantitativen Bestimmungen von Dextrose und Invertzucker, *Sitzb. d. Naturforscherges., Leipzig.*

1877. J. L. Soret und Ed. Sarasin, Sur la polarisation rotatoire du quartz, *C. R.*, LXXXIV.
1877. H. Becquerel, Recherches expérimentales sur la polarisation rotatoire magnétique, *Mondes*, (2), XLII.
1877. C. Bodewig, Ueber die Krystalle des Biacetylphenolphtaleïn, einer neuen circularpolarisirenden Substanz.
1877. Fr. Pfaff, Zur Darstellung der Circularpolarisation durch Glimmerblättchen, *Münchener Ber.*, 1876, II.
1878. Becke, Die optischen Eigenschaften des Rohrzuckers, *Tschermak, Mitthl.*, 1877.
1878. A. Righi, Ueber die Geschwindigkeit des Lichtes in durchsichtigen magnetisirten Körpern, *Cim.*, (3), III.
1878. Becquerel, Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch den Erdmagnetismus, *C. R.*, LXXXVI.
1878. Hesse, Ueber das optische Drehungsvermögen flüssiger und gelöster Substanzen, *Lieb. Ann.*, CXCII.
1878. H. Landolt, Ermittelung der specifischen Rotation activer Substanzen, *Lieb. Ann.*, CLXXXIX.
1878. J. de Montgolfier, Sur l'isomérie du pouvoir rotatoire dans les camphols, *Bull. soc. chim.*, XXIX.
1878. Sohncke, Ueber den Einfluss der Temperatur auf das optische Drehungsvermögen des Quarzes und des chlorsauren Natrons, *Ann. d. Phys.*, *N. F.*, III.
1879. H. Landolt, Das optische Drehungsvermögen organischer Substanzen und die praktischen Anwendungen desselben, Braunschweig 1879.
1879. J. B. Le Bel, Rechtsdrehender Amylalkohol, *Bull. soc. chim.*, XXXI.
1879. Berthelot, Drehungsvermögen des Styrolens, *Bull. soc. chim.*, XXXI.
1879. P. Casamajor, Einfluss von Temperaturveränderungen auf die Ablenkungen des polarisirten Lichtes der Lösungen von invertirtem Zucker, *Chem. News*, XXXIX.
1879. P. Claënon, Ueber die Sulfate der ein- und mehrwerthigen Alkohole und der Kohlenhydrate, *Physiogr. Ges. zu Lund. Jub.-Schr.* 1878.
1879. U. Gayon, Theorie des Saccharimeters, *Laurent, Journ. de phys.*, VIII.
1879. W. v. Miller, Ueber Styrol, *Chem. Ber.*, XI.
1879. A. C. Oudemans jr., Untersuchungen über das Chinamin, *Arch. néerl.*, XIII.
1879. D. Gernez, Drehungsvermögen des Quarzes bei verschiedenen Temperaturen, *Journ. d. Phys.*, VIII.
1879. J. de Montgolfier, Ueber Isomere und Derivate des Camphers und Borneols, *Ann. de chim. et de phys.*, (5), XIV.
1879. J. de Montgolfier, Ueber Isomerie des Borneols, *C. R.*, LXXXIX.
1879. M. Rozsnayay, Studien über die qualitative und quantitative chemische Analyse der Chinaalkaloide mit Hülfe des Mikroskopes und Polarisators, *Arad. Ungerleider u. Hectos*, 1878.
1879. M. Schmitz, Ueber das specifische Drehungsvermögen des Rohrzuckers, *Chem. Ber.*, X.
1879. E. Schulze, Ueber das specifische Drehungsvermögen des Isocholesterin. *Chem. Ber.*, XII.
1879. W. Staedel, Notiz über die Traubensäure, *Chem. Ber.*, XI.
1879. J. H. Le Bel, Sur le méthylpropylcarbinol synthétique, residu activ par les moisissures, *C. R.*, LXXXIX.
1879. J. Joubert, Rotation magnétique du plan de polarisation de la lumière sans l'influence de la terre, *C. R.*, LXXXVII.
1879. J. Joubert, Sur le pouvoir rotatoire du quartz et sa variation avec la température, *Journ. de phys.*, VIII.

1879. L. Laurent, Sur le saccharimètre Laurent, *C. R.*, LXXXIX.

1880. J. H. Poynting, Eine einfache Form des Saccharimeters, *Phil. Mag.*, (5), X.

1880. A. C. Oudemans, Untersuchungen über das Conquinamin, *Arch. néerl.*, XV.

1880. J. A. Le Bel, Ueber das synthetische Methylpropylcarbinol, actives Residuum durch Pilze, *C. R.*, LXXXIX.

1880. Zd. H. Skraup und G. Vortmann, Zur Kenntniss des Cinchonidins, *Lieb. Ann.*, CXCVII.

1880. G. J. W. Bremer, Ueber die Spaltung der inactiven Aepfelsäure, *Chem. Ber.*, XIII.

1880. G. A. Schneider, Ueber die Umkehrung der Rotationsrichtung der gewöhnlichen Aepfelsäure durch blosse Aenderung der Concentration, *Chem. Ber.*, XIII.

1880. R. Anschütz und A. Pictet, Verfahren zur Herstellung der Weinsäure und des Traubensäureäthers, *Chem. Ber.*, XIII.

1880. R. Anschütz, Ueber das Drehungsvermögen der Rechtsweinsäureäther, *Chem. Ber.*, XIII.

1880. E. Meissl, Das specifische Drehungsvermögen der Lactose, *Kolbe, Journ.*, XXII.

1880. O. Hesse, Zusammensetzung und optisches Verhalten des Chinamins, *Lieb. Ann.*, CXCIX.

1880. Gouy, Ueber die Theorie der doppelten Circularrefraction, *C. R.*, XC.

1880. Gouy, Zur Theorie der Interferenzphänomene, bei denen die rotatorische Polarisation eintritt, *C. R.*, XC.

1880. Zd. H. Skraup, Chinin und Homocinchonidin, *Chem. Ber.*, XII.

1880. A. Rindell, Zur Kenntniss des Milchzuckers.

1880. A. H. Allen, Specific rotatory power of cane- and invert-sugar, *Chem. News*, XLII.

1880. Waldon, The specifique rotatory power of cane- and invert-sugar, *Chem. News*, XLII.

1880. M. Schmöger, Das specifische Drehungsvermögen des Milchzuckers, *Chem. Ber.*, XIII.

1881. H. Beckerel, Ueber eine Methode, welche die Drehungen der Polarisationsebene des Lichtes zu vergrössern gestattet, *C. R.*, XCIII.

1881. G. Gori, Ueber einen neuen Versuch, der den Sinn der Drehung der Polarisationsebene zeigen soll, *C. R.*, XCI.

1881. J. Carnelutti und R. Naccari, Studien über das optische Drehungsvermögen der Santoninderivate, *Chem. Ber.*, XIII.

1881. J. Carnelutti und R. Naccari, Studien über das moleculare Drehungsvermögen einiger Santoninderivate, *R. Acc. dei Lincei*, (3), V.

1881. R. Nasini, Studien über das moleculare Drehungsvermögen, *Atti R. Acc. dei Lincei*, (3), IX.

1881. O. Hesse, Studien über Chinamin, *Lieb. Ann.*, CCVII.

1881. O. Hesse, Untersuchung über die Constitution einiger Alkaloide der Chinarinden, *Lieb. Ann.*, CCV.

1881. O. Hesse, Ueber Propionylchinin, *Lieb. Ann.*, CCV.

1881. Armand Becker, Ueber das optische Drehungsvermögen des Asparagins und der Asparaginsäure in verschiedenen Lösungsmitteln, *Chem. Ber.*, XIV.

1881. G. H. Schneider, Ueber das optische Drehungsvermögen der Aepfelsäure und ihrer Salze, *Lieb. Ann.*, CCVII.

1881. H. Landolt, Ueber die Umkehrung der Rotationsrichtung optisch activer Substanzen, *Chem. Ber.*, XIII.

1881. Ch. Richet und G. Bouchardat, Ueber die Chlorderivate des Strychnins, *C. R.*, XCI.

1881. T. Plimpton, Ueber ein actives Amylamin, *C. R.*, XCII.
1881. J. A. Le Bel, Ueber den activen Propylglycol, *C. R.*, XCII.
1881. T. Plimpton, Die secundären und tertiären Amylamine, die sich von Gährungsamylalkohol ableiten, *C. R.*, XCII.
1881. E. O. v. Lippmann, Ueber die Inversion des Rohrzuckers durch Kohlensäure, und einige Eigenschaften des Invertzuckers, *Chem. Ber.*, XIII.
1881. C. Scheibler, Ueber das Saccharin und die Saccharinsäure, *Chem. Ber.*, XIII.
1881. B. Tollens, Ueber die specifische Drehung des Rohrzuckers in verschiedenen Lösungsmitteln, *Chem. Ber.*, XIII.
1881. F. Salomon, Ueber das specifische Gewicht, das Reductionsvermögen und das optische Verhalten der wässerigen Traubenzuckerlösungen, *Rep. d. analyt. Chem.*, I.
1881. A. v. Grote, E. Kehrer, B. Tollens, Ueber Darstellung und Eigenschaften der Lävulinsäure, *Lieb. Ann.*, CCVI.
1881. Th. Thomsen, Das optische Drehungsvermögen des Rohrzuckers in alkalischen Lösungen, *Chem. Ber.*, XIV.
1881. Th. Thomsen, Ueber Multipla in dem optischen Drehungsvermögen der Kohlenhydrate, *Chem. Ber.*, XIII.
1881. Th. Thomsen, Ueber Multipla in dem optischen Drehungsvermögen organischer Verbindungen. Allgemeine Gültigkeit des Gesetzes der einfachen Beziehungen, *Chem. Ber.*, XIII.
1881. Th. Thomsen, Die Kohlenhydrate und ihre Derivate, nach dem molecularen Drehungsvermögen geordnet, *Chem. Ber.*, XIII.
1881. Th. Thomsen, Das moleculare Drehungsvermögen organischer Verbindungen, *Chem. Ber.*, XIII.
1881. H. Landolt, Bemerkungen zu den obigen Abhandlungen, *Chem. Ber.*, XIII.
1881. Th. Thomsen, Prof. Landolt's Bemerkungen zu meinen Abhandlungen über das optische Drehungsvermögen, *Chem. Ber.*, XIII.
1881. H. Landolt, Ueber die Th. Thomsen'schen Gesetze der multiplen Drehungen, *Chem. Ber.*, XIV.
1881. Th. Thomsen, Ueber das optische Drehungsvermögen organischer Verbindungen, *Chem. Ber.*, XIV.
1881. Th. Thomsen, Ueber die Rotationsconstanten des Rohrzuckers, *Chem. Ber.*, XIV.
1881. H. Landolt, Erwiderung darauf, *Chem. Ber.*, XIV.
1881. L. Fredericq, Ueber das Drehungsvermögen der Eiweissstoffe des Blutserums und ihre Bestimmung durch die Drehung der Polarisationsebene, *C. R.*, XCIII.
1882. L. Laurent, Polarimeter mit gewöhnlichem Licht, *C. R.*, XCIV.
1882. F. Lippich, Ueber polaristrobometrische Methoden, *Wien. Ber.*, LXXXV.
1882. A. Hölzer, Fehlerquelle beim Polarisiren, *Chem. Ber.*, XV.
1882. Soret und Sarasin, Drehung der Polarisationsebene im Quarz, *C. R.*, XCV.
1882. Croullebois, Ueber die elliptische Doppelbrechung und die Erzeugung dreier Systeme von Interferenzstreifen, *C. R.*, XCII.
1882. Croullebois, Ueber circulare Doppelbrechung und die wirkliche Erzeugung dreier eigentlicher Fransensysteme, *C. R.*, XCII.
1882. Croullebois, Erzeugung dreier Systeme von Interferenzfransen bei linearpolarisirtem Lichte, *C. R.*, XCII.
1882. O. Hesse, Ueber Conchinamin, *Lieb. Ann.*, CCIX.
1882. F. Flawitzky, Ueber die Verhältnisse der Rotationsgrösse der Polarisationsebene, *Chem. Ber.*, XV.
1882. Th. Thomsen, Das optische Drehungsvermögen der Aepfelsäure und ihrer Salze bei verschiedenen Temperaturen, *Chem. Ber.*, XV.

1882. Amé Pictet, Untersuchungen über die Aether der Rechtsweinsäure, *Arch. de Gen.*, VII.

1882. P. Cazeneuve und Didelot, Ueber einige Eigenschaften des Zweifach-Chlorcamphers, *C. R.*, XCIV.

1882. J. Mauthner, Ueber das optische Drehungsvermögen des Tyrosins und Cystins, *Monatsh. d. Chem.*, III.

1882. J. Luckowitch, Darstellung rechtsdrehender Mandelsäure aus inactiver Mandelsäure, *Chem. Ber.*, XV.

1882. J. A. Le Bel, Geometrische Formeln der Maleïn- und Fumarsäure, *Bull. de la Soc. Chim.*, XXXVII.

1882. A. Cornu, Ein einfaches Gesetz für natürliche und magnetische Circularpolarisation, *C. R.*, XCII.

1882. L. Wright, Einige Spiralfiguren, die sich in den Krystallen beobachten lassen und die Beziehungen ihrer optischen Achsen erläutern, *Phil. Mag.*, (5), XIII.

1882. Gouy, Ueber eine optische Combination, welche die Erscheinung der doppelten Circularrefraction reproducirt, *C. R.*, XCII.

1882. M. E. Mallard, Ueber die optischen Eigenschaften von krystallisirten Gemengen isomorpher Substanzen und über die Theorie der Circularpolarisation, *Journ. d. Phys.*, X.

1883. H. Dufet, Notiz über die Theorie des Saccharimeters Laurent mit weissem Lichte, *Journ. d. Phys.*, (2), I.

1883. P. Degener, Ueber das optische Verhalten der Polarisationsdeckgläschen, *Zeitschr. d. Ver. f. Rübenzuckerind. d. Deutschen Reiches*, 1882.

1883. H. Wild, Ueber den Gebrauch meines Polaristrobometers im weissen Lichte, *Mél. phys. et chim. Bull. Ac. Pétersb.*, XI.

1883. H. Landolt, Neuerungen an Polaristrobometern, *Zeitschr. f. Instrumentenk.*, III.

1883. Latchinoff, Charaktere der Isocholalsäure, *Bull. Soc. Chim.*, XXXVIII.

1883. P. Schwebel, Ueber das optische Drehungsvermögen einiger Salze des Nicotins, *Chem. Ber.*, XV.

1883. H. Kiliani, Ueber Saccharin und Saccharinsäure, *Chem. Ber.*, XV.

1883. A. C. Oudemans, Ueber das specifische Drehungsvermögen des Apochinins und des Hydrochlorapochinins unter dem Einflusse von Säuren, *J. R. Recueil des trav. chim. des Pays-Bas*, I.

1883. R. Nasini, Ueber das Dispersionsvermögen der Polarisationsebene bei den organischen Substanzen, *Atti della R. Acc. dei Lincei Roma*, (3), XIII.

1883. G. Bodländer, Ueber das optische Drehungsvermögen isomorpher Mischungen aus den Dithionaten des Bleies und Strontiums, *Inaug.-Dissert., Breslau*, 1882.

1883. Th. Barbier, Ueber die flüssigen Chlorhydrate des Terpentins, *C. R.*, XCVI.

1883. H. Tykociner, Ueber das specifische Drehungsvermögen einiger Alkaloide unter dem Einfluss der Säuren, *Recueil des trav. chim. de Pays-Bas*, I.

1883. R. Nasini, Ueber das Drehungsvermögen der Photosantonsäure, *Trans. R. Acc. dei Lincei*, (3a), VII.

1883. H. Becquerel, Messung der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes unter dem magnetischen Einfluss der Erde, *Ann. de Chim. et de Phys.*, (5), XXVII.

1883. Peddie, Ueber die Drehung der Polarisationsebene im Quarz und ihre Beziehung zur Wellenlänge, *Proc. Roy. Soc. Edinb.*, XI.

1883. J. Lewkowitsch, Die Linksmandelsäure und das optische Drehungsvermögen derselben, *Chem. Ber.*, XVI.

1883. J. Lewkowitsch, Spaltung der inactiven Mandelsäure in ihre beiden optisch inactiven Isomeren, *Chem. Ber.*, XVI.

1883. Arnaud, Untersuchungen über Cinchonamin, *C. R.*, XCVII.
1883. B. Hecht, Ueber die Bestimmung des Achsenverhältnisses der bei der elliptischen Polarisation im Quarz auftretenden Bahnellipsen, *Wied. Ann.*
1884. W. Voigt, Durchgang des Lichtes durch eine planparallele Schicht eines circularpolarisirenden Mediums.
1884. Gouy, Ueber eine optische Constitution, welche die Erscheinung der doppelten Circularrefraction reproducirt, *Journ. d. Phys.*, (2), II.
1884. G. Wyrouboff, Ueber die Darstellung drehender Substanzen, *Bull. Soc. Chim.*, XLI.
1884. G. Wyrouboff, Ueber die optischen Eigenschaften des Strychninsulfats, *Bull. Soc. Min.*, VII.
1884. G. Wyrouboff, Ueber die optischen Eigenschaften des Hyposulfats des Bleies, *Bull. Soc. Min.*, VII.
1884. G. Wyrouboff, Ueber die optischen Eigenschaften des Benzils und Guanidincarbonats, *Bull. Soc. Min.*, VII.
1884. Jungfleisch, Bemerkungen gegen Pasteur, *Bull. Soc. Chim.*, XLI.
1884. Jungfleisch, Ueber die Zerlegung der durch Compensation optisch inactiven Verbindungen, *Bull. Soc. chim.*, XLI.
1884. J. Lewkowitsch, Umwandlung der activen Mandelsäure in inactive, *Chem. Ber.*, XVI.
1884. J. Lewkowitsch, Optisch active Glycerinsäure und optisch active Milchsäure, *Chem. Ber.*, XVI.
1884. A. C. Oudemans, Ueber Quinovinsäure, Quinovin und Quinovit, *Arch. Néerl.*, XVIII.
1884. O. Hesse, Studien über Morphin, *Lieb. Ann.*, CCXXII.
1884. E. Allary, Anordnung für die Benutzung des Halbschatten-Saccharimeters, *Bull. Soc. chim.*, XL.
1884. Haller, Ueber zwei Campholurethane mit einer Isomerie, die derjenigen analog ist, welche die rechte und die linke Weinsäure zeigen, *C. R.*, XCVIII.
1884. A. Meyer, Ueber Lactosin, ein neues Kohlenhydrat, *Chem. Ber.*, XVII.
1884. O. Hesse, Ueber die Rinde von Remijia Purdieana Wedd. und ihre Alkaloide, *Lieb. Ann.*, CCXXV.
1884. G. J. W. Bremer, Ueber die Ursache der Veränderungen im specifischen Drehungsvermögen unter dem Einfluss der verschiedenen lösenden Stoffe, *Rec. des Trav. Chim. de Pays-Bas*, III.
1884. J. Lewkowitsch, Notiz über das optische Drehungsvermögen des Leucins, *Chem. Ber.*, XVII.
1884. B. Tollens, Ueber die Circularpolarisation des Rohrzuckers, *Chem. Ber.*, XVII.
1884. C. Scheibler, Untersuchungen über die Glutaminsäure, *Chem. Ber.*, XVII.
1884. G. S. Eyster, Ueber die Bestimmung der Rotation von linksdrehenden Lösungen mit dem Scheibler-Ventske-Soleil'schen Instrument, *Chem. News*, XLIX.
1884. A. Kundt, Die elektromotorische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch Eisen, Cobalt und Nickel, *Wied. Ann.*, XXIII.

Rotationsvermögen und Krystallform.

1821. W. Herschel, On the Rotation Impressed by Plates of Rock Crystal on the Planes of Polarization of the Rays of Light as Connected with Certain Peculiarities in its Crystallization, *Cambr. Trans.*, I, 43.
1821. Brewster, On Circular Polarization as Exhibited in the Optical Structure of the Amethyst, *Edinb. Trans.*, IX, 139.

1837. Dove, Ueber die Zusammensetzung der optischen Eigenschaften der Bergkrystalle mit ihren äusseren krystallographischen Kennzeichen, *Pogg. Ann.*, XL, 607. — *Inst.*, VI, 58.
1837. Delafosse, Mémoire sur la cristallisation, *Mém. des Sav. étrang.*, VIII.
1837. Delafosse, *Traité de Minéralogie*, p. 140, 151, 414.
1848. Pasteur, Sur la relation qui peut exister entre la forme cristalline et la composition chimique, et sur la cause de la polarisation rotatoire, *C. R.*, XXVI, 535; XXVIII, 477. — *Inst.*, XVII, 124.
1848. Biot, Rapport sur le mémoire précédent, *C. R.*, XXVII, 401.
1848. Pasteur, Recherches sur les relations qui peuvent exister entre la forme cristalline, la composition chimique et le sens de la polarisation rotatoire, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXIV, 442.
1849. Pasteur, Recherches sur les propriétés, spécifiques des deux acides qui composent l'acide racémique, *C. R.*, XXIX, 133. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXVIII, 56. — *Inst.*, XVII, 298.
1849. Biot, Rapport sur le mémoire précédent, *C. R.*, XXIX, 133. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXVIII, 99. — *Inst.*, XVIII, 337.
1850. Pasteur, Nouvelles recherches sur les relations qui peuvent exister entre la forme cristalline, la composition chimique et le phénomène de la polarisation rotatoire, *C. R.*, XXXI, 480. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXI, 67.
1850. Biot, Rapport sur le mémoire précédent, *C. R.*, XXXI, 601. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXVIII, 99. — *Mém. de l'Acad. des sc.*, XXIII, 67.
1851. Pasteur, Sur les acides aspartique et malique, *C. R.*, XXXIII, 217. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXIV, 30.
1851. Biot, Rapport sur le mémoire précédent, *C. R.*, XXXIII, 549. — *Mém. de l'Acad. des sc.*, XXIII, 539.
1851. Maskeline, On the Connexion of Chemical Forces with the Polarization of Light, *Phil. Mag.*, (4), I, 428.
1852. Pasteur, Nouvelles recherches sur les relations qui peuvent exister entre la forme cristalline, la composition chimique et le pouvoir rotatoire moléculaire, *C. R.*, XXXV, 176. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXVIII, 437.
1853. De Senarmont, Rapport sur le mémoire précédent, *C. R.*, XXXVI, 757. — *Mém. de l'Acad. des sc.*, XXIV, 215.
1853. Pasteur, Transformation des acides tartriques en acide racémique. Découverte de l'acide tartrique inactif. Nouvelle méthode de séparation de l'acide racémique en acides tartriques droit et gauche, *C. R.*, XXVII, 162. — *Inst.*, XXI, 257.
1853. Pasteur, Sur le pouvoir rotatoire de la quinidine, *C. R.*, XXXVI, 26. — *Inst.*, XXI, 3.
1853. Chautard, Sur l'acide camphorique gauche et le camphre gauche, *C. R.*, XXVII, 166. — *Inst.*, XXI, 258.
1853. Ketzner, Nouveaux faits relatifs à l'histoire de l'acide racémique, *C. R.*, XXXVI, 17. — *Inst.*, XXI, 17.
1853. Pasteur, Notice sur l'origine de l'acide racémique, *C. R.*, XXXVI, 19. — *Inst.*, XXI, 2.
1853. Pasteur, Recherches sur les alcaloïdes des quinquinas, *C. R.*, XXXVII, 110. — *Inst.*, XXI, 249.
1854. Pasteur, Sur le dimorphisme dans les substances actives. Tétartoédrie, *C. R.*, XXXIX, 20. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XLII, 418.
1854. Marbach, Die circulare Polarisation des Lichtes durch chlorsaures Natron, *Pogg. Ann.*, XCI, 428. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XLIII, 252. — *Inst.*, XXII, 233.

1855. Marbach, Découverte de l'existence du pouvoir rotatoire dans plusieurs corps cristallisés du système cubique qui l'exercent en sens divers avec une égale intensité dans toutes les directions sans le posséder moléculairement (avec additions par Biot), *C. R.*, XL, 793. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XLIV, 41.
1855. Marbach, Ueber die Enantiomorphie und die optischen Eigenschaften von Krystallen des Tesseralsystems, *Pogg. Ann.*, XCIX, 451.
1855. Descloiseaux, Recherches physiques et cristallographiques sur le quartz, *C. R.*, XL, 1019, 1132. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XLV, 129. — *Inst.*, XXIII, 161, 182.
1855. De Senarmont, Rapport sur le mémoire précédent, *C. R.*, XL, 1132.
1855. Descloiseaux, Mémoire sur la cristallisation du quartz, *Mém. des Sav. étrang.*, XV, 404.
1856. Pasteur, Isomorphisme entre des corps isomères, les uns actifs, les autres inactifs, avec la lumière polarisée, *C. R.*, XLII, 1259. — *Inst.*, XXIV, 243.
1856. Biot, Note sur un nouveau fait de formation cristalline découvert par M. Marbach, *C. R.*, XLIII, 705, 800. — *Inst.*, XXIV, 357.
1857. Pasteur, Études sur le mode d'accroissement des cristaux et sur les causes de variation de leurs formes secondaires, *C. R.*, XLIII, 795. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XLIX, 5.
1857. Pasteur, Note sur la tétartoédrie non superposable, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), L, 178.
1857. Descloiseaux, Note sur l'existence de la polarisation rotatoire dans le cinabre, *C. R.*, XLIV, 870. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LI, 361. — *Inst.*, XXV, 145.
1857. Descloiseaux, Observations sur le pouvoir rotatoire des cristaux et des dissolutions de sulfate de strychnine, *C. R.*, XLIV, 909. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LI, 364. — *Inst.*, XXV, 149.
1858. Pasteur, Mémoire sur la fermentation de l'acide tartrique, *C. R.*, XLVI, 615.
1859. Biot, Note sur la formation artificielle de l'acide tartrique, *C. R.*, XLIX, 377.
1859. Bohn, Sur les propriétés optiques de l'acide tartrique artificiel, *C. R.*, XLIX, 897. — *Liebig's Ann.*, CXIII, 19.
1860. Carlet, Production de l'acide racémique artificiel, *C. R.*, LI, 137.
1860. Pasteur, Note relative à l'action des spores de *Penicillum glaucum* sur une dissolution de paratartrate d'ammoniaque, *C. R.*, LI, 298.
1860. Pasteur, *Leçons sur la dissymétrie moléculaire, professées à la Société chimique de Paris*, Paris.
1861. Pasteur, Sur la transformation de l'acide succinique en acide tartrique, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXI, 484.
1863. Descloiseaux, Relations entre les phénomènes de la polarisation rotatoire et les formes hémièdres ou hémimorphes des cristaux à un ou à deux axes, *32th Rep. of Brit. Assoc.*, part. II, p. 19.
1863. Chautard, Sur les acides camphoriques inactifs, *C. R.*, LVI, 698.
1866. Gernez, Sur la séparation des tartrates gauches et des tartrates droits à l'aide des dissolutions sursaturées, *C. R.*, LIII, 843.
1869. P. Groth, Ueber Krystallform, Circularpolarisation und über den Zusammenhang beider beim Quarz und überjodsauren Natrium, *Pogg. Ann.*, CXXXVII.
1869. V. v. Lang, Ueber den Zusammenhang der Circularpolarisation mit der hemiëdrischen Hemisymmetrie, *Pogg. Ann.*, CXXXVII.
1869. C. Rammelsberg, Ueber die Beziehung zwischen Circularpolarisation, Krystallform und Molecularconstruction der Körper, *Ber. d. chem. Ges.*, II.

1869. **Descloizeaux**, Ueber das optische Drehvermögen der Krystalle des Benzils, *Pogg. Ann.*, CXXXVII.
1876. P. **Groth**, Ueber symmetrische Verwachsungen circularpolarisirender Substanzen, *Pogg. Ann.*, CLVIII.
1881. N. S. **Kurrakow**, Krystallformen circularpolarisirender Substanzen, *Zeitschr. f. Kryst.*, V.
1881. C. **Scheibler**, Ueber eine auffallende Beziehung zwischen der Krystallform und dem optischen Drehungsvermögen einiger Kohlenhydrate, *Chem. Ber.*, XIII.
1884. Ch. **Soret**, Bemerkungen über die Theorie der natürlichen Drehung der Polarisationsebene, *Arch. de Gen.*, XI.

Theorie der Rotationspolarisation.

1837—40. **Mac Cullagh**, On the Laws of the Double Refraction of Quartz, *Ir. Trans.*, XVII, part. III, 461. — *Proceed. of Ir. Acad.*, I, 383. — *Inst.*, VIII, 356.
1842. **Cauchy**, Application de l'analyse mathématique à la recherche des lois de la polarisation circulaire, *C. R.*, XV, 910.
1844. **Cauchy**, Mémoire lur la théorie de la polarisation chromatique, *C. R.*, XVIII, 961.
1844. **Laurent**, Sur la rotation des plans de polarisation dans les mouvements infiniment petits d'un système de sphéroïdes, *C. R.*, XVIII, 936; XIX, 329, 482.
1845. **Laurent**, Sur les mouvements vibratoires de l'éther, *C. R.*, XXI, 438, 529, 893, 1160.
1846. **Broch**, Gesetze der Fortpflanzung des Lichtes bei circularpolarisirenden Körpern, *Dove's Repert.*, VII, 91.
1847. **Cauchy**, Note sur la polarisation chromatique, *C. R.*, XXV, 331.
1850. **Bravais**, Sur les systèmes dans lesquels les vibrations dextrogyres et lévogyres ne s'effectuent pas de la même manière, *C. R.*, XXXII, 186.
1850. **Cauchy**, Mémoire sur les perturbations produites dans les mouvements vibratoires d'un système de molécules par l'influence d'un autre système, *C. R.*, XXX, 17.
1850. **Jamin**, Mémoire sur la double réfraction elliptique du quartz, *C. R.*, XXX, 99. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXX, 55. — *Inst.*, XVII, 91.
1851. **Cauchy**, Mémoire sur la réflexion et la réfraction de la lumière à la surface extérieure d'un corps transparent qui décompose un rayon simple doué de la polarisation rectiligne en deux rayons polarisés circulairement en sens contraire, *C. R.*, XXXI, 112.
1856. W. **Thompson**, Dynamical Illustrations of the Magnetic and the Helicoïdal Rotatory Effects of Transparent Bodies on Polarized Light, *Proceed. of R. S.*, VIII, 150. — *Phil. Mag.*, (4), XIII, 198.
1860. **Biot**, Théorie mathématique de la lumière, 2e partie, Polarisation rotatoire, *C. R.*, L, 141. — *Inst.*, XXVIII, 39.
1860. **Eisenlohr** (F.), Ueber die Erklärung der Farbenzerstreuung und des Verhaltens des Lichtes in Krystallen, *Pogg. Ann.*, CIX, 215.
1860. **Clebsch**, Theorie der circularpolarisirenden Medien, *Journ. de Crelle*, LVII, 319.
1863. V. v. **Lang**, Zur Theorie der Circularpolarisation, *Pogg. Ann.*, CXIX, 74.
1863. **Verdet**, Recherches sur les propriétés optiques développées sur les corps transparents par l'action du magnétisme, 4e part., *C. R.*, LVI, 630; LVII, 670. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3). LXIX, 415. — *Inst.*, XXXI, 106, 341.

1864. J. Stephan, Ein Versuch über die Natur des unpolarisirten Lichtes und die Doppelbrechung des Quarzes in der Richtung seiner optischen Axe, *Wien. Ber.*, L, (2), 380. — *Pogg. Ann.*, CXXIV, 623. — *Inst.*, XXXIII, 71.

1864. J. Stephan, Ueber die Dispersion des Lichtes durch Drehung der Polarisationsebene im Quarz, *Wien. Ber.*, L, (2), 88. — *Pogg. Ann.*, CXXII, 631. — *Ann. de chim. et de phys.*, (4), III, 501. — *Inst.*, XXXII, 406.

1864. Briot, *Essai sur la théorie mathématique de la lumière*, p. 97.

1865. M. J. Boussinesq, Essai sur la théorie de la lumière, *C. R.*, LXI.

1865. M. E. Sarrau, Sur la propagation et la polarisation de la lumière dans les cristaux, *C. R.*, LX.

1868. Boussinesq, Addition au mémoire intitulé: Théorie nouvelle des ondes lumineuses, *Liouville J.*, XIII, 313, 340, 425.

1876. L. Sohncke, Zur Theorie des optischen Drehvermögens von Krystallen. *Clebsch, Ann.*, IX.

1877. V. v. Lang, Theorie der Circularpolarisation. *Wien. Ber.*, LXXV.

1882. M. E. Mallard, Ueber die optischen Eigenschaften von krystallisirten Gemengen isomorpher Substanzen und über die Theorie der Circularpolarisation, *Journ. d. Phys.*, X.

1882. E. Ketteler, Theorie der circular und elliptisch polarisirenden Mittel, *Wied. Ann.*.

1883. W. Voigt, Theorie des Lichtes für vollkommen durchsichtige Medien, *Wied. Ann.*

1883. E. Lommel, Das Gesetz der Rotationsdispersion, *Wied. Ann.*, XX.

1884. W. Voigt, Theorie der elektromagnetischen Drehung der Polarisationsebene, *Wied. Ann.*, XXIII.

1884. E. Ketteler, Zur Dispersion des Quarz, *Wied. Ann.*, XXI.

1884. Ch. Soret, Bemerkungen über die Theorie der natürlichen Drehung der Polarisationsebene.

XXIX.

Accidentelle Doppelbrechung.

444. Einleitung.

Einfachbrechende Körper können unter der Einwirkung gewisser Kräfte doppelbrechend werden; man unterscheidet zwei Arten der accidentellen Doppelbrechung:

1. Es kann Doppelbrechung herbeigeführt werden durch bleibende oder vorübergehende Veränderungen, welche Ungleichheiten der Elasticität im Inneren des Körpers zur Folge haben. So durch Einwirkung mechanischer Kräfte, wie Druck oder Zug, so durch rasches Kühlen oder durch eine sich unregelmässig vollziehende Krystallisation. Die mechanischen Kräfte bringen eine vorübergehende Doppelbrechung hervor, das Kühlen und die unregelmässige Krystallisation eine bleibende.

Entwickelt sich an einer von Natur einfachbrechenden Substanz in Folge der Einwirkung jener Kräfte eine accidentelle Doppelbrechung, so kann diese, auch wenn sie sehr schwach ist, mittelst der Erscheinungen der chromatischen Polarisation leicht erkannt werden. Indem Biot eine 2 m lange Glasplatte zwischen Polariseur und Analyseur in Longitudinalschwingungen versetzte, konnte er bei jeder Reibung in der Nähe der Knotenlinien Doppelbrechung wahrnehmen: jenes Bild des Analyseurs, welches bei ruhender Platte ausgelöscht war, erschien wieder während der Bewegung der Platte. Dieser Versuch wurde in neuerer Zeit von E. Mach weiter ausgeführt [1]).

2. Auch durch den Einfluss der Elektricität oder des Magnetismus wird accidentelle Doppelbrechung hervorgebracht. Die Erscheinungen sind von Faraday entdeckt und werden auch an Flüssigkeiten beobachtet.

Wir beschäftigen uns im Folgenden nur mit der ersten Classe der Erscheinungen der accidentellen Doppelbrechung.

---

1) Pogg. Ann., 1872.

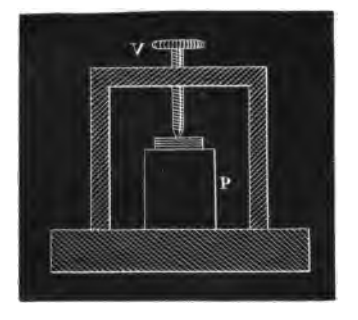
445. Die Experimente Brewster's.

Die ersten Beobachtungen über die durch Druck hervorgebrachte accidentelle Doppelbrechung rühren von Brewster her. Dieser veröffentlichte seine Resultate im Januar 1815 [1]). Die ersten Versuche wurden mit Gelatine angestellt. Diese elastische und durchsichtige Substanz zeigt im gewöhnlichen Zustande keine Doppelbrechung. Uebt man jedoch mit den Fingern einen leisen Druck auf ein Stückchen derselben aus, so ergiebt sich starke Doppelbrechung. Im Polarisationsapparate zeigen die Bilder des Analyseurs lebhafte Farben, welche bei zunehmendem Drucke rasch nach der Newton'schen Reihenfolge variiren.

Der hervorgebrachte Druck muss die Moleculardistanz in der Richtung des Druckes verringern, und wahrscheinlich jene senkrecht zur Richtung des Druckes vergrössern. Es liess sich erwarten, dass solche Körper ein den einachsigen Krystallen analoges Verhalten zeigen, und dass die Achsenrichtung mit der Richtung des Druckes zusammenfallen würde.

Es war natürlich, einen Schritt weiterzugehen und die Versuche auf resistentere Substanzen auszudehnen. Brewster veröffentlichte seine mit gepressten und gedehnten Gläsern angestellten Versuche im Februar 1816 [2]), freilich war seine Methode noch wenig präcise: er presste das Glas einfach mittelst einer Zange. Brachte er das gepresste Glas zwischen Polariseur und Analyseur, so zeigten sich unregelmässige und von der benutzten Stelle des Glases abhängige Farbenerscheinungen. Die Unregelmässigkeit der Erscheinungen hatte seinen Grund in der Art der Ausübung des Druckes.

Fig. 59.



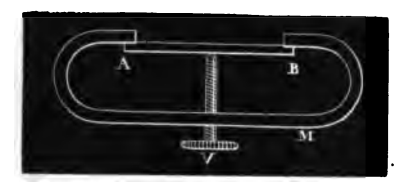
Wird ein rechtwinkeliges Stück Glas, P (Fig. 59), in regelmässiger Weise mittelst der Schraube V in der Richtung senkrecht zu seinen beiden Grundflächen gedrückt, so nimmt man zwischen gekreuzten Nicols ein System farbiger Linien wahr. Unter diesen finden sich schwarze Linien, welche den Uebergängen von Compression zu Dilatation entsprechen. An solchen Uebergangsstellen wechselt die Doppelbrechung das Zeichen: Compression und Dilatation bewirken entgegengesetzte Doppelbrechung.

---

[1]) *Phil. Trans.*, 1815, p. 29, 60. — [2]) Ibid., 1816, p. 46.

Brewster hat noch ein anderes bekanntes Experiment angestellt. Eine an den Enden gestützte Glasplatte *AB*, Fig. 60, wird mittelst einer Schraube *V* gebogen. Im Inneren der Platte giebt es eine Mittellinie, welche weder verlängert noch verkürzt ist und merklich durch den Schwerpunkt des Querschnittes der Platte geht. Die unterhalb gelegenen

Fig. 60.





Molecülfäden sind verkürzt, die oberhalb gelegenen verlängert. Lässt man durch die so gebogene Platte Lichtstrahlen treten, so gewahrt man bei gekreuzten Nicols eine dunkle Linie parallel den gekrümmten Seiten der Platte; diese entspricht dem unveränderten Molecülfaden. Zu beiden Seiten gewahrt man farbige Linien von verschiedener Gestalt.

Betrachten wir einen Molecülfaden, welcher einer isochromatischen Curve des Bildes entspricht. Die Distanzen der Molecüle sind längs dieser Curve verkleinert oder vergrössert, der Faden kann mit einem einachsigen Krystalle verglichen werden, dessen Achse der Richtung der Compression oder Dehnung parallel liegt, d. i. parallel der Tangente der Curve. Man kann ferner mittelst Interposition einer Krystallplatte von bekanntem Zeichen auch das Zeichen der längs dem betrachteten Molecülfaden hervorgebrachten Doppelbrechung erkennen. In dieser Weise konnte Brewster zeigen, dass die Compression des Glases und der einfachbrechenden Substanzen überhaupt, eine Doppelbrechung hervorbringt analog jener eines repulsiven Krystalls, dessen Achse der Richtung der Compression entspricht, und dass die Dehnung im Gegentheile eine Doppelbrechung hervorbringt analog jener eines attractiven Krystalls.

In der Wellentheorie lassen sich aus diesem Gesetze noch die folgenden Schlüsse ziehen. In einem einachsigen Krystalle ist die ausserordentliche Wellenfläche ein Rotationsellipsoid mit den Achsen $2b$ und $2a$, von welchen die erstere, die Umdrehungsachse, der Richtung nach mit der Krystallachse zusammenfällt. b^2 und a^2 sind proportional den Elasticitätskräften des Krystalls, und zwar entspricht b^2 den Schwingungen senkrecht, a^2 jenen parallel zur Krystallachse. Für die repulsiven Krystalle ist $b^2 < a^2$, und folglich ist die optische Elasticität grösser in der Richtung einer Compression und kleiner in der Richtung einer Dilatation.

Brewster ging noch weiter. Indem er die Krümmung und Länge der Platte maass, konnte er die Verlängerung oder Verkürzung der den isochromatischen Linien entsprechenden Molecülfäden bestimmen. Indem er sodann die Farben der isochromatischen Linien mit den Contractionen

und Dilatationen verglich, erkannte er, dass diese Farben in der Reihe der Newton'schen Farben Dicken entsprachen proportional den Contractionen und Dilatationen, was so viel besagt als dass der im Glase zwischen den beiden gebrochenen Strahlen entstehende Gangunterschied der Contraction oder Dilatation proportional ist. Indessen kann dieses Gesetz nur als angenähert durch das Experiment erwiesen angesehen werden.

Brewster hat das letztere Gesetz als geeignet zu dynamometrischen Anwendungen bezeichnet. Die Stärke des Druckes oder Zuges sollte durch die Farben gemessen werden, welche der Körper im polarisirten Lichte zeigt, doch verfolgte er diese Idee nicht weiter.

446. Die Experimente Fresnel's.

Von älteren Versuchen sind nur noch zwei Experimente Fresnel's zu erwähnen. Eines derselben gestattete, durch Compression einfachbrechender Körper im polarisirten Lichte die glatten Farben zu erhalten. Wie Fresnel diesen Versuch anstellte, ist unbekannt. Eine kurze Mittheilung Fresnel's an die Pariser Akademie vom Jahre 1819 gerieth unter den Papieren des ständigen Secretärs Fourier in Vergessenheit und wurde erst 1846 [1]) veröffentlicht.

Das zweite, bekannte, Experiment wurde 1822 [2]) mitgetheilt; durch dasselbe wird die Doppelbrechung in gepressten Gläsern direct nachgewiesen. Vier rechtwinkelige Glasprismen, a, b, c, d, (Fig. 61), ruhen nebeneinander mit ihren Hypotenusenflächen auf einer ebenen Unterlage; die Grundflächen der Prismen sind beiderseits mit Pappendeckel und Stahlplatten belegt. Auf die letzteren wird mittelst einer Schraube ein kräftiger Druck ausgeübt, durch welchen die Prismen sich verkürzen. Man fügt hierauf unter Anwendung von Mastix drei weitere Prismen, m, n, o, und zwei Halbprismen, z und t, hinzu. Blickt man durch die Flächen t und z nach einer 1 Meter entfernten Mire, so sieht man dieselbe doppelt, und die scheinbare gegenseitige Entfernung der beiden Bilder kann 6 oder 7 Minuten betragen. Die beiden Strahlenbüschel, welche diese Bilder hervorbringen, zeigen dieselben Eigenschaften, als wären sie durch ein parallel der Achse geschnittenes Kalkspathprisma gegangen.

Fig. 61.

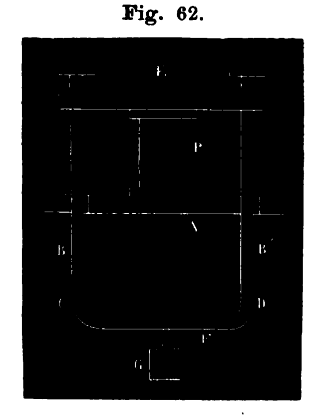
---

[1]) *Mém. de l'Acad. des sc.*, XX, 195. — [2]) *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XX, 376.

447. Die Experimente Wertheim's.

Im Jahre 1854 suchte Wertheim[1]) das erste der beiden Experimente Fresnel's zu reproduciren, bei welchem durch hinreichend regelmässige Compression oder Dilatation die glatten Farben erhalten werden sollten. Er benutzte für die Compression den in Fig. 62 abgebildeten Apparat. Der rechtwinkelige, einfachbrechende Körper P, welcher durch Druck doppelbrechend gemacht werden soll, ruht auf einer an der Wand befestigten Metallplatte A, an welcher zwei Oeffnungen, B und B', angebracht sind. Durch diese gehen die Metallstäbe C und D, welche oben die auf dem Körper P ruhende Platte E und unten das Gewicht G tragen. Das Gewicht G liefert den Druck, welcher auf den Körper P ausgeübt werden soll, und damit dieser Druck sich regelmässig vertheile, bringt man zwischen das Parallelepiped und die Metallplatten E und A zwei Kautschukplatten.

Fig. 62.



Ehe man zur Compression des Glases schreitet, untersucht man, ob dasselbe einfachbrechend ist, was mittelst der Erscheinungen der chromatischen Polarisation geschehen kann. Ist das Glas durch nicht hinlänglich langsames Kühlen etwas doppelbrechend geworden, so kann es in der Regel für den Versuch doch benutzt werden, indem sich in der Mitte ein brauchbares Stück von grösserer Ausdehnung findet.

Benutzt man monochromatisches Licht, so sendet man ein paralleles Bündel polarisirter Strahlen durch das noch nicht comprimirte Glas und stellt den Analyseur auf Auslöschung eines der beiden Bilder. Beginnt man mit der Belastung, so erscheint das verschwundene Bild wieder, während das andere an Intensität verliert. Bei fortgesetzter Belastung kommt es zu einem Verschwinden dieses letzteren Bildes, während das erstere die volle Intensität gewinnt; die Polarisationsebene hat sich um 90 Grade gedreht entsprechend einem Gangunterschied gleich $\frac{\lambda}{2}$ der beiden gebrochenen Strahlen. Man gelangt in gleicher Weise bei gesteigerter Belastung zu Gangunterschieden gleich $\frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}$ u. s. w. Es zeigt sich, dass die Gangunterschiede angenähert den Pressionen proportional sind.

[1]) *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XII, 136.

Man kann in derselben Weise mit weissem Lichte verfahren, indem man von der sensiblen Farbe Gebrauch macht.

Das Zeichen der Doppelbrechung kann durch Interposition einer Krystallplatte von bekanntem Zeichen gefunden werden.

Wertheim hat auch die Wirkung der Dilatation studirt. Er bediente sich hierzu eines Apparates, welcher dem eben beschriebenen ähnlich ist. Das Parallelepiped wurde mit seiner oberen Basis an eine feste, und mit seiner unteren an eine bewegliche, zu belastende, Platte gekittet. Die Grenzen der Belastung sind bei diesem Versuche enger, da die Losreissung zu vermeiden ist. Gleichwohl konnte Wertheim constatiren, dass die Wirkung der Dilatation angenähert gleich und dem Zeichen nach entgegengesetzt jener einer gleichen Compression ist.

Eine aufmerksame Betrachtung der von Wertheim gelieferten Zahlen lehrt, dass das Proportionalitätsgesetz mit einer grösseren Genauigkeit für die Differenzen der Gangunterschiede und der Belastungen gilt, als für diese Grössen selbst. Diese Thatsache kann auf das ursprüngliche Vorhandensein eines geringen Grades von Doppelbrechung im Glase, oder auf die Ungenauigkeit der Bestimmung des ersten Gewichtes zurückgeführt werden.

Aber selbst dann, wenn man die Differenzen in Rechnung zieht, ist die Proportionalität noch keineswegs eine vollkommene, und es liegt nahe, anzunehmen, dass die Gangunterschiede nicht der comprimirenden Kraft, sondern der Compression proportional sei, d. i. der gegenseitigen Annäherung der Molecüle, welche Annäherung selbst nur innerhalb enger Grenzen, die beim Experimente überschritten sein konnten, der comprimirenden Kraft proportional ist.

Alles Uebrige gleich gesetzt, ist der Gangunterschied der Dicke des durchstrahlten Körpers proportional. Ist also jenes Proportionalitätsgesetz richtig, so muss bei ungeänderter Belastung und zunehmender Dicke des Glases der Gangunterschied unverändert bleiben.

Nach seinen ersten Arbeiten glaubte Wertheim, dass zwischen der hervorgebrachten Doppelbrechung und dem Coefficienten der durch Druck oder Zug hervorgebrachten Verkürzung oder Verlängerung eine constante Grössenbeziehung bestehe; indem er jedoch seine Untersuchungen auf schweres Glas, Flussspath, Alaun und Steinsalz ausdehnte, erkannte er, dass dem nicht so sei.

Schliesslich fand Wertheim, dass innerhalb der Grenzen seiner Versuche die durch gedrückte oder gedehnte Körper hervorgebrachten Gangunterschiede der Wellenlänge verkehrt proportional waren.

448. Das Experiment E. Mach's[1]).

Die eben beschriebenen Experimente wurden weiter ausgeführt von E. Mach. Zwischen die gekreuzten Nicols wurde mit dem zu dehnenden Glase zugleich ein passend orientirtes Gypsblättchen eingeschaltet; das Spectrum des durch dieses System durchtretenden Lichtes zeigt eine Serie dunkler Streifen (228). Sobald die Dehnung beginnt, verschieben sich diese Streifen. Durch einen eingeschalteten Quarzcompensator (257) kann man die einer bestimmten Dehnung entsprechende Streifenverschiebung wieder vernichten und die entsprechende ein- oder ausgeschaltete Quarzdicke ablesen.

449. Wirkung der Compression bei Krystallen.

Nachdem man die Wirkung der Compression und Dilatation auf die einfachbrechenden Körper studirt hatte, gelangte man natürlicher Weise zu der Frage, welche Wirkung die Compression und Dilatation an den doppelbrechenden Körpern hervorbringen möge; indessen wurden die ersten Experimente in dieser Richtung schon von Brewster ausgeführt[2]). Indem dieser eine Quarzplatte comprimirte, war die Wirkung dieselbe, als wenn die Dicke der Platte sich vergrössert hätte; hier, wie bei den einfachbrechenden Körpern, erschien die optische Elasticität im Sinne der Compression verhältnissmässig vergrössert.

Brewster's Resultate wurden durch Pfaff[3]) verificirt. Indem dieser einen Quarzkrystall entsprechend comprimirte, gelang es ihm, die kreisförmigen isochromatischen Curven des Krystalls in lemniskatenförmige Curven zu verwandeln; der einachsige Quarz war demnach durch Druck zweiachsig geworden.

Diese Versuche wurden von E. Mach[4]) fortgesetzt. Dieser sah, wie Pfaff, in dem Achsenbilde einer senkrecht zur Achse geschnittenen Quarzplatte den Mittelpunkt des Ringsystems sich in die beiden Pole des zweiachsigen Bildes trennen und nach der Richtung des Druckes auseinandertreten; hierbei hatten die beiden Pole des zweiachsigen Ringsystems immer dieselbe Farbe wie der Mittelpunkt des einachsigen. Demnach ist die Drehung der Polarisationsebene vom Achsenwinkel unabhängig.

Lässt man circulares Licht auf den Quarz fallen, so wird das einachsige Bild im Mittelpunkte weiss, weil dort nur ein circularer Strahl durchgeht und die Interferenz aufhört; es entsteht eine Spiralfigur. Bei Anwendung von Druck deformirt sich die Spiralfigur, und die beiden

---

[1]) Pogg. Ann., 1872. — [2]) *Edinb. Trans.*, VIII, 281. — [3]) Pogg. Ann., CVII, 333; CVIII, 596. — [4]) Ibid. 1875.

Pole des nun zweiachsigen Krystalls erscheinen ebenfalls weiss. Der gedrückte Quarz verhält sich also nach den Richtungen der beiden optischen Achsen analog wie der ungedrückte nach der Richtung der einen optischen Achse.

Das senkrecht durch die Quarzplatte hindurchgehende Licht geht vor dem Drucke parallel der Achse des Quarzes, nach senkrecht zur Achse ausgeübtem Drucke aber nicht mehr parallel einer der Achsen des nunmehr zweiachsigen Krystalls. Dieses Licht erfährt nun Veränderungen. Sobald man drückt, treten Farben auf, welche, eine linksdrehende Quarzplatte vorausgesetzt, einer Rechtsdrehung des Ocularnicols entsprechen. Der Quarz wird durch den Druck noch mehr linksdrehend.

Erfährt also eine senkrecht zur Achse geschnittene Quarzplatte einen Druck senkrecht zur Achse, so zeigt sie eine Vergrösserung des Drehungsvermögens für das senkrecht hindurchgehende Licht. Aber eine reine Drehung der Polarisationsebene findet hier nicht mehr statt. Die Farbe des ungedrückten Quarzes wird weiss bei Anwendung von circularem Licht. Es treten aber sofort wieder Farben auf, wenn man den Quarz drückt. Es findet also bei gedrücktem Quarz die Zerlegung des senkrecht durchgehenden Lichtes in zwei entgegengesetzte circulare Strahlen nicht mehr statt. Vielmehr gehen jetzt zwei entgegengesetzt elliptisch polarisirte Strahlen durch, wie bei einer schief gegen die Achse geschnittenen Platte, wie man sich durch Einfügung einer $\frac{\lambda}{4}$-Platte überzeugen kann. Durch die Interferenz der beiden elliptischen Schwingungen entsteht ebenfalls ein elliptisch polarisirtes Licht, dessen grössere Bahnachse im Sinne des Strahles von grösserer Fortpflanzungsgeschwindigkeit gedreht ist.

Durch Untersuchung mit dem Jamin'schen Compensator unter Hervorrufung der Talbot'schen Linien konnte nachgewiesen werden, dass im linksdrehenden Quarz der rechtscirculare Strahl durch Druck senkrecht auf die Achse mehr verzögert wird, wie der linkscirculare, und dass dadurch die Vergrösserung des Gangunterschiedes zu Stande kommt. Der Linkscircularstrahl wandelt sich in einen linkselliptischen um, dessen grosse Achse der Bewegungsbahn der Druckrichtung parallel ist. In der Druckrichtung wird zwar die optische Elasticität verkleinert, aber in der zum Druck senkrechten Richtung ist dies in noch höherem Maasse der Fall.

Später studirte Pfaff den Einfluss der Temperaturveränderung und des Druckes auf die Doppelbrechung vieler Krystalle, indem er schwach keilförmig geschnittene Stücke derselben im Polarisationsapparate erhöhter Temperatur oder allseitigem Drucke aussetzte und die Verschiebung der Streifen beobachtete [1]). Es ergab sich in vielen Fällen eine Zunahme, in vielen eine Abnahme der Doppelbrechung.

[1]) Sitzungsber. d. phys. med. Soc. zu Erlangen, 1878.

H. Bücking[1]), welcher die Versuche Pfaff's, Mach's und Anderer wiederholte, fand, wie Mach, dass wenn auf senkrecht zur Hauptachse geschnittene Quarzplatten ein senkrecht zur Hauptachse gerichteter Druck ausgeübt wird, die optische Achsenebene des bei ausgeübtem Drucke zweiachsigen Quarzes parallel zur Druckrichtung steht, fand hingegen beim Turmalin die Achsenebenen senkrecht zur Druckrichtung.

F. Glocke[2]) fand, dass die Achsenebene eines durch Druck senkrecht zur Achse zweiachsig gewordenen, ursprünglich einachsigen Krystalls in die Richtung des Druckes fällt, oder auf ihr senkrecht steht, je nachdem der Krystall positiv oder negativ ist. Bei negativen Krystallen ist die Achsenrichtung die Richtung der grössten optischen Elasticität, und durch einen Druck senkrecht zur Achse wird in der Druckrichtung die Elasticität verhältnissmässig etwas vergrössert; die Ebene der Achsen der grössten und der kleinsten Elasticität, und damit die Ebene der beiden Achsen des durch Druck zweiachsig gewordenen Krystalls, steht demnach auf der Druckrichtung senkrecht. Bei positiven Krystallen ist die Achsenrichtung die Richtung der kleinsten Elasticität, während nach dem Drucke die Druckrichtung die Richtung der grössten Elasticität wird; demnach liegt die Achsenebene des durch Druck zweiachsig gewordenen Krystalls parallel mit der Druckrichtung.

450. Gekühlte Gläser. Seebeck's und Brewster's Experimente.

Das rasche Kühlen verursacht dieselben Erscheinungen wie Compression und Dilatation, doch sind in diesem Falle die Erscheinungen bleibend. Bei einem rasch gekühlten Körper besitzen verschiedene Richtungen nicht mehr dieselben Eigenschaften; es kommen unregelmässige Spannungen vor und es zeigt sich Doppelbrechung.

Derlei Erscheinungen wurden zuerst von Seebeck im Jahre 1812 beobachtet und in Schweigger's Journal in den Jahren 1813, 1814 und 1815[3]) veröffentlicht. Seebeck gab lediglich die experimentellen Thatsachen, ohne zu einer Erklärung derselben zu gelangen.

Er versetzte Glasplatten von verschiedener Gestalt in Rothgluth und liess sie hierauf unter lebhaftem Luftwechsel rasch abkühlen: so präparirte Platten zeigten im Polarisationsapparate lebhaft gefärbte Figuren, deren Gestalt und Farben sowohl mit der Stellung des Analyseurs, als mit der Gestalt und der Orientirung der Platte wechselten. Seebeck erhielt solche farbige Figuren auch mit geschmolzenem und rasch gekühltem

[1]) Journ. f. Mineral., I, 1881. — [2]) Neues Jahrb. f. Mineral., II, 1881. — [3]) Schweigger's Journ., VII, 259, 382; XI, 471; XII, 1.

Borax, mit rasch krystallisirtem Steinsalz und mit rasch fest gewordenem Gummi arabicum. Er begnügte sich anfangs damit, den Erscheinungen einen Namen zu geben: er nannte sie entoptische Figuren. Später erkannte er die wahre Ursache, doch war ihm hierin Brewster schon vorangegangen mit einer im Jahre 1814 veröffentlichten Abhandlung [1]). 1816 führte Brewster seine experimentellen Arbeiten über den Gegenstand weiter aus [2]) und erklärte die Erscheinungen aus der durch die rasche Kühlung des Glases entstehenden Doppelbrechung. Er zeigte, dass bei langsamer Kühlung des Glases die Erscheinungen ausbleiben.

Brewster machte auch die Bemerkung, dass eine Glasplatte während des Erhitzens oder Abkühlens temporäre Doppelbrechung zeigt. Es scheint in diesem Falle das neue moleculare Gleichgewicht erst allmälig einzutreten.

Die Krystallisation hat oft ähnliche Wirkungen wie das rasche Kühlen, ja man findet selten Krystalle des regulären Systems, welche sich nicht bei Anwendung eines empfindlichen Polariskops, wie das von Bravais, als doppelbrechend erwiesen; dies hat Bravais selbst constatirt [3]). Man muss diese Erscheinungen einer Unregelmässigkeit der Krystallisation zuschreiben, welche selten gänzlich fehlt.

451. Lamellare Polarisation.

Auf ähnliche Ursachen ist eine Classe von Erscheinungen zurückzuführen, welche Biot entdeckt und Lamellare Polarisation genannt hat [4]). Indem er Alaunkrystalle prüfte, welche dem regulären Systeme angehören, entdeckte er Spuren von Doppelbrechung. Man kann dies damit in Verbindung bringen, dass Alaunkrystalle oft in ihrem Inneren eine Lamellenbildung erkennen lassen. Man kann annehmen, dass in einer Richtung senkrecht zu den Ebenen der Lamellen die Moleculardistanz eine grössere ist als parallel zu den Lamellen, und kann hierauf die Doppelbrechung zurückführen.

Man kann weiter annehmen, dass die lamellare Structur auch vorhanden sein könne ohne sichtbar zu sein, und dass auch in diesem Falle Doppelbrechung entstehen könne. So constatirte Brewster das Vorhandensein der Doppelbrechung an mehreren Krystallen des regulären Systems, wie Flussspath, Steinsalz, Salmiak, Analcim [5]).

Organische Gebilde, wie Federkiele, Haare, Knorpel etc., zeigen Doppelbrechung, welche auf lamellare Structur zurückzuführen ist. Brewster überzeugte sich von der Doppelbrechung solcher Substanzen

---

[1]) *Phil. Trans.*, 1815, p. 1. — [2]) Ibid. 1816, p. 46. — [3]) *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XLIII, 129. — [4]) *C. R.*, XII, 1121; *Mém. de l'Acad. des sc.*, XVIII, 541. — [5]) *Phil. Trans.*, 1815, p. 29; *Edinb. Trans.*, X,

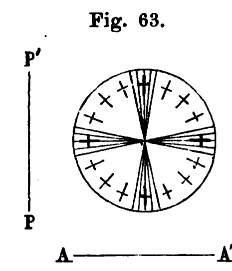
indem er dieselben in ein mit zwei parallelen Plangläsern geschlossenes und mit einer Flüssigkeit gefülltes Gefäss brachte und sodann polarisirtes Licht hindurchtreten liess [1]). Gelatine, Harze und andere amorphe Substanzen, welche von Natur einfachbrechend sind, können doppelbrechend werden, wenn sie unter Umständen erstarren, welche ihnen eine lamellare Structur verleihen oder sie den gekühlten Gläsern ähnlich machen.

Einen instructiven Versuch hat V. v. Lang angegeben. Presst man ein Convexglas an ein Planglas, so treten Spannungen auf, welche zur Folge haben, dass das Linsensystem zwischen gekreuzten Nicols ein dunkles Kreuz zeigt. Man muss annehmen, dass an jeder Stelle des Plattensystems die Spannungen bezüglich des Berührungspunktes der Gläser in radialer und in tangentialer Richtung verschieden sind, dass jedes Element des Plattensystems doppelbrechend wirkt, und dass die Hauptschnitte radial und tangential liegen. Bewegt man das Plattensystem zwischen Polariseur und Analyseur, so bewegt sich das Kreuz mit. In vielen analogen Fällen findet dasselbe statt.

Eine solche kreuzförmige Interferenzerscheinung zeigen auch viele organische Körper, wenn man dieselben zwischen Polariseur und Analyseur bringt, so Stärkemehlkörner [2]) und die Krystalllinsen der Fischaugen.

Die Krystalllinse des Auges besteht aus radial angeordneten Fasern. Diese sind doppelbrechend, und zwar sind für die zwei senkrecht zur Längsrichtung derselben hindurchgehenden Lichtstrahlen die Polarisationsebenen beziehungsweise parallel und senkrecht zu der Längsachse. Betrachtet man daher eine Krystalllinse im polarisirten Lichte, so dass dasselbe parallel der Achse durch die Linse geht, so erweist sich jeder Radius der Linse als doppelbrechend, die eine Polarisationsebene enthält den betrachteten Radius, die andere steht auf demselben senkrecht, wie dies Fig. 63 versinnlicht, in welcher die Schenkel der kleinen Kreuze die Richtungen der entsprechenden Polarisationsebenen anzeigen. Bringt man die Linse zwischen gekreuzte Nicols, deren Polarisationsebenen parallel AA' und PP' liegen, so muss ersichtlich das dunkle Kreuz entstehen. Der Mittelpunkt des Kreuzes fällt in die Achse der Linse, die Schenkel desselben sind parallel AA' und PP'.

Fig. 63.



V. v. Lang (l. c.) hat in ähnlicher Weise auch die sogenannten Haidinger'schen Farbenbüschel zu erklären versucht. Er nimmt nämlich an, dass die einzelnen Fasern der Linse nicht nur doppelbrechend, sondern auch dichromatisch sind, so dass der Strahl, welcher parallel

[1]) *Phil. Trans.*, 1816, p. 311. *Ann. de chim. et de phys.*, (2), IV, 431. *Phil. Trans.*, 1833, p. 323; 1836, p. 35; 1837, p. 253. — [2]) V. v. Lang, Pogg. Ann., CXXIII.

der Längsrichtung der Fasern polarisirt ist, in Folge von Absorption gelblich, der andere aber bläulich gefärbt wird. Fig. 63 giebt nun zugleich auch die Färbung, welche die zwei durch einen Radius der Krystalllinse gehenden Strahlen haben müssen, indem die längeren Striche der einzelnen Kreuze die gelbliche Färbung bedeuten, die kürzeren Striche die bläuliche. Wird das Licht vor der Linse parallel AA' polarisirt, so werden die Radien der Linse, welche nahezu parallel AA' sind, gelblich gefärbt erscheinen, indem für diese Radien der Strahl, welcher durch die Linse bläulich gefärbt wird, durch die polarisirende Vorrichtung beseitigt ist; ebenso werden die Radien, welche nahe senkrecht zu AA' liegen, bläulich gefärbt sein. Durch den Umstand, dass die Krystalllinse vom Centrum gegen die Peripherie an Dicke abnimmt, muss die Färbung in der Nähe der Achse der Linse am lebhaftesten sein, indem daselbst mehr absorbirende Theilchen zu durchsetzen sind.

Indessen stösst diese Erklärung auf Schwierigkeiten, und Helmholtz[1]) hat gezeigt, dass nicht die Doppelbrechung der Linse, sondern jene der gelbgefärbten Elemente des gelben Flecks die Wirkung hervorbringe, und dass der ausserordentliche Strahl von blauer Farbe stärker absorbirt werde, als der ordentliche Strahl. Helmholtz wiederlegte auch die von Erlach angedeutete und von Jamin specieller ausgeführte Erklärung, nach welcher die Büschel auf die vielfachen Brechungen zurückgeführt werden, die das Licht an den brechenden Flächen des Auges erleidet. Vorher hatten schon Stokes, Brewster und Maxwell auf das Ungenügende dieser Erklärung aufmerksam gemacht.

Hierher gehört auch die Anwendung des Polarisationsmikroskopes zum Studium der Knochenstructur[2]).

452. Theoretisches. Das Deformationsellipsoid.

Neumann[3]) hat es versucht, eine Theorie der Erscheinungen der accidentellen Polarisation zu geben, doch ist seine Theorie nicht frei von Einwürfen. Um dies deutlich zu machen, möge zunächst Einiges über die Deformation elastischer Körper vorausgeschickt werden. Wird ein homogener, isotroper Körper unter der Einwirkung äusserer Kräfte deformirt, so kann man gleichwohl die Deformation eines kleinen Theiles des Körpers als eine homogene Deformation ansehen. Eine solche homogene Deformation kann stets auf drei Dehnungen oder Zusammenziehungen (letztere kann als eine negative Dehnung aufgefasst werden) in drei auf einander senkrechten Richtungen zurückgeführt werden (161).

---

[1]) Phys. Optik, S. 421. — [2]) V. v. Ebner, Wien. Akad. Ber., LXXII, 3. Abthl. — [3]) Pogg. Ann., LIV, 499.

Bei der homogenen Deformation bleiben alle, ursprünglich von einem Punkte des Körpers aus gleich lang gezogenen Strahlen auch nach der Deformation geradlinig, doch ändern sich ihre relativen Richtungen, und ihre Endpunkte liegen nicht mehr auf einer Kugelfläche, sondern auf einem, im Allgemeinen dreiachsigen Ellipsoide, dem *Deformationsellipsoide*. Die drei Achsen dieses Ellipsoides bestimmen die drei *Hauptdilatationen*, und sie stehen auch im ursprünglichen Zustande des Körpers auf einander senkrecht.

Bei der Deformation eines Körpers ist zwar die Deformation eines kleinen Theiles des Körpers als eine homogene Deformation anzusehen, doch erfährt dieser Theil des Körpers im Allgemeinen zugleich eine Verschiebung und eine Drehung.

Nimmt man die drei Hauptachsen der Deformation als Achsen des Coordinatensystems, und zieht man in dem noch nicht deformirten Körper vom Ursprunge in der Richtung α, β, γ eine Linie von der Länge r, so sind die anfänglichen Coordinaten des Endpunktes der Geraden:

$$x = r \cos \alpha$$
$$y = r \cos \beta$$
$$z = r \cos \gamma.$$

Nach der Deformation sind die Coordinaten des Endpunktes der gedachten Linie:

$$x' = (1 + \varepsilon) r \cos \alpha$$
$$y' = (1 + \varepsilon') r \cos \beta$$
$$z' = (1 + \varepsilon'') r \cos \gamma,$$

wenn ε, ε', ε'' die drei Hauptdilatationen sind. Die neue Länge der Geraden ist demnach:

$$r' = r \cdot \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 \cos^2 \alpha + (1 + \varepsilon')^2 \cos^2 \beta + (1 + \varepsilon'')^2 \cos^2 \gamma},$$

und die neue Lage der Geraden ist bestimmt durch:

$$\cos \alpha' = \frac{(1 + \varepsilon) \cos \alpha}{\sqrt{(1 + \varepsilon)^2 \cos^2 \alpha + (1 + \varepsilon')^2 \cos^2 \beta + (1 + \varepsilon'')^2 \cos^2 \gamma}} \qquad \text{(A)}$$

und zwei analoge Gleichungen.

Aehnlich verhält es sich mit einer Ebene. Ist vor der Deformation

$$\cos \alpha \, x + \cos \beta \, y + \cos \gamma \, z = 0$$

die Gleichung einer durch den Ursprung gehenden Ebene des Körpers, und gehen die Coordinaten x, y, z eines Punktes der Ebene während der Deformation über in x', y', z', so hat man:

$$x' = x(1 + \varepsilon)$$
$$y' = y(1 + \varepsilon')$$
$$z' = z(1 + \varepsilon'').$$

Die Gleichung der Ebene nach der Deformation ist

$$\frac{\cos\alpha}{1+\varepsilon}x' + \frac{\cos\beta}{1+\varepsilon'}y' + \frac{\cos\gamma}{1+\varepsilon''}z' = 0.$$

Die Ebene ist zwar eine solche geblieben, aber die Neigungswinkel ihrer Normale gegen die Achsen sind nunmehr gegeben durch

$$\cos\alpha' = \frac{\cos\alpha}{(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{(1+\varepsilon)^2} + \frac{\cos^2\beta}{(1+\varepsilon')^2} + \frac{\cos^2\gamma}{(1+\varepsilon'')^2}}} \cdot \quad \text{(B)}$$

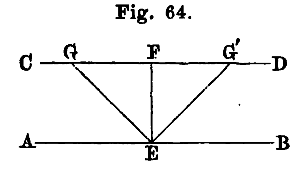
und zwei analoge Gleichungen.

Jedes dreiachsige Ellipsoid zeigt zwei Kreisschnitte, deren Ebenen durch die mittlere Achse des Ellipsoides gehen. Es folgt, dass es bei jeder homogenen Deformation zwei Ebenen des Körpers giebt, in welchen zwar möglicher Weise Dilatation oder Contraction, aber keine Verzerrung stattfindet.

Zu den homogenen Deformationen gehört auch die einfache Schiebung. Diese tritt ein, wenn eine Ebene des Körpers fest und unverändert bleibt, während die übrigen, ihr parallelen Ebenen, ohne ihren Abstand von der festen Ebene zu verändern, sämmtlich in derselben Richtung so gleiten, dass die zurückgelegten Wege den Abständen von der festen Ebene proportional sind. Denkt man die gleitenden Ebenen senkrecht auf der Ebene der Figur, und die Richtung der Bewegung in der Ebene der Figur, so heisst die Ebene der Figur die Ebene der Schiebung.

Die feste Ebene und jede mit ihr parallele Ebene erfährt keine Deformation; sie entspricht einem der beiden Kreisschnitte des Deformationsellipsoides. Um die dem anderen Kreisschnitte entsprechende zweite Schaar paralleler Ebenen zu finden, welche ebenfalls keine Deformation erfahren, kann die folgende Betrachtung dienen.

Fig. 64.



Es sei, Fig. 64, die Ebene der Figur zugleich die Ebene der Schiebung, AB die feste Ebene, CD eine Ebene parallel mit AB, EF der Abstand der beiden Ebenen, EG eine Gerade, welche durch die Schiebung der Länge nach nicht verändert wird und in die Lage EG' gelangt. Es wird dann die Ebene EG ebenfalls keine Deformation erfahren.

Es ist nun leicht, in diesem Falle die Achsen des Deformationsellipsoides zu finden. Die mittlere Achse, welche keine Längenveränderung erfährt, steht auf der Ebene der Schiebung senkrecht; die Achse der Dilatation und die Achse der Contraction liegen in der Ebene der Schiebung und halbiren die beiden Winkel der beiden Ebenen, welche keine Deformation erfahren und den Kreisschnitten des Deformationsellipsoides parallel sind.

Sind $1+\varepsilon$, $1+\varepsilon'$, $1+\varepsilon''$ die Längen der Achsen des Deformationsellipsoides bezogen auf eine Kugel vom Radius 1, so ist in dem gegebenen Falle

$$\varepsilon' = 0,$$

und da keine Volumveränderung vor sich geht,

$$(1+\varepsilon)(1+\varepsilon')(1+\varepsilon'') = 1$$

oder

$$(1+\varepsilon)(1+\varepsilon'') = 1.$$

Ist also ε, entsprechend einer Elongation, positiv, so muss ε'' negativ sein. Man nennt das Verhältniss $1+\varepsilon : 1$ das Verhältniss der Schiebung. Unter der Grösse der Schiebung versteht man das Verhältniss $\frac{GG'}{FE}$, Fig. 65.

Fig. 65.

Legt man durch A, B, G, G' einen Halbkreis, Fig. 65, und verbindet man G und G' mit A und B, so sind GA, GB die Hauptachsen vor der Schiebung, und $G'A$, $G'B$ nach der Schiebung. Man findet nun leicht die Grössenbeziehung, welche zwischen der Grösse der Schiebung und dem Verhältnisse der Schiebung besteht. Es ist nämlich die Grösse der Schiebung

$$s = 2\cdot\frac{GF}{FE} = 2 . \cot 2\, GAB$$
$$= \cot GAB - \operatorname{tang} GAB,$$

also

$$s = 1 + \varepsilon - \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

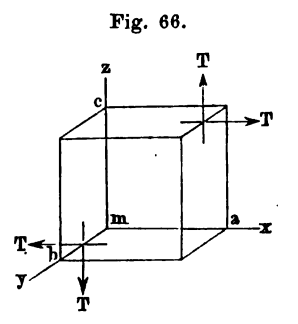
Bei der homogenen Deformation erfahren drei Schaaren von Ebenen, welche auf den drei Hauptachsen senkrecht stehen, keine Schiebung, während die Schiebung jeder anderen Schaar paralleler Ebenen aus den Gleichungen (A) und (B) gerechnet werden kann.

453. Die Sätze vom Würfel und vom Tetraëder.

Wir wollen uns nun mit den Kräften beschäftigen, welche im Inneren des Körpers wirken. Betrachten wir daselbst ein Flächenelement, und denken wir uns den Theil des Körpers, welcher auf der einen Seite des Flächenelementes liegt, entfernt, so müssen wir, wenn wir das Gleichgewicht erhalten wollen, an dem Flächenelemente eine Kraft anbringen, welche die Wirkung des beseitigten Theiles des Körpers ersetzt. Diese Kraft kann auf dem Flächenelemente senkrecht stehen oder gegen das-

selbe geneigt sein. Im letzteren Falle kann sie zerlegt werden in eine normale und eine tangentiale Kraft. Die normale Composante kann, je nachdem sie nach der einen oder anderen Seite wirkt, eine Druck- oder eine Zugkraft sein. Die auf das Flächenelement wirkende Kraft variirt mit dem betrachteten Punkte des Körpers und mit der Richtung des Flächenelementes. Legen wir, Fig. 66, durch den betrachteten Punkt m des Körpers drei rechtwinkelige Achsen, mx, my, mz, tragen wir auf denselben die unendlich kleinen Längen a, b, c ab, welche wir der Einfachheit wegen als gleich gross annehmen wollen, und construiren wir mit diesen drei Längen einen Würfel. Soll Gleichgewicht sein, so müssen die auf einen solchen Würfel wirkenden Kräfte sich das Gleichgewicht halten.

Fig. 66.



Auf jede der sechs Flächen des Würfels wirkt eine Kraft, welche wir in drei Composanten parallel den drei Achsen zerlegen können. Die Angriffspunkte der Kräfte dieser 18 Kraftcomposanten sind die Mittelpunkte der Flächen des Würfels. Jene sechs Composanten, welche auf den Flächen senkrecht stehen, heben sich paarweise gegenseitig auf. Die 12 übrigen Composanten wirken tangential und bilden drei Paar Kräftepaare, deren Achsen die Richtung der drei Kanten des Würfels haben. Betrachten wir beispielsweise die beiden Kräftepaare, deren Achse mit der y-Richtung zusammenfällt, so sehen wir unmittelbar, dass die vier in der Fig. 66 mit T bezeichneten Kräfte der beiden Paare, nämlich die auf die beiden Flächen (zy) parallel mit mz wirkenden und die auf die beiden Flächen (yx) parallel mit mx wirkenden Kräfte, unter einander gleich sein müssen. Ebenso verhält es sich mit den übrigen zwei Paar Kräftepaaren.

Es reduciren sich also die parallel den Achsen auf die Flächenelemente wirkenden Kraftcomposanten auf nur sechs der Grösse nach verschiedene Composanten. Bezeichnen wir diese mit A, B, C, D, E, F, so gelangen wir zu der folgenden Tabelle:

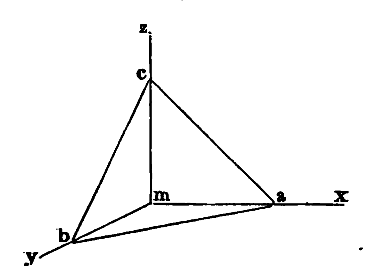
Componenten der Reaction		Ebenen, auf welche die Kraft wirkt	Richtung der Kraft
Normal	A	$y\,z$	x
	B	$z\,x$	y
	C	$x\,y$	z
Tangential	D	$\begin{cases} x\,y \\ x\,z \end{cases}$	$\begin{cases} y \\ z \end{cases}$
	E	$\begin{cases} y\,x \\ y\,z \end{cases}$	$\begin{cases} z \\ x \end{cases}$
	F	$\begin{cases} z\,x \\ z\,y \end{cases}$	$\begin{cases} x \\ y \end{cases}$

Die normalen Kräfte A, B, C pflegt man positiv zu rechnen, wenn dieselben Zugkräfte sind, negativ, wenn Druckkräfte.

Man kann ferner den Würfel so in den Körper legen, dass die Seiten des Würfels und die Achsen des Coordinatensystems der Richtung nach mit den Achsen des Deformationsellipsoides zusammenfallen. Dann verschwinden die tangentialen Kräfte D, E, F.

Der Satz vom Parallelepiped rührt von Cauchy her. Dieser ging noch weiter. Indem er an Stelle des Parallelepipeds ein Tetraëder setzte, gelangte er zu einem zweiten Satze, welcher eine geometrische Darstellung der Kraftverhältnisse gestattet.

Fig. 67.



Ziehen wir von dem betrachteten Punkte m, Fig. 67, die drei rechtwinkeligen Achsen, und tragen wir auf denselben beliebige Strecken a, b, c ab. Die drei Punkte, zu welchen wir so gelangen, bilden mit dem Punkte m die Ecken eines Tetraëders. Bezeichnen wir mit ω die Fläche abc, mit $P\omega$ die Kraft, welche auf die Fläche ω wirkt, also mit P den Druck bezogen auf die Flächeneinheit, bezeichnen wir ferner mit ω', ω'', ω''' die drei Seitenflächen des Tetraëders senkrecht zu den Achsen der x, y und z, mit λ, μ, ν die Richtung der Kraft $P\omega$, und mit α, β, γ die Richtung der Normale der Basis mit den Achsen. Die erste Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes des Tetraëders, welche ausdrückt, dass die Summe der Composanten parallel der x-Achse der Null gleich sein muss, ist mit Rücksicht auf die letzte Tabelle:

$$P\omega\cos\lambda = A\omega' + F\omega'' + E\omega'''.$$

Da ferner

$$\omega' = \omega\cos\alpha,\quad \omega'' = \omega\cos\beta,\quad \omega''' = \omega\cos\gamma,$$

so wird die vorstehende Gleichung:

$$P\cos\lambda = A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Man wird gleicher Weise für die y-Achse und die z-Achse finden:

$$P\cos\mu = F\cos\alpha + B\cos\beta + D\cos\gamma \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$P\cos\nu = E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Hat man überdies die Achsen des Coordinatensystems den Achsen des Elasticitätsellipsoides parallel gelegt, so hat man einfach

$$P\cos\lambda = A\cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots (1\,a)$$

$$P\cos\mu = B\cos\beta \quad \ldots\ldots\ldots (2\,a)$$

$$P\cos\nu = C\cos\gamma \quad \ldots\ldots\ldots (3\,a)$$

Construirt man nun die Fläche zweiten Grades

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 1,$$

bezeichnet man mit r den der Richtung α, β, γ entsprechenden Radius dieser Fläche, mit φ, ψ, θ, p die Winkel mit den Achsen und die Länge des Lothes, gefällt vom Ursprunge auf die Tangentialebene des Punktes dieser Fläche, in welchem sie von dem Radius r geschnitten wird, so besteht bekanntlich die Relation

$$\left.\begin{aligned} A.\cos\alpha + F.\cos\beta + E.\cos\gamma &= \frac{\cos\varphi}{p\,r} \\ F.\cos\alpha + B.\cos\beta + D.\cos\gamma &= \frac{\cos\psi}{p\,r} \\ E.\cos\alpha + D.\cos\beta + C.\cos\gamma &= \frac{\cos\theta}{p\,r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

Setzt man (1), (2), (3) nach (4), so erhält man

$$P.\cos\lambda = \frac{\cos\varphi}{p\,r}$$

$$P.\cos\mu = \frac{\cos\psi}{p\,r}$$

$$P.\cos\nu = \frac{\cos\theta}{p\,r},$$

und es ergiebt sich aus diesen Gleichungen weiter

$$P = \frac{1}{pr} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

und

$$\lambda = \varphi,\quad \mu = \psi,\quad \nu = \theta \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Das heisst: Die Abhängigkeit der auf ein unendlich kleines Flächenelement im Inneren des Körpers wirkenden Kraft von der Richtung dieses Elementes ist durch eine Fläche zweiten Grades graphisch dargestellt; zieht man von dem Flächenelement aus und senkrecht zu diesem eine Gerade r bis zum Durchschnitte mit der oben definirten Fläche zweiten Grades, legt man ferner im Durchschnittspunkte eine tangirende Ebene an die Fläche zweiten Grades und zieht man die Normale p vom Flächenelemente nach der tangirenden Ebene, so ist die auf das Flächenelement wirkende Kraft der Richtung nach durch die Richtung der Normale p gegeben und der auf die Flächeneinheit bezogenen Grösse nach durch das Product $\frac{1}{pr}$.

In dem betrachteten einfacheren Falle hat man die Kegelfläche

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{K})$$

Sind A, B, C positiv, d. h. sind die drei Hauptkräfte sämmtlich Zugkräfte, so ist die Kegelfläche (K), durch welche die Zugkräfte dargestellt werden, ein Ellipsoid. Ist eine der drei Grössen negativ, die anderen positiv, so hat man ein Hyperboloid mit einer Höhlung, sind zwei der drei Grössen negativ, ein zweiflächiges Hyperboloid. Sind alle drei Normalzugkräfte negativ, so empfiehlt es sich, dieselben als positive Druckkräfte anzusehen. Ist eine der drei Hauptzugkräfte der Null gleich, so erhält man eine Cylinderfläche, deren Basis die Gestalt eines Kegelschnittes hat. Verschwinden zwei von den drei Kräften, d. h. hat man eine einfache Dehnung, so degenerirt die Fläche zweiten Grades in zwei Ebenen.

Es giebt also immer drei auf einander senkrechte Lagen des Flächenelementes, für welche die Kraft auf dem Flächenelemente senkrecht steht. Die drei Kräfte, welche auf ihren Flächenelementen senkrecht stehen und der Richtung nach mit den drei Achsen der oben abgeleiteten Fläche zweiten Grades zusammenfallen, heissen die Hauptzugkräfte oder Hauptdruckkräfte.

Vergleicht man die in Bezug auf die Kräfte erhaltenen Resultate mit den für die Deformation erhaltenen, so sieht man, dass die Achsen der Hauptkräfte der Richtung nach mit den Achsen des Deformationsellipsoides zusammenfallen müssen. Man kann die Hauptzugkräfte als Functionen der Hauptdilatationen ansehen, und, wenn die Deformation eine geringe ist, ist diese Abhängigkeit eine lineare.

Bezeichnen wir also durch p, p', p'' die Hauptzugkräfte, durch $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ die Hauptdilatationen, und durch k, k', k'' Coefficienten, welche für den Körper constant sind, so können wir schreiben

$$p = k\varepsilon + k'\varepsilon' + k''\varepsilon''.$$

In Folge der Symmetrie kann weiter $k' = k''$ gesetzt werden und man erhält

$$p = k\varepsilon + h(\varepsilon' + \varepsilon'').$$

Gleicher Weise findet man

$$p' = k\varepsilon' + h(\varepsilon + \varepsilon'')$$
$$p'' = k\varepsilon'' + h(\varepsilon' + \varepsilon).$$

Eine Kugel vom Radius 1 wird durch die Deformation in ein Ellipsoid verwandelt, dessen Achsen $1 + \varepsilon$, $1 + \varepsilon'$, $1 + \varepsilon''$ sind. Das Verhältniss der cubischen Ausdehnung des Körpers ist demnach

$$\frac{4}{3}\pi : \frac{4}{3}\pi(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon')(1 + \varepsilon''),$$

oder für eine kleine Deformation

$$1 : 1 + (\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'').$$

Bezeichnet man die cubische Ausdehnung durch v,

$$v = \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'',$$

so werden die obigen Gleichungen

$$p = (k - h)\varepsilon + hv$$
$$p' = (k - h)\varepsilon' + hv$$
$$p'' = (k - h)\varepsilon'' + hv.$$

Cauchy hat diejenige Grösse mit h bezeichnet, welche wir $k - h$ genannt haben, und mit k jene, welche wir h genannt haben. Nehmen wir die Cauchy'sche Bezeichnung an, so werden die vorstehenden Gleichungen

$$p = h\varepsilon + kv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$p' = h\varepsilon' + kv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$
$$p'' = h\varepsilon'' + kv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Die Kenntniss der Coefficienten h und k gestattet, die Deformation eines Körpers zu bestimmen, wenn die äusseren Kräfte gegeben sind. Betrachten wir beispielsweise einen cylinderförmigen Körper, welcher im Sinne seiner Achse durch eine auf seine Grundflächen wirkende Kraft P gedrückt oder gedehnt ist. Eine der drei Hauptkräfte wirkt offenbar in der Richtung der Achse des Cylinders. Die beiden anderen Hauptkräfte, welche auf der Achse des Cylinders senkrecht stehen, sind nothwendig der Null gleich. Man hat demnach, wenn die in der Richtung der Achse des Cylinders wirkende Kraft, bezogen auf die Flächeneinheit, mit P bezeichnet wird,

$$P = h\varepsilon + kv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Da $\varepsilon' = \varepsilon''$, kann man setzen

$$\varepsilon + 2\varepsilon' = v$$

oder

$$\varepsilon' = \frac{v - \varepsilon}{2}.$$

Setzt man in Gleichung (2) $p' = 0$ und schreibt für ε' seinen Werth so erhält man

$$0 = h\frac{v - \varepsilon}{2} + kv \cdot \;\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Sind h und k bekannt, so genügen die Gleichungen (4) und (5) zur Bestimmung von ε und v. Man erhält so

$$v = \frac{h\varepsilon}{h + 2k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$P = h\varepsilon + \frac{kh\varepsilon}{h + 2k} = \frac{h(h + 3k)}{h + 2k}\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Cagniard-Latour hat Experimente angestellt, aus welchen er schliessen zu können glaubte, dass in dem Falle eines in der Richtung der Achse comprimirten Cylinders stets

$$\frac{v}{\varepsilon} = \frac{1}{2},$$

oder nach (6)

$$\frac{h}{h + 2k} = \frac{1}{2}$$

und

$$h = 2k.$$

Dem entgegen fand Wertheim, welcher gleichfalls mit gedrückten und gedehnten Cylindern experimentirte,

$$\frac{v}{\varepsilon} = \frac{1}{3},$$

woraus man nach Gleichung (6) findet

$$h = k.$$

Was die Experimente Cagniard-Latour's anlangt, so haben dieselben wegen der geringen Präcision der angewendeten Methode keine Beweiskraft; das Resultat selbst ist, wie präcisere Wiederholungen der Versuche ergeben haben, nicht richtig; Wertheim hinwieder hat sich auf die Untersuchung einiger weniger Körper beschränkt. Andererseits erscheint es als unmöglich, dass zwischen den Coefficienten h und k eine von der Natur des Körpers unabhängige Relation bestehe. In der That, nehmen wir an, h sei sehr klein; die Gleichungen (1), (2), (3) zeigen, dass unter dieser Voraussetzung die drei Hauptkräfte nahezu gleich werden, und dass folglich die Fläche zweiten Grades, durch welche die Kräfte gegeben sind, nahezu kugelförmig wird. Welche Lage immer also ein Flächenelement in dem gegebenen Falle haben möge, die auf dasselbe wirkende Kraft ist von nahe unveränderlicher Grösse und steht nahe senkrecht auf dem Flächenelemente: die Eigenschaften des Körpers nähern sich jenen einer zähen Flüssigkeit. Bei den vollkommen festen Körpern sind die Coefficienten h und k der Grösse nach mit einander vergleichbar, und da in der Natur sich viele Zwischenstufen zwischen der vollkommenen Festigkeit und der vollkommenen Flüssigkeit finden,

muss man annehmen, dass die zwischen den Coefficienten *h* und *k* bestehende Relation von einem Körper zum anderen variabel ist. Es war demnach verfehlt, wenn Wertheim das Grössenverhältniss dieser Coefficienten experimentell zu bestimmen suchte.

454. Die Arbeiten Neumann's.

Zur Zeit, da Neumann seine theoretischen Arbeiten über die accidentelle Doppelbrechung ausführte (1841), war die Theorie der Elasticität wenig gekannt, obgleich Poisson und Cauchy schon 1828 und 1829 die Principien dieser Theorie entwickelt hatten. Die betreffenden Publicationen hatten wenig Verbreitung gefunden, Green allein scheint von denselben Kenntniss gehabt zu haben. Vor dieser Zeit behandelten Poisson und Lamé die sich auf die Elasticität beziehenden Fragen von einem anderen Gesichtspunkte aus und gelangten zu Formeln, welche eine einzige Constante enthalten und folglich zweifellos unexact sind.

Nun hat Neumann die Formeln Lamé's, Navier's und Clapeyron's seinen Berechnungen zu Grunde gelegt, so dass seine Resultate unzuverlässig sind.

Neumann beobachtete die isochromatischen Linien einer gekrümmten Glasplatte. Die dunkle Linie entspricht einer Molecülreihe, welche weder verlängert noch verkürzt ist, und der den übrigen isochromatischen Linien entsprechende Gangunterschied lässt sich berechnen. Indem Neumann von dem Gesetze Cagniard-Latour's (453) Gebrauch machte, konnte er eine Relation zwischen dem Gangunterschiede und den Coefficienten seiner Gleichungen aufstellen.

Bei einer zweiten Reihe von Experimenten brachte Neumann die gekrümmte Glasplatte vor ein Paar nahe an einander liegender Oeffnungen, durch welche Interferenzerscheinungen hervorgebracht wurden. Die Versuchsanordnung war so getroffen, dass eines der beiden interferirenden Lichtbündel die Glasplatte an einer Stelle durchsetzte, welche Dilatation erfahren hatte, das andere Lichtbündel an einer Stelle, welche Compression erfahren hatte.

Trotz der Unsicherheit, welche in den Arbeiten Neumann's herrscht, geht doch dies hervor, dass in einem gleichmässig comprimirten Glase die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes vergrössert, und der Brechungsexponent verkleinert ist, während eine Dilatation im Gegentheile eine Verminderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und eine Vergrösserung des Brechungsexponenten ergiebt. Dieses Gesetz wird durch die Thatsache bestätigt, dass durch eine geringe Erhöhung der Temperatur der Brechungsexponent des Glases vergrössert wird, wie Neumann experimentell gefunden hat. Hierher gehören auch die Untersuchungen Fizeau's über die Aenderungen, welche die Fortpflan-

zungsgeschwindigkeit des Lichtes durch Temperaturveränderung in Glas und mehreren anderen festen Körpern erfährt[1]), sowie die Versuche Stefan's[2]). Neumann hat seine Theorie auch auf den Fall ausgedehnt, wo die Doppelbrechung durch rasches Kühlen hervorgebracht wird.

455. Rotationspolarisation, hervorgebracht durch Torsion.

Neumann's Theorie ergiebt eine Consequenz, nach welcher ein polarisirter Lichtstrahl, welcher einen tortirten Glasstab parallel der Achse durchsetzt, eine Rotation der Polarisationsebene erfahren soll, proportional der Torsion und der Länge des Stabes. Mag es auch wahrscheinlich sein, dass es sich wirklich so verhält, das entsprechende Experiment stiess auf Schwierigkeiten. Es treten störende Erscheinungen der Doppelbrechung auf, welche auf das Kühlen des Glases zurückzuführen sind, und bei stärkerer Torsion tritt bald Zerbrechen ein. Ebensowenig, wie Neumann, gelangte Drion bei Wiederholung der Experimente Neumann's zu einem Resultate.

---

[1]) C. R., LV, 1237. *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXVI, 429, 1862. — [2]) Ber. d. Wien. Akad., LXIII.

Bibliographie.

Accidentelle Doppelbrechung.

1810. **Malus**, Mémoire sur l'axe de réfraction des cristaux et des substances organisées, *Mèm. de la prem. classe de l'Inst.*, XI, 142.

1811. **Malus**, Expériences sur la double réfraction des substances animales et végétales, mentionnées dans l'Histoire de la classe des sciences mathématiques et physiques pendant l'année 1811, *Mém. de la prem. classe de l'Inst.*, XII, XXIX.

1813. **Seebeck**, Einige neue Versuche und Beobachtungen über Spiegelung und Brechung des Lichtes, *Schweigger's Journ.*, VII, 252, 382.

1814. **Seebeck**, Von den entoptischen Figuren, *Schweigger's Journ.*, XI, 71; XII, 1.

1814. **Brewster**, Result of some Recent Experiments on the Properties Impressed upon Light by the Action of Glass Reased to Different Temperatures and Cooled under Different Circumstances, *Phil. Trans.*, 1814, p. 431.

1815. **Brewster**, On the Effects of simple Pressure as Producing that Species of Crystallization which Forms two Oppositely Polarized Images and Exhibits the Complementary Colours of Polarized Light, *Phil. Trans.*, 1815, p. 60.

1815. **Brewster**, Additional Observations on the Optical Properties und Structure of Heated Glass and Unheated Glass Drops, *Phil. Trans.*, 1815, p. 1.

1815. **Brewster**, Experiments on the Depolarization of Light Exhibited by various Mineral, Animal and Vegetable Bodies, *Phil. Trans.*, 1815, p. 29.

1816. **Brewster**, On New Properties of Heat as Exhibited in its Propagation along Plates of Glass, *Phil. Trans.*, 1816, p. 46.

1816. **Brewster**, On the Communication of the Structure of Doubly Refracting Crystals to Glass, Muriat of Soda, Fluor Spar and other Substances by Mechanical Compression and Dilatation, *Phil. Trans.*, 1816, p. 156.

1817. **Brewster**, Effects of Compression and Dilatation in Altering the Polarized Structure of Doubly Refracting Crystals, *Edinb. Trans.*, VIII, 281.

1817. **Brewster**, Laws which Regulate the Distribution of the Depolarizating Forces in Plates, Tubes and Cylinders of Glass, *Edinb. Trans.*, VIII, 353.

1817. **Biot**, Nouvelles expériences sur le développement des forces polarisantes par la compression dans tous les sens des cristaux, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), III, 386.

1817. **Fresnel**, Lettre à Arago sur l'influence de la chaleur dans les couleurs développées par la polarisation, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), IV, 298.

1819. Fresnel, Mémoire sur la réflexion de la lumière, *Mém. de l'Acad. des sc.*, XX, 195. — *OEuvres complètes*, I, 691.

1820. Biot, Sur une nouvelle propriété physique qu'acquièrent les lames de verre lorsqu'elles exécutent des vibrations longitudinales, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XIII, 151.

1822. Fresnel, Note sur la double réfraction du verre comprimé, *Bull. de la Soc. Philomath.*, 1822, p. 139. — *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XX 376. — *OEuvres complètes*, I, 713.

1830. Brewster, On the Production of Regular Double Refraction in the Molecules of Bodies by Simple Pressure, *Phil. Trans.*, 1830, p. 87.

1835. Dove, Versuche über Circularpolarisation des Lichtes, *Pogg. Ann.*, XXXV, 579.

1836. Guérard, Double réfraction du verre ordinaire, *C. R.*, II, 471. — *Inst.*, IV, 156.

1841. Neumann, Die Gesetze der Doppelbrechung des Lichtes in comprimirten oder ungleichförmig erwärmten unkrystallischen Körpern, *Pogg. Ann.*, LIV, 449. — *Abhandlungen der Akademie von Berlin für* 1841. — *Inst.*, X, 163.

1844. Moriz, Polarisation mit einem blossen Glaswürfel, *Pogg. Ann.*, LXIII, 49.

1850. Arago, Influences qui agissent sur la réfraction des corps, *OEuvres complètes*, X, 581.

1850. Splitgeber, Ueber die Erscheinung des schwarzen Kreuzes, welche nicht durch schnelles Erkalten im Glas hervorgerufen ist, *Pogg. Ann.*, LXXIX, 297.

1850. Moigno et Soleil, Note sur un nouveau caractère distinctif entre les cristaux à un axe positifs ou négatifs, *C. R.*, XXX, 361.

1851. Wertheim, Sur les effets optiques de la compression du verre, *C. R.*, XXXII, 141.

1851. Wertheim, Mémoire sur la polarisation chromatique produite par le verre comprimé, *C. R.*, XXXII, 289. — *Inst.*, XX, 65.

1851—52. Wertheim, Note sur la double réfraction artificiellement produite dans les cristaux du système régulier, *C. R.*, XXXIII, 576; XXXV, 276. — *Inst.*, XX, 270.

1853. Brewster, Production of Crystalline Structure in Crystallized Powders by Compression and Traction, *Edinb. Trans.*, XX, 555. — *Inst.*, XXII, 35.

1854. Wertheim, Mémoire sur la double réfraction temporairement produit dans les corps isotropes, *Thèse de Paris*, 1854; *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXII, 96.

1855. Bravais, Description d'un nouveau polariscope et recherches sur les doubles réfractions peu énergiques. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XLIII, 129.

1859. Pfaff, Versuche über den Einfluss des Drucks auf die optischen Eigenschaften doppeltbrechender Krystalle, *Pogg. Ann.*, CVII, 333; CVIII, 598. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LVII, 506.

1864. Kundt, Ueber die Doppelbrechung des Lichtes in tönenden Stäben, *Berl. Monatsber.*, 1864, p. 659. — *Pogg. Ann.*, CXXIII, 541. — *Inst.*, XXXIII, 125.

1864. Pfaff, Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Doppelbrechung, *Pogg. Ann.*, CXXIII, 179.

1865. De La Rive, Sur les propriétés optiques développées dans différentes espèces de verre par le passage d'une décharge électrique, *C. R.*, LX. — *Phil. Mag.*, (4), XXX, 160.

1872. Mach, Ueber die temporäre Doppelbrechung der Körper durch einseitigen Druck, *Pogg. Ann.*, CXLVI.

1872. **Mach**, Ueber eine Beobachtung bei Versuchen über die Doppelbrechung plastischer durchsichtiger Massen, *Prag. Ber.*
1874. **Kundt**, Temporärer Dichroismus hervorgebracht durch Zug, *Pogg. Ann.*, CLI.
1874. J. **Clerk Maxwell**, Ueber Doppelbrechung in einer bewegten zähen Flüssigkeit, *Pogg. Ann.*, CLI.
1875. E. **Mach** und J. **Merten**, Bemerkungen über die Aenderung der Lichtgeschwindigkeit im Quarz durch Druck, *Pogg. Ann.*, CLVI; *Wien. Akad.*, (2), LXXII.
1878. A. **Bertin**, Bemerkung über die optischen Eigenschaften der Gelatineblättchen, *Ann. de chim.*, (5), XV.
1879. A. v. **Lasaulx**, Ueber Doppelbrechung und Dichroismus, durch Druck an Krystallen der Silberhaloïde hervorgerufen, *Sitzungsber. d. schles. Ges. f. vaterl. Cultur*, 1879.
1879. Fr. **Pfaff**, Einfluss der Temperaturveränderung und des Druckes auf die doppelte Strahlenbrechung, *Sitzungsber. d. phys. med. Soc. zu Erlangen.*
1880. J. **Macé de Lépinay**, Experimentelle Untersuchungen über die zufällige Doppelbrechung, *Ann. de chim.*, XIX.
1880. E. **Jannetaz**, Optische Erscheinungen in comprimirten Alaunen, *Zeitschr. f. Kryst.*, IV.
1881. Fr. **Klocke**, Nachahmung der Erscheinungen optisch normaler Krystalle durch gespannte Colloide, *Ber. d. Verh. d. Naturf.-Ges. zu Freiburg i. B.*
1881. Fr. **Klocke**, Ueber die Wirkung eines einseitigen Druckes auf optisch normale Krystalle von Alaun, Idokras und Apophyllit, *Verh. d. Naturf.-Ges. zu Freiburg i. B.*
1881. H. **Bücking**, Ueber durch Druck hervorgerufene optische Anomalien, *Journ. f. Min.*, I.
1881. Fr. **Klocke**, Ueber einige optische Eigenschaften optisch anomaler Krystalle und deren Nachahmung durch gespannte und gepresste Colloïde, *Neues Jahrb. f. Mineral.*, II, 1881.
1883. H. **Bücking**, Ueber den Einfluss eines messbaren Druckes auf doppelbrechende Mineralien, *Groth, Zeitschr.*, VII.

Lamellarpolarisation.

1813. **Brewster**, *Treatise on New Philosophical Instruments*, Edinburgh, p. 321.
1813. **Brewster**, On the Affection of Light Transmitted trough Crystallized Bodies, *Edinb. Trans.*, VI.
1816. **Brewster**, On the Structure of the Crystalline Lenses in Fishes and Quadrupedes as Ascertained by its Action on Polarized Light, *Phil. Trans.*, 1816, p. 311. — *Ann. de chim. et de phys.*, (2), IV, 431.
1817. **Brewster**, On the Optical Properties of Muriat of Soda, Fluate of Lime and Diamond as Exhibited in their Action upon Polarized Light, *Edinb. Trans.*, VIII, 157.
1821. **Brewster**, Account of a Remarkable Structure in Apophyllit with Observations on the Optical Peculiarities of that Mineral, *Edinb. Trans.*, IX, 317.
1826. **Brewster**, On a New Species of Double Refraction Accompanying a Remarkable Structure in the Mineral Called Analcim, *Edinb. Trans.*, X.
1826. **Mark**, Ueber die optischen Eigenschaften der Knochenlamellen und des Zuckers, *Kastner's Ann.*, VIII. — *Phil. Mag.*, (3), XV, 192.

1833—36. Brewster, On the Anatomical and Optical Structure of the Cristalline Lenses of Animals, *Phil. Trans.*, 1833, p. 323; 1836, p. 35.
1835. Talbot, Anwendung des polarisirten Lichts zu mikroskopischen Beobachtungen, *Pogg. Ann.*, XXV, 330. — *Inst.*, III, 34.
1837. Brewster, On the Development and Extinction of Regular Doubly Refracting Structure in the Crystalline Lenses of Animals after Death, *Phil. Trans.*, 1837, p. 253. — *Phil. Mag.*, (4), III, 192.
1841. Biot, Mémoire sur la polarisation lamellaire, *Mém. de l'Acad. des sc.*, XVIII, 541.
1841. Biot, Sur l'influence de l'état lamellaire dans les phénomènes de polarisation et de double réfraction produits par certains corps cristallisés, *C. R.*, XII, 1121.
1842. Goddard, Ueber Depolarisation des Lichts durch lebende Thiere, *Pogg. Ann.*, Ergänzungsbd. I, 190.
1844. Biot, Note sur les phénomènes de polarisation produits à travers les globules féculacés, *C. R.*, XVIII, 735.
1844. Jamin, De l'action que les bélemnites exercent sur la lumière polarisée, *C. R.*, XVIII, 680.
1846. Brewster, On the Modification of the Doubly Refracting and Physical Structure of Topaz by Elastic Forces Emanating from Minute Cavities, *Edinb. Trans.*, XVI, part. I, p. 7. — *Phil. Mag.*, (4), XXXI, 101.
1847. v. Erlach, Mikroskopische Beobachtungen über organische Elementartheile bei polarisirtem Lichte, *Müller's Arch.*, 1847, p. 413.
1848. Ehrenberg, Ueber eine neue einflussreiche Anwendung des polarisirten Lichtes für mikroskopische Auffassung des Organischen und Anorganischen, *Berl. Monatsber.*, 1848, p. 238.
1849. Haidinger, Ueber den Antigonit, *Pogg. Ann.*, LXXVIII, 91.
1849. Ehrenberg, Anwendung des chromatisch polarisirten Lichtes für mikroskopische Verhältnisse, *Berl. Monatsber.*, 1849, p. 55, 211. — *Inst.* XVII, 254.
1850. Thomas, Beobachtungen über gewisse Erscheinungen, die sich an den Krystalllinsen verschiedener Thiere beobachten lassen, *Wien. Ber.*, VI, 286.
1852. Stellwart v. Carion, Ueber Doppelbrechung und davon abhängiger Polarisation des Lichtes im menschlichen Auge, *Wien. Ber.*, VIII, 82.
1854. Volger, Ueber die Erscheinungen der Aggregatspolarisation im Boracit, *Pogg. Ann.*, XCII, 77; XCIII, 450.
1859. Valentin, Neue Untersuchungen über die Polarisationserscheinungen der Krystalllinsen des Menschen und der Thiere, *Arch. f. Ophtalm.*, (4), I, 227.
1859. Mohl, Ueber die Einrichtung des Polarisationsmikroskops zum Behufe der Untersuchung organischer Körper, *Pogg. Ann.*, CVIII, 178.
1860. Steeg, Ueber die Beobachtungen einiger Polarisationserscheinungen in organischen Substanzen. *Pogg. Ann.*, CXI, 511.
1861. Valentin, *Die Untersuchung der Pflanzen und der Thiergewebe im polarisirten Lichte*, Leipzig, 1861.
1861. Valentin, Abänderung des Charakters der Doppelbrechung in Krystalllinsen, *Arch. f. Ophtalm.*, (4), VIII, 81.
1864. v. Lang, Ueber das Kreuz, das gewisse organische Körper im polarisirten Lichte zeigen, *Pogg. Ann.*, CXXII, 140.
1864. Nageli, *Die Anwendung des Polarisationsmikroskops auf die Untersuchung der organischen Elementartheile*, Leipzig, 1864.
1867. Reusch, Ueber die sogenannte Lamellarpolarisation des Alauns, *Pogg. Ann.*, CXXXII.

1877. J. Macé, Untersuchungen über die künstlich erzeugte Doppelbrechung, *C. R.*, LXXXIV.
1879. W. Baily, Stärke und Glas unter dem Polariskop, *Phil. Mag.*, (5), VII.
1879. V. v. Lang, Ueber die optischen Eigenschaften der Stärke, *Phil. Mag.*, (5), VII.
1880, F. Klocke, Ueber Doppelbrechung regulärer Krystalle, *Jahrb. f. Min.*, I.

XXX.

Fresnel's Reflexionstheorie.

456. Die Theorie Young's.

Die geometrischen Gesetze der Reflexion und Brechung geben Aufschluss über die Richtung der reflectirten und gebrochenen Strahlen. Es besteht jedoch auch die Frage nach der Intensität und der Constitution des reflectirten Lichtes.

Young war der erste, welcher sich mit dieser Frage beschäftigte, indem er dieselbe für die normale Incidenz zu beantworten suchte. Er betrachtete den Aether als ein vollkommen elastisches Mittel und verfuhr nach der Analogie mit dem Stosse elastischer Kugeln: der einfallende Strahl wird verglichen mit der stossenden Kugel vor dem Stosse, der reflectirte Strahl mit der stossenden Kugel nach dem Stosse und der gebrochene Strahl mit der ursprünglich ruhenden Kugel. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem elastischen Mittel ist $\sqrt{\frac{e}{d}}$, wenn e die Elasticität und d die Dichte des Mittels bedeutet. Young nahm die Elasticität des Aethers in allen Mitteln als gleich an und schrieb die Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes in verschiedenen Mitteln einer verschiedenen Aetherdichte zu. Es folgt aus dieser Hypothese, dass die Dichten des Aethers in verschiedenen Mitteln den Quadraten der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten verkehrt, und den Quadraten der Brechungsexponenten gerade proportionirt sind. Was die Volumina anlangt, deren Massen mit den Massen der Kugeln verglichen werden, so ist für die einfallende Bewegung das Volumen beliebig zu nehmen; für die reflectirte und die gebrochene Bewegung sind jene Volumina des ersten und des zweiten Mittels zu nehmen, in welchen sich in einem bestimmten Zeitmomente nach eingetretener Reflexion und Brechung die sich fortpflanzende Bewegung befindet. Diese beiden

Volumina sind proportional den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den beiden Mitteln und verkehrt proportional den Brechungsexponenten derselben. Die entsprechenden Massen, nämlich die Producte der Dichten und Volumina, sind proportional den Brechungsexponenten.

Setzt man die der einfallenden Bewegung entsprechende Masse und Vibrationsgeschwindigkeit gleich 1, bezeichnet man mit u und v die Vibrationsgeschwindigkeiten des gebrochenen und des reflectirten Strahles, ferner mit n den Brechungsexponenten des zweiten Mittels in Bezug auf das erste, so giebt die Theorie des Stosses elastischer Kugeln zunächst die Gleichung

$$1 = u - v.$$

Das Princip der lebendigen Kräfte giebt weiter, da die Massen den Brechungsexponenten proportional sind,

$$1 = v^2 + n u^2.$$

Aus den beiden Gleichungen ergiebt sich

$$v = \frac{1 - n}{1 + n}.$$

Die Intensität des reflectirten Lichtes ist demnach

$$\left(\frac{n - 1}{n + 1}\right)^2$$

und jene des gebrochenen Lichtes

$$1 - \left(\frac{n - 1}{n + 1}\right)^2.$$

Bemerkenswerth in dieser Theorie ist die Anwendung des Princips der lebendigen Kräfte. Sowohl dieses Princip als Young's Schlussresultat finden sich in Fresnel's Theorie wieder.

457. Die Grundlagen der Theorie Fresnel's.

Die Gesetze der Reflexion und Brechung des polarisirten Lichtes wurden von Fresnel zum ersten Male im Jahre 1821 [1]) behandelt, später vollständiger im Jahre 1823 [2]). Fresnel's Theorie bezieht sich nur auf einfachbrechende Körper. Sie stützt sich auf einige Grundsätze, welche wir voranschicken wollen.

Das Princip der lebendigen Kräfte. Fresnel acceptirte Young's Annahme eines vollkommen elastischen Aethers und den Satz der lebendigen Kräfte, nach welchem die lebendige Kraft der einfallenden Lichtbewegung gleich ist den lebendigen Kräften der reflectirten und gebrochenen Bewegung. Der letztere Satz ist nicht vollkommen

[1]) *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XVII, 190, 312. — [2]) Ibid. (2), XLVI, 225.

richtig, da ein Theil der lebendigen Kraft auf die ponderable Materie übergeht, absorbirt wird. Nur so lassen sich Wirkungen der Lichtbewegung auf die Materie, wie die Erwärmung, verstehen. In der Theorie Fresnel's wird jedoch keine Rücksicht auf diese Absorption genommen, vielmehr ein vollkommen elastischer und von jeder ponderablen Materie freier Aether vorausgesetzt. Die Resultate, welche sich so ergeben, haben für vollkommen durchsichtige Mittel von nicht zu grossen Brechungsexponenten die Probe der experimentellen Verification vorzüglich bestanden, entfernen sich aber merklich vom Experimente bei anderen Mitteln.

Das Continuitätsprincip. Nach dem zweiten Principe Fresnel's sind die Aetherbewegungen in zwei Ebenen zu beiden Seiten der Trennungsebene, und unendlich nahe an derselben, nur unendlich wenig von einander verschieden.

Die Hypothese der plötzlichen Veränderungen an der Trennungsfläche. Das dritte Princip findet sich implicite in der Theorie Fresnel's. Es wird angenommen, dass die Veränderung der Bewegung an der Trennungsfläche der beiden Mittel plötzlich eintrete. Das Experiment bestätigt diese Hypothese nicht vollkommen, wie sich später zeigen wird.

Die Hypothese über die Constitution des Aethers. Fresnel nimmt als viertes Princip an, dass der Unterschied der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes in verschiedenen Mitteln einzig durch den Unterschied der Dichte des Aethers in diesen Mitteln bedingt sei, und dass die Elasticität des Aethers für alle isotropen Mittel dieselbe sei.

Nach dieser Hypothese sind die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in verschiedenen Mitteln der Wurzel aus der Dichte des Aethers verkehrt proportional.

Annahme über die Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes. Um in seiner Reflexionstheorie zu Resultaten zu gelangen, welche mit dem Experimente übereinstimmen, sah sich Fresnel ferner zu der Annahme genöthigt, dass die Schwingungen des geradlinig polarisirten Lichtes auf der Polarisationsebene senkrecht stehen. Diese Annahme ist fest verbunden mit der Annahme der variabeln Dichte und constanten Elasticität des Aethers, da später Neumann, ausgehend von der entgegengesetzten Annahme einer constanten Dichte und variabeln Elasticität, um zu den Fresnel'schen Formeln und zur Uebereinstimmung mit dem Experimente zu gelangen, gezwungen war, im Gegentheile die Schwingungen als in der Polarisationsebene vor sich gehend anzunehmen.

Wir beginnen mit der Reflexion und Brechung des geradlinig polarisirten Lichtes, und behandeln zunächst die beiden einfachsten Fälle, wo das einfallende Licht in der Einfallsebene oder senkrecht zu derselben polarisirt ist.

458. Reflexion des in der Einfallsebene polarisirten Lichtes.

Ist das einfallende Licht in der Einfallsebene polarisirt, so stehen die Schwingungen desselben auf der Einfallsebene senkrecht. In Folge der Symmetrie stehen denn auch die Schwingungen des reflectirten und des gebrochenen Lichtes auf der Einfallsebene senkrecht. Ist also der einfallende Strahl in der Einfallsebene polarisirt, so sind es auch der reflectirte und der gebrochene Strahl.

Es handelt sich um die Intensität des reflectirten Strahles. Die Vibrationsbewegung dieses Strahles, welchen wir als einfach voraussetzen, sei $\sin 2\pi \frac{t}{T}$. Betrachten wir im zweiten Mittel ein Molecül unendlich nahe der Trennungsfläche, und bezeichnen wir die Vibrationsgeschwindigkeit dieses Molecüls mit u, so ist die Vibrationsbewegung auf dem gebrochenen Strahle gegeben durch $u \sin 2\pi \frac{t}{T}$. Ebenso ist, wenn durch v die Vibrationsgeschwindigkeit des reflectirten Strahles bezeichnet wird, die Bewegung dieses Strahles gegeben durch $v \sin 2\pi \frac{t}{T}$. Die Resultante der einfallenden und der reflectirten Bewegung ist $(1 + v) \sin 2\pi \frac{t}{T}$, und diese Resultante muss nach dem Continuitätsprincip der Vibrationsbewegung des gebrochenen Strahles gleich sein. Das giebt

$$(1 + v) \sin 2\pi \frac{t}{T} = u \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

und

$$1 + v = u.$$

Das Princip der lebendigen Kräfte liefert eine zweite Gleichung, welche in Verbindung mit der ersten die Vibrationsgeschwindigkeiten u und v bestimmt. Wir wollen zunächst sehen, auf welche Aethermassen sich die reflectirte und die gebrochene Bewegung überträgt. Fresnel betrachtet zu diesem Zwecke im einfallenden Lichte eine Aethermasse von der Gestalt eines rechtwinkeligen Prismas: Die Länge desselben, MN, Fig. 68, ist parallel dem einfallenden Strahle und gleich der Wellenlänge λ, die Breite, $MK = d$, ist parallel der Einfallsebene, die Höhe sei h. Demnach ist das Volumen des Prismas gleich $\lambda d h$. Bezeichnen wir mit $\sin 2\pi \frac{t}{T}$ die Vibrationsbewegung des Punktes M zur Zeit t, so ist die Bewegung eines anderen Punktes des einfallenden Strahles zur selben

Fig. 68.



Zeit gleich $sin\, 2\, \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$, und die lebendige Kraft einer Schichte des Prismas von der unendlich kleinen Länge $d x$:

$$h d \; d x \, sin^2\, 2\, \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

wenn die Dichte des Aethers im ersten Mittel zur Einheit genommen wird.

Um die lebendige Kraft des ganzen Prismas zu erhalten, genügt es in Bezug auf x von Null bis λ zu integriren, wodurch man erhält:

$$h d \int_0^\lambda sin^2\, 2\, \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) d x.$$

Suchen wir nun die lebendige Kraft der reflectirten Bewegung. Während die Bewegung von N nach N' gelangt, überträgt sich die Bewegung des Molecüls M nach M', so dass man hat

$$M N = M' N' = \lambda.$$

Das Volumen, auf welches sich die Bewegung des betrachteten Aetherprismas überträgt, ist demnach ebenfalls $\lambda h d$; nur die Vibrationsgeschwindigkeit ist verändert im Verhältnisse $1 : v$, so dass die lebendige Kraft der reflectirten Bewegung ist:

$$h d v^2 \int_0^\lambda sin^2\, 2\, \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) d x.$$

Betrachten wir endlich das gebrochene Licht. Wenn der Punkt N seine Bewegung auf N'' übertragen hat, hat der Punkt M die seine auf M'' übertragen; $M'' N''$ ist die Wellenlänge λ' im neuen Mittel. Sind i und r der Einfallswinkel und der Brechungswinkel, so ist

$$K'' M'' = d \frac{cos\, r}{cos\, i},$$

während die Höhe h des Prismas unverändert bleibt. Was die Dichte des Aethers im zweiten Mittel anlangt, so ist dieselbe nach dem vierten Principe gleich $\frac{\lambda^2}{\lambda'^2}$; schliesslich ist u die Vibrationsgeschwindigkeit im zweiten Mittel. Man hat so für die lebendige Kraft der Bewegung im zweiten Mittel:

$$\frac{\lambda^2}{\lambda'^2} h d \frac{cos\, r}{cos\, i} u^2 \int_0^{\lambda'} sin^2\, 2\, \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda'}\right) d x.$$

Die Gleichung der lebendigen Kräfte ist demnach:

$$h\,d \int_0^{\lambda} \sin^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) dx = h\,d\,v^2 \int_0^{\lambda} \sin^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) dx$$

$$+ h\,d\,\frac{\lambda^2 u^2}{\lambda'^2} \frac{\cos r}{\cos i} \int_0^{\lambda'} \sin^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda'}\right) dx,$$

oder

$$(1 - v^2) \int_0^{\lambda} \sin^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) dx = \frac{\lambda^2 u^2}{\lambda'^2} \frac{\cos r}{\cos i} \int_0^{\lambda'} \sin^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda'}\right) dx.$$

Setzt man $\frac{x}{\lambda} = y$, so hat man

$$\int_0^{\lambda} \sin^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) dx = \lambda \int_0^{1} \sin^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - y\right) dy$$

und

$$\int_0^{\lambda'} \sin^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda'}\right) dx = \lambda' \int_0^{1} \sin^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - y\right) dy,$$

so dass die Gleichung der lebendigen Kräfte sich auf

$$1 - v^2 = \frac{\lambda}{\lambda'} \frac{\cos r}{\cos i} u^2$$

reducirt, oder wenn $\frac{\sin i}{\sin r}$ für $\frac{\lambda}{\lambda'}$ gesetzt wird,

$$(1 - v^2) \sin r \cos i = u^2 \sin i \cos r.$$

Diese Gleichung bestimmt in Verbindung mit der ersten Gleichung v und u; man erhält, da $1 + v = u$, successive

$$(1 - v)(1 + v) \sin r \cos i = u^2 \sin i \cos r$$

$$(1 - v) \sin r \cos i = u \sin i \cos r,$$

und schliesslich

$$(1 - v) \sin r \cos i = (1 + v) \sin i \cos r,$$

oder

$$v = \frac{\sin r \cos i - \sin i \cos r}{\sin r \cos i + \sin i \cos r} = - \frac{\sin (i - r)}{\sin (i + r)}.$$

Dies ist die Vibrationsgeschwindigkeit des reflectirten Strahles. Was seine Intensität anlangt, so hat man, wenn dieselbe mit R bezeichnet und die Intensität des einfallenden Strahles zur Einheit genommen wird,

$$R = \frac{\sin^2 (i - r)}{\sin^2 (i + r)}.$$

Man sieht, dass die Vibrationsgeschwindigkeit v des reflectirten Strahles dasselbe oder das entgegengesetzte Zeichen hat, wie die Vibra-

tionsgeschwindigkeit des einfallenden Strahles, je nachdem das zweite Mittel das optisch dünnere oder dichtere ist.

Setzen wir zuerst voraus, das zweite Mittel sei optisch dichter, so dass $i > r$. Für $i = 0$, also für die normale Incidenz, wird $v = \frac{0}{0}$. Man findet den wahren Werth entweder durch Differentiation, oder indem man bemerkt, dass in der Nähe des Nullwerthes eines Winkels der Sinus mit dem Bogen zusammenfällt. Man hat also für die senkrechte Incidenz

$$v = -\lim \frac{i - r}{i + r} = -\lim \frac{\frac{i}{r} - 1}{\frac{i}{r} + 1}.$$

Da aber

$$\frac{i}{r} = n,$$

wenn n der Brechungsexponent, so ergiebt sich

$$v = -\frac{n - 1}{n + 1}.$$

Indem der Incidenzwinkel i wächst, wächst der Zähler beständig, der Nenner hingegen wächst anfangs und nimmt später ab. Man muss also das Vorzeichen des Differentialquotienten in Betracht ziehen, um zu sehen, wie v mit i variirt. Man erhält

$$\frac{-\cos(i-r)\left(1 - \frac{dr}{di}\right)\sin(i+r) - \cos(i+r)\left(1 + \frac{dr}{di}\right)\sin(i-r)}{\sin^2(i+r)},$$

oder wenn $\frac{\cos i}{n \cos r}$ für $\frac{dr}{di}$ gesetzt wird,

$$\frac{-\cos(i-r)\left(1 - \frac{\cos i}{n\cos r}\right)\sin(i+r) + \cos(i+r)\left(1 + \frac{\cos i}{n\cos r}\right)\sin(i-r)}{\sin^2(i+r)},$$

oder einfacher

$$\frac{-\sin 2r + \frac{\cos i}{n \cos r}\sin 2i}{\sin^2(i+r)},$$

und wenn für n sein Werth gesetzt wird,

$$\frac{-\sin 2r \sin i \cos r + \cos i \sin r \sin 2i}{\sin i \cos r \sin^2(i+r)}$$

oder

$$\frac{2 \sin i\,(\cos^2 i - \cos^2 r)}{\frac{\sin i}{\sin r}\cos r \sin^2(i+r)}.$$

und schliesslich

$$\frac{2 \sin i \, (\cos^2 i - \cos^2 r)}{n \cos r \sin^2 (i + r)}.$$

Dieser Ausdruck ist stets negativ, woraus folgt, dass der absolute Werth von v mit dem Incidenzwinkel beständig wächst. Ist also das einfallende Licht in der Einfallsebene polarisirt, so wächst die Intensität des reflectirten Lichtes mit der Incidenz. Für die streifende Incidenz wird $v = 1$; der reflectirte Strahl hat die Intensität des einfallenden.

Alle diese Resultate gelten auch für den Fall, wo das zweite Mittel optisch dünner ist, nur das Zeichen von v ist positiv. Da ferner in diesem Falle $n < 1$ ist, so gelangt man beim Uebergange in ein dünneres Mittel zu einer Incidenz, für welche $\sin i = n$ wird. Jenseits dieser Grenze hat man $\sin r > 1$, der Brechungswinkel ist imaginär, und ebenso der Ausdruck für v, welcher diesen Winkel enthält. Dieser Fall soll später gesondert betrachtet werden.

Fassen wir die Resultate kurz zusammen, zu welchen wir für das in der Einfallsebene polarisirte Licht gelangt sind.

Die Amplitude und Intensität des reflectirten Lichtes sind

$$v = -\frac{\sin (i - r)}{\sin (i + r)}, \quad R = \frac{\sin^2 (i - r)}{\sin^2 (i + r)}.$$

Die Vibrationsgeschwindigkeit des reflectirten Strahles hat dasselbe oder das entgegengesetzte Vorzeichen wie jene des einfallenden Strahles, je nachdem das zweite Mittel das optisch dünnere oder dichtere ist.

Für die senkrechte Incidenz ist die Vibrationsgeschwindigkeit des reflectirten Strahles

$$v = -\frac{n - 1}{n + 1}.$$

Die Intensität des reflectirten Strahles wächst mit dem Incidenzwinkel beständig und wird für die streifende Incidenz der Einheit gleich.

Ist das zweite Mittel optisch dünner, so ist v positiv, und für $\sin i > n$ wird der Brechungswinkel und der Ausdruck für v imaginär, es findet totale Reflexion statt.

459. Reflexion des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes.

Ist das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, so gehen die Schwingungen des einfallenden Lichtes in der Einfallsebene vor sich, und ebenso die Schwingungen des reflectirten und des gebrochenen Lichtes.

Um die Intensität des reflectirten Lichtes zu finden, geht man denselben Weg wie in dem früher besprochenen Falle. Sind u' und v' die

Vibrationsgeschwindigkeiten des gebrochenen und reflectirten Strahles, so giebt das Princip der lebendigen Kräfte immer noch die Gleichung

$$(1 - v'^2) \sin r \cos i = u'^2 \sin i \cos r.$$

Allein hier entsteht eine Schwierigkeit daraus, dass die Schwingungen der drei Strahlen, des einfallenden, des reflectirten und des gebrochenen, nicht mehr unter einander parallel sind. Legt man in die Einfallsebene ein Coordinatensystem, dessen Achsen parallel und normal zur Trennungsebene liegen, und zerlegt man die Schwingungen nach diesen Achsen, so wäre das Continuitätsprincip auf die Composanten der Schwingungen anzuwenden. Man erhält jedoch so zwei Gleichungen, d. h. man erhält eine Gleichung zu viel.

Fresnel übersprang diese Schwierigkeit mit der Annahme, dass jene der beiden Gleichungen, welche sich auf die Schwingungen senkrecht zur Trennungsebene bezieht, unberücksichtigt gelassen werden könne. Er dachte, dass beim Uebergange der longitudinalen Schallwellen von einem Mittel in ein anderes, z. B. von Luft in Wasser, die Continuität nur für die Composante der Bewegung senkrecht zur Trennungsfläche bestehen müsse, und beim Uebergange der transversalen Lichtwellen nur für die Composante parallel zur Trennungsfläche.

Später hat Cornu[1]) die Schwierigkeit, welche sich in Fresnel's Reflexionstheorie aus der Discontinuität der Schwingungscomponenten senkrecht zur Trennungsebene der beiden Medien ergiebt, dadurch beseitigt, dass er statt des geometrischen Princips der Continuität der Amplituden das mechanische Princip der Erhaltung der Quantitäten der Bewegung einführte. Man gelangt so unter Vermeidung jener Schwierigkeiten zu denselben Gleichungen.

Wendet man mit Fresnel das Continuitätsprincip lediglich auf die Composanten parallel der Trennungsebene an, so erhält man analog wie früher:

$$v' = -\frac{\operatorname{tang}(i - r)}{\operatorname{tang}(i + r)}.$$

Die Intensität R' des reflectirten Strahles ist also für Schwingungen in der Einfallsebene:

$$R' = \frac{\operatorname{tang}^2(i - r)}{\operatorname{tang}^2(i + r)}.$$

Nehmen wir wieder an, das zweite Mittel sei optisch dichter, und betrachten wir zunächst den Fall der senkrechten Incidenz. Man erhält $\lim v' = -\frac{n-1}{n+1}$, wie für das senkrecht zur Einfallsebene schwingende Licht.

Bei wachsendem Incidenzwinkel nimmt v' an Grösse ab bis $i + r = 90^0$. Bei dieser Incidenz ist die Richtung des einfallenden Strahles

1) *Ann. de chim.* (4) XI, 1868.

gegeben durch $tang\, i = n$, der reflectirte Strahl steht auf dem gebrochenen senkrecht und die Intensität des reflectirten Strahles ist Null. Wächst der Incidenzwinkel darüber hinaus, so ändert v' das Zeichen und sein absoluter Werth wächst. Wird schliesslich der Einfallswinkel gleich 90^0, so wird v' numerisch gleich und dem Zeichen nach entgegengesetzt der Vibrationsgeschwindigkeit des einfallenden Strahles. Der durch die Gleichung $tang\, i = n$ gegebene Incidenzwinkel, für welchen die Intensität des reflectirten Strahles der Null gleich ist, heisst der Polarisationswinkel oder Winkel der totalen Polarisation.

Ist das zweite Mittel optisch dünner, so wechselt die Vibrationsgeschwindigkeit v' das Zeichen. In diesem Falle erreicht der Brechungswinkel den Werth von 90 Graden ehe die streifende Reflexion eintritt, nämlich wenn $sin\, i = n$. Ueberschreitet der Einfallswinkel diese Grenze, so wird r imaginär, es tritt totale Reflexion ein. Dieser Fall soll später besonders besprochen werden.

In dem Falle, wo das zweite Mittel das optisch dichtere ist, fanden wir den Winkel der totalen Polarisation bei $tang\, i = n$. Nehmen wir nun an, das Licht trete aus dem zweiten Mittel in das erste, so hat man gleicherweise für den Winkel der totalen Polarisation $tang\, i' = n'$, und da $n' = \frac{1}{n}$, auch $tang\, i' = \frac{1}{tang\, i}$ oder $i + i' = 90$ Grad; da aber auch $i + r = 90$ Grad, so hat man $i' = r$. Lässt man also auf die Trennungsfläche zweier Mittel einen Strahl unter dem Winkel der totalen Polarisation fallen, so ist der Brechungswinkel zugleich der Einfallswinkel der totalen Polarisation beim Uebergange aus dem zweiten Mittel in das erste.

Fassen wir die für das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Licht erhaltenen Resultate ebenfalls zusammen.

Die Amplitude und Intensität des gebrochenen Lichtes sind

$$v' = -\frac{tang\,(i - r)}{tang\,(i + r)}, \quad R' = \frac{tang^2\,(i - r)}{tang^2\,(i + r)}.$$

Ist das zweite Mittel dichter und die Incidenz gleich Null, so erhält man dasselbe Resultat für die Vibrationsgeschwindigkeit des reflectirten Lichtes wie bei dem parallel zur Einfallsebene polarisirten Lichte.

Bei wachsender Incidenz nimmt v' numerisch ab bis $i + r = 90^0$ oder $tang\, i = n$. Hier ist die Intensität des reflectirten Strahles Null.

Wächst die Incidenz weiter, so ändert v' das Zeichen und wächst numerisch.

Für die streifende Incidenz wird v' numerisch gleich und dem Zeichen nach entgegengesetzt der Vibrationsgeschwindigkeit des einfallenden Strahles.

Ist das zweite Mittel optisch dünner, so wechselt v' das Zeichen. Für $sin\, i = n$ tritt die totale Reflexion ein.

Der Brechungswinkel der totalen Polarisation ist zugleich der Einfallswinkel der totalen Polarisation beim Uebergange des Strahles aus dem zweiten Mittel in das erste.

460. Reflexion des in einer beliebigen Ebene polarisirten Lichtes.

Der Fall, wo das einfallende Licht in einer beliebigen Ebene polarisirt ist, führt sich leicht auf die beiden eben abgehandelten Fälle zurück. Die Schwingungen des einfallenden Strahles lassen sich in zwei Composanten parallel und senkrecht zur Einfallsebene zerlegen. Bezeichnet man mit α den Winkel der Polarisationsebene des einfallenden Strahles mit der Einfallsebene, und nimmt man die Amplitude dieses Strahles zur Einheit, so ist die Amplitude des in der Einfallsebene polarisirten Lichtes gleich $\cos\alpha$ und die Amplitude des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes gleich $\sin\alpha$. Nach der Reflexion sind die Amplituden der beiden Composanten nach den früher erhaltenen Resultaten gleich

$$-\cos\alpha \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} \quad \text{und} \quad -\sin\alpha \frac{\tang(i-r)}{\tang(i+r)}.$$

Man hat demnach für die Amplitude des reflectirten Strahles

$$v = \sqrt{\cos^2\alpha \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} + \sin^2\alpha \frac{\tang^2(i-r)}{\tang^2(i+r)}},$$

und für die Intensität dieses Strahles

$$R'' = \cos^2\alpha \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} + \sin^2\alpha \frac{\tang^2(i-r)}{\tang^2(i+r)}.$$

Ist β der Winkel der Polarisationsebene des reflectirten Strahles mit der Einfallsebene, so hat man

$$\tang\beta = \frac{\sin\alpha \dfrac{\tang(i-r)}{\tang(i+r)}}{\cos\alpha \dfrac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}}$$

oder

$$\tang\beta = \tang\alpha \frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)}.$$

Wir wollen diese Formel discutiren. Die Polarisationsebene wird sich durch die Reflexion der Einfallsebene nähern oder sich von ihr entfernen, je nachdem $\frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)}$ ein echter oder ein unechter Bruch ist. Nun lässt sich zeigen, dass dieser Bruch stets kleiner als 1 ist. Dies ist

unmittelbar ersichtlich so lange $i + r$ kleiner als 90^0 ist, trifft aber auch zu, wenn diese Grenze überschritten ist.
In der That ist die Ungleichung

$$\frac{\cos(i + r)}{\cos(i - r)} < 1$$

gleichbedeutend mit

$$\cos(i + r) < \cos(i - r)$$

oder mit

$$\cos i \cos r - \sin i \sin r < \cos i \cos r + \sin i \sin r$$

oder schliesslich mit

$$0 < 2 \sin i \sin r,$$

welche Gleichung zweifellos richtig ist.

Man ersieht hieraus, dass durch die Reflexion die Polarisationsebene des Strahles stets der Einfallsebene genähert wird.

Man muss aber ferner unterscheiden, ob der Incidenzwinkel kleiner oder grösser ist als der Polarisationswinkel. Im ersteren Falle ist $i + r < 90^0$ und $\cos(i + r)$ positiv, im letzteren ist $i + r > 90^0$ und $\cos(i + r)$ negativ. Die Polarisationsebene des reflectirten Strahles ist in den beiden Fällen in entgegengesetztem Sinne abgelenkt.

An der Grenze, wo $i + r = 90^0$ und i der Winkel der totalen Polarisation ist, ergiebt sich $\beta = 0$, die Polarisationsebene fällt mit der Einfallsebene zusammen.

Gelangt man zur totalen oder zur streifenden Reflexion, so ist entweder $r = 90^0$ oder $i = 90^0$ und

$$\tang \beta = -\tang \alpha,$$

die Polarisationsebene schliesst mit der Einfallsebene den ursprünglichen Winkel ein.

Wir können nun die Ablenkung der Polarisationsebene von der normalen Incidenz bis zur streifenden verfolgen. Bei der normalen Incidenz, $i = 0$, ist die Polarisationsebene des reflectirten Strahles ihrer ursprünglichen Lage parallel. Bei wachsendem Einfallswinkel nähert sich die Polarisationsebene des reflectirten Strahles der Einfallsebene und fällt beim Polarisationswinkel, $i + r = 90^0$, mit dieser zusammen. Darüber hinaus entfernt sich die Polarisationsebene wieder von der Einfallsebene nach der anderen Seite hin, so dass sie ihre drehende Bewegung bezüglich der Einfallsebene im selben Sinne fortsetzt. Ist endlich der Winkel der totalen Reflexion, $r = 90^0$, oder der Winkel der streifenden Reflexion, $i = 90^0$, erreicht, so bildet die Polarisationsebene mit der Einfallsebene wieder den ursprünglichen Winkel, liegt aber auf der anderen Seite derselben. Es ist nicht zu übersehen, dass im Falle der streifenden Reflexion der einfallende und der reflectirte Strahl sich gegen einander bezüglich einer zur Einfallsebene normalen Achse um 180^0 gedreht haben, und dass folglich die Polarisationsebene des reflectirten Strahles jener des einfallenden parallel ist.

Betrachten wir nun mehrere, nach einander stattfindende Reflexionen.

Nach einer ersten Reflexion hat man, wenn α_1 der Winkel der Polarisationsebene des reflectirten Strahles mit der Einfallsebene ist,

$$tang\,\alpha_1 = tang\,\alpha\,\frac{cos\,(i + r)}{cos\,(i - r)}.$$

Lässt man eine zweite Reflexion unter Beibehaltung derselben Einfallsebene und desselben Incidenzwinkels eintreten, so erhält man

$$tang\,\alpha_2 = tang\,\alpha_1\,\frac{cos\,(i + r)}{cos\,(i - r)} = tang\,\alpha\,\frac{cos^2\,(i + r)}{cos^2\,(i - r)},$$

und allgemein nach n Reflexionen

$$tang\,\alpha_n = tang\,\alpha\,\frac{cos^n\,(i + r)}{cos^n\,(i - r)}.$$

Bei fortgesetzt wachsendem n nähert sich der Factor $\frac{cos^n\,(i + r)}{cos^n\,(i - r)}$ der Null, die Polarisationsebene nähert sich immer mehr der Einfallsebene.

461. Reflexion des circular und elliptisch polarisirten Lichtes.

Ein circular oder elliptisch polarisirter Strahl kann stets in zwei geradlinig polarisirte Strahlen von verschiedener Phase parallel und normal zur Einfallsebene zerlegt werden. Indem man die früher abgeleiteten Formeln auf die beiden Composanten des einfallenden Strahles anwendet, gelangt man zu den Composanten des reflectirten Strahles und schliesslich zu diesem selbst. Die Discussion der Formeln, zu welchen man in dieser Weise ohne Schwierigkeit gelangt, bietet kein besonderes Interesse. Wir beschränken uns auf den Fall der normalen Incidenz, um zu bemerken, dass ein einfallender circular oder elliptisch polarisirter Strahl auch bei der Reflexion seinen Polarisationszustand beibehält, nur dass sich der Sinn der Polarisation umkehrt: so verwandelt sich ein Rechtscircularstrahl in einen Linkscircularstrahl und umgekehrt. Diese, von Earnshaw gezogene Consequenz der Theorie wurde von Powell [1]) experimentell verificirt.

462. Reflexion des natürlichen Lichtes.

Wir haben schon früher die Constitution des natürlichen Lichtes abgehandelt. Seien in einem gegebenen Augenblicke a, b die Achsen der Vibrationsellipse und ω der Winkel der Achse b mit dem Hauptschnitte

---

[1]) *Phil. Mag.* (3), XXII, 92, 262.

eines Analyseurs. Die Gleichungen der Vibrationsbewegung bezogen auf die Achsen der Ellipse sind dann

$$\xi = a \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \eta = b \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Um die Bewegungen der beiden Strahlen in einem Analyseur zu erhalten, muss man jede der beiden, durch diese Gleichungen dargestellten Bewegungen in zwei Composanten parallel und senkrecht zum Hauptschnitte des Analyseurs zerlegen. Man erhält so für den ordentlichen Strahl

$$a \cos \omega \sin 2\pi \frac{t}{T} - b \sin \omega \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

und für den ausserordentlichen

$$a \sin \omega \sin 2\pi \frac{t}{T} + b \cos \omega \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Es ist daher die Intensität des ordentlichen Strahles

$$a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega,$$

und jene des ausserordentlichen

$$a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega.$$

Diese Intensitäten beziehen sich auf ein Zeitintervall, innerhalb dessen die Grössen a, b, ω constant sind. Während einer zweiten Periode mögen diese Grössen a', b', ω' sein, und so fort.

Wir haben angenommen, dass jede dieser Perioden zwar von sehr kurzer Dauer ist, aber doch sehr viele Schwingungen enthält, dass die Wirkungen sehr vieler solcher Perioden von uns nicht getrennt percipirt werden, und dass die wahrgenommene Helligkeit dem Mittel der Intensitäten entspreche.

Damit die Bilder des Analyseurs gleich hell erscheinen, wie dies beim natürlichen Lichte zutrifft, hat man also für die betrachtete Zeitdauer

$$\sum (a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega) = \sum (a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega) \quad . \; . \; (1)$$

Nehmen wir an, diese Gleichung sei bei einer bestimmten Stellung des Analyseurs erfüllt. Damit sie auch erfüllt bleibe, wenn der Analyseur um einen Winkel θ gedreht wird, ist nöthig, dass

$$\sum [a^2 \cos^2 (\omega - \theta) + b^2 \sin^2 (\omega - \theta)]$$
$$= \sum [a^2 \sin^2 (\omega - \theta) + b^2 \cos^2 (\omega - \theta)].$$

Entwickelt man die erste Seite der Gleichung, so erhält man

$$\sum [a^2 (\cos \omega \cos \theta + \sin \omega \sin \theta)^2 + b^2 (\sin \omega \cos \theta - \cos \omega \sin \theta)^2]$$

oder

$$\cos^2\theta \sum (a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega) + \sin^2\theta \sum (a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega)$$
$$+ 2\sin\theta\cos\theta \sum (a^2 - b^2)\sin\omega\cos\omega.$$

Ebenso findet man für die zweite Seite der Gleichung

$$\cos^2\theta \sum (b^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega) + \sin^2\theta \sum (b^2\sin^2\omega + a^2\cos^2\omega)$$
$$- 2\sin\theta\cos\theta \sum (a^2 - b^2)\sin\omega\cos\omega.$$

Man erhält also mit Rücksicht auf die Gleichung 1)

$$\sum (a^2 - b^2)\sin\omega\cos\omega = - \sum (a^2 - b^2)\sin\omega\cos\omega$$

oder

$$\sum (a^2 - b^2)\sin\omega\cos\omega = 0.$$

Damit also ein System von Schwingungen für alle Stellungen des Analyseurs gleich helle Bilder giebt, müssen die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sein:

$$\sum (a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega) = \sum (a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega),$$
$$\sum (a^2 - b^2)\sin\omega\cos\omega = 0.$$

Dies vorausgesetzt kehren wir zur Reflexion des natürlichen Lichtes zurück, um die Intensität des reflectirten Strahles zu berechnen, und bezeichnen wie bisher mit 1 die Intensität des einfallenden Lichtes, mit a und b die Achsen der Vibrationsellipsen und mit ω den Winkel der kleinen Achse mit der Einfallsebene. Ein einfallender elliptisch polarisirter Strahl kann in zwei geradlinig polarisirte Strahlen zerlegt werden, deren Polarisationsebenen mit der Einfallsebene Winkel gleich 0^0 und 90^0 bilden. Die Intensitäten während einer Periode im Sinne der früher angestellten Betrachtung sind:

$$\sum (a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega) \text{ und } \sum (a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega).$$

Hat man natürliches Licht, so sind nach der früher angestellten Betrachtung diese Intensitäten gleich gross, und folglich ist die Intensität jedes der beiden geradlinig polarisirten Strahlen gleich $\frac{1}{2}$. Die Intensitäten der beiden reflectirten Strahlen werden nach den früher gefundenen Formeln sein:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}$$

und

$$\frac{1}{2}\,\frac{\tang^2(i-r)}{\tang^2(i+r)}.$$

Man hat also für die resultirende Intensität, oder für die Intensität das reflectirten Strahles:

$$R''' = \frac{1}{2}\,\frac{sin^2(i-r)}{sin^2(i+r)} + \frac{1}{2}\,\frac{tang^2(i-r)}{tang^2(i+r)}.$$

Wir wollen nun die Veränderungen betrachten, welche das natürliche Licht bei der Reflexion erfährt.

Ist $i + r = 90^0$, so wird $\frac{tang\,(i-r)}{tang\,(i+r)}$ gleich Null; es wird nur das in der Einfallsebene polarisirte Licht reflectirt, das unter dem Polarisationswinkel reflectirte natürliche Licht ist vollständig in der Einfallsebene polarisirt.

In allen anderen Fällen sind die reflectirten Schwingungen elliptisch; die Ellipsen sind zwar verschieden, aber alle im selben Sinne modificirt. Es ist nämlich das Verhältniss von $\frac{tang\,(i-r)}{tang\,(i+r)}$ zu $\frac{sin\,(i-r)}{sin\,(i+r)}$ gleich $\frac{cos\,(i+r)}{cos\,(i-r)}$, und dieser Bruch ist stets kleiner als eins. Es wird also die in die Einfallsebene fallende Composante der Bewegung durch die Reflexion mehr geschwächt als die andere Composante, das reflectirte Licht ist partiell polarisirt.

Um dies noch deutlicher zu machen, betrachten wir die Wirkung eines doppeltbrechenden Analyseurs auf dieses reflectirte Licht, und nehmen zur Vereinfachung den Hauptschnitt des Analyseurs parallel der Einfallsebene an. Dann bringt das in der Einfallsebene polarisirte Licht für sich das ordentliche Bild hervor, und das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Licht das ausserordentliche. Die Intensitäten des ordentlichen und des ausserordentlichen Bildes des Analyseurs sind:

$$O = \frac{1}{2}\,\frac{sin^2(i-r)}{sin^2(i+r)} \qquad E = \frac{1}{2}\,\frac{tang^2(i-r)}{tang^2(i+r)}.$$

Die Intensität des ordentlichen Bildes ist die grössere, und dies stimmt mit der Erfahrung überein.

Man hat

$$O = E + \frac{1}{2}\left[\frac{sin^2(i-r)}{sin^2(i+r)} - \frac{tang^2(i-r)}{tang^2(i+r)}\right].$$

Nimmt man nur die dem ersten Gliede dieses Ausdruckes entsprechende Bewegung und combinirt sie mit der Bewegung des ausserordentlichen Strahles, so hat man einen Strahl natürlichen Lichtes; der Rest der Bewegung repräsentirt einen geradlinig in der Einfallsebene polarisirten Strahl. Man kann also das von einem natürlichen Strahle herrührende reflectirte Licht ansehen als zusammengesetzt aus einer gewissen Menge natürlichen Lichtes und einer anderen Menge geradlinig in der Einfallsebene polarisirten Lichtes.

Um dies zu wiederholen:

Reflectirtes natürliches Licht ist in der Einfallsebene partiell polarisirt; für den Winkel der totalen Polarisation ist insbesondere die Polarisation eine totale.

Die Intensität des reflectirten Lichtes ist:

$$\frac{1}{2}\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}+\frac{1}{2}\frac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)}.$$

Das reflectirte Licht kann angesehen werden als zusammengesetzt aus einer gewissen Menge vollständig in der Einfallsebene polarisirten Lichtes, dessen Intensität gleich

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}-\frac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)}\right]$$

oder

$$\frac{1}{2}\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}\left[1-\frac{\cos^2(i+r)}{\cos^2(i-r)}\right]$$

ist, und aus einer anderen Menge natürlichen Lichtes, dessen Intensität

$$\frac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)}$$

ist.

Bezeichnet man die Menge des natürlichen Lichtes mit m^2, und jene des polarisirten mit n^2, so hat man für die Intensitäten A^2 und B^2 der Composanten der reflectirten Bewegung

$$A^2 = n^2 + \frac{m^2}{2},\quad B^2 = \frac{m^2}{2}.$$

Nehmen wir nun an, dass das einmal reflectirte Licht noch ein zweites Mal unter derselben Incidenz und in derselben Einfallsebene reflectirt werde, so ergiebt sich nach der zweiten Reflexion

$$A_2^2 = \left(n^2+\frac{m^2}{2}\right)\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)},\quad B_2^2 = \frac{m^2}{2}\frac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)}.$$

Das Licht ist immer noch in der Einfallsebene polarisirt.

Die Gesammtintensität des Lichtes nach zwei Reflexionen ist

$$\left(n^2+\frac{m^2}{2}\right)\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}+\frac{m^2}{2}\frac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)}.$$

Hiervon kommt auf das natürliche Licht

$$m^2\frac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)},$$

und auf das vollständig in der Einfallsebene polarisirte Licht

$$n^2\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}+\frac{m^2}{2}\left[\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}-\frac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)}\right].$$

Man sieht, dass durch die zweite Reflexion die Polarisation des Lichtes vermehrt wird. Ebenso verhält es sich bei drei und mehreren Reflexionen. Bei einer grossen Zahl von Reflexionen verwandelt sich das natürliche Licht in solches, welches nahe vollständig in der Einfallsebene polarisirtes ist.

463. Brechung des in der Einfallsebene polarisirten Lichtes.

Mit der Brechung des polarisirten Lichtes verhält es sich analog wie mit der Reflexion desselben. Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, wo das Licht in der Einfallsebene polarisirt ist. Es ist unmittelbar klar, dass der gebrochene Strahl ebenfalls in der Einfallsebene polarisirt ist. Um seine Amplitude u zu finden, können wir uns wie bei der Reflexion jener beiden Gleichungen bedienen, welche wir aus dem Principe der Continuität und aus jenem der lebendigen Kräfte gezogen haben:

$$1 + v = u$$

$$(1 - v^2) \sin r \cos i = u^2 \sin i \cos r.$$

Indem wir v aus den beiden Gleichungen eliminiren, erhalten wir successive

$$(1 - v) \sin r \cos i = u \sin i \cos r$$

$$(2 - u) \sin r \cos i = u \sin i \cos r$$

und schliesslich

$$u = \frac{2 \sin r \cos i}{\sin (i + r)}.$$

Für die senkrechte Incidenz, also für $i = 0$, nimmt die Amplitude u die Form $\frac{0}{0}$ an; setzt man jedoch, wie früher, statt der Sinus die Bogen, so erhält man als wahren Werth von u

$$u = \frac{2}{n + 1}.$$

Bei der streifenden Incidenz, also wenn $i = 90^0$, ergiebt sich, wenn das zweite Mittel das optisch dichtere ist, für u der Werth Null, d. h. es giebt keinen gebrochenen Strahl. Ist das zweite Mittel das optisch dünnere, so erhält man für die Incidenz der totalen Reflexion, also für $r = 90^0$,

$$u = 2,$$

für einen grösseren Incidenzwinkel giebt es keinen gebrochenen Strahl.

Um die Intensität des gebrochenen Strahles zu erhalten, genügt es jetzt nicht mehr, u zum Quadrate zu erheben; u^2 misst nicht mehr, wie bei der Reflexion, die Intensität, da der Aether in den beiden Mitteln

verschiedene Dichte hat. Erinnern wir uns an die Aetherprismen, welche uns im Falle der Reflexion zur Aufstellung der Formeln dienten, nehmen wir ferner die Masse jenes Prismas, welches sich im ersten Mittel befindet, zur Einheit, und bezeichnen wir mit m die Masse des im zweiten Mittel befindlichen Prismas, auf welches sich die Bewegung überträgt, so ist die Intensität des gebrochenen Strahles gleich $m u^2$. Nun zeigt schon die Gleichung

$$(1 - v^2) \sin r \cos i = u^2 \sin i \cos r,$$

welche die Quadrate der Vibrationsgeschwindigkeiten multiplicirt mit den Massen enthält, dass die Massen der beiden Prismen, um welche es sich handelt, sich zu einander verhalten wie $\sin r \cos i$ zu $\sin i \cos r$, d. h. dass man hat

$$m = \frac{\sin i \cos r}{\sin r \cos i}.$$

Es ergiebt sich folglich für die Intensität R_1 des gebrochenen Strahles

$$R_1 = m u^2 = \frac{\sin i \cos r}{\sin r \cos i} \frac{4 \sin^2 r \cos^2 i}{\sin^2 (i + r)}$$

oder

$$R_1 = \frac{\sin 2 i \sin 2 r}{\sin^2 (i + r)}.$$

Zu dieser Gleichung kann man auch gelangen, wenn man die Gleichung der lebendigen Kräfte in der Form

$$1 - v^2 = m u^2$$

schreibt und für v seinen Werth $\frac{\sin (i - r)}{\sin (i + r)}$ setzt, wodurch man erhält:

$$m u^2 = 1 - \frac{\sin^2 (i - r)}{\sin^2 (i + r)} = \frac{\sin^2 (i + r) - \sin^2 (i - r)}{\sin^2 (i + r)}$$
$$= \frac{[\sin (i + r) + \sin (i - r)] [\sin (i + r) - \sin (i - r)]}{\sin^2 (i + r)}$$
$$= \frac{4 \sin i \cos r \cos i \sin r}{\sin^2 (i + r)} = \frac{\sin 2 i \sin 2 r}{\sin^2 (i + r)},$$

wie früher.

Wir können die Variationen von R_1 leicht verfolgen: da wir die Variationen von v kennen, ergeben sich unmittelbar jene von $1 - v^2$ oder $m u^2$, also die Variationen von R_1. So hat man für $i = 0$

$$v = \frac{n - 1}{n + 1},$$

und erhält hieraus

$$R_1 = m u^2 = 1 - \left(\frac{n - 1}{n + 1}\right)^2 = \frac{4 n}{(n + 1)^2}.$$

Dies ist die Intensität des bei normaler Incidenz gebrochenen Strahles.

Ist das zweite Mittel das optisch dichtere, so wird für die streifende Incidenz die Intensität des gebrochenen Strahles der Null gleich. Ist das zweite Mittel das optisch dünnere, so wird gleicherweise für die Incidenz der totalen Reflexion, also für $r = 90^0$, die Intensität des gebrochenen Strahles der Null gleich. Man könnte einen Widerspruch darin finden, dass die Intensität gleich Null sein soll und gleichwohl die Amplitude, wie wir gefunden haben, gleich 2; allein es ist nicht zu vergessen, dass in diesem Falle die Masse des Aetherprismas im zweiten Mittel gleich Null ist.

464. Brechung des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes.

Ist der einfallende Strahl senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, so verlangt schon die Symmetrie, dass der gebrochene Strahl ebenso polarisirt sei. Um die Amplitude des gebrochenen Strahles zu finden, haben wir die beiden Gleichungen

$$(1 + v') \cos i = u' \cos r$$

$$(1 - v'^2) \sin r \cos i = u'^2 \sin i \cos r.$$

Man erhält, wenn man die zweite Gleichung durch die erste dividirt,

$$(1 - v') \sin r = u' \sin i,$$

und wenn man für v' den sich aus der ersten Gleichung ergebenden Werth setzt,

$$\left(2 - u' \frac{\cos r}{\cos i}\right) \sin r = u' \sin i$$

oder

$$u' = \frac{2 \sin r \cos i}{\sin i \cos i + \sin r \cos r} = \frac{4 \sin r \cos i}{\sin 2i + \sin 2r}$$

und schliesslich

$$u' = \frac{2 \sin r \cos i}{\sin (i + r) \cos (i - r)}.$$

Wir haben für den Fall, wo das einfallende Licht in der Einfallsebene polarisirt ist, die Amplitude des gebrochenen Strahles gleich

$$u = \frac{2 \sin r \cos i}{\sin (i + r)}$$

gefunden. Man sieht, dass das Verhältniss $\frac{u'}{u}$ ein sehr einfaches ist, nämlich $\frac{1}{\cos (i - r)}$.

Die Intensität des gebrochenen Strahles ist gleich $m u'^2$. Das giebt

$$R'_1 = \frac{\sin i \cos r}{\sin r \cos i} \frac{4 \sin^2 r \cos^2 i}{\sin^2 (i + r) \cos^2 (i - r)},$$

oder

$$R'_1 = \frac{\sin 2 i \sin 2 r}{\sin^2 (i + r) \cos^2 (i - r)}.$$

Auch diesen Ausdruck kann man mittelst der Gleichung

$$1 - v'^2 = m u'^2$$

erhalten. Es ergiebt sich

$$m u'^2 = 1 - \frac{tang^2 (i - r)}{tang^2 (i + r)},$$

und nach leichten Transformationen

$$m u'^2 = \frac{\sin 2 i \sin 2 r}{\sin^2 (i + r) \cos^2 (i - r)}.$$

Die Discussion des Werthes von R'_1 reducirt sich also auf jene von $\frac{tang^2 (i - r)}{tang^2 (i + r)}$.

Bei der normalen Incidenz kann man für die Tangenten der Winkel $i - r$ und $i + r$ die Bogen setzen und erhält für $\frac{tang^2 (i - r)}{tang^2 (i + r)}$ den Werth $\frac{(n - 1)^2}{(n + 1)^2}$; daraus findet man für $m u'^2$ oder R'_1 den Werth $\frac{4 n}{(n + 1)^2}$, wie in dem früher betrachteten Falle des in der Einfallsebene polarisirten Lichtes.

Wächst der Incidenzwinkel von $i = 0$ bis $i + r = 90^0$, so nimmt die Grösse $\frac{tang^2 (i - r)}{tang^2 (i + r)}$ ab und folglich wächst die Intensität des gebrochenen Strahles. Wächst der Winkel i weiter bis 90^0, wenn das zweite Mittel das optisch dichtere ist, oder bis $r = 90^0$, wenn es das dünnere ist, so wächst die Grösse $\frac{tang^2 (i - r)}{tang^2 (i + r)}$, und folglich nimmt die Intensität des gebrochenen Strahles ab, um an der Grenze gleich Null zu werden. Ist also der einfallende Strahl senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, so hat der gebrochene Strahl ein Maximum der Intensität gleich eins bei der Incidenz der totalen Polarisation des reflectirten Strahles, während daselbst der reflectirte Strahl vollständig ausgelöscht ist.

465. Brechung des in einer beliebigen Ebene polarisirten Lichtes.

Einen in einer beliebigen Ebene polarisirten einfallenden Strahl denkt man zerlegt in zwei Strahlen, welche bezüglich in der Einfalls-

ebene und senkrecht zu derselben polarisirt sind. Setzt man die Amplitude des einfallenden Strahles der Einheit gleich und bezeichnet mit α den Winkel der Polarisationsebene dieses Strahles mit der Einfallsebene, so sind die Amplituden der beiden Strahlen, welche man durch Zerlegung erhält, gleich $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$. Die Composanten der Amplitude des gebrochenen Strahles sind $u\cos\alpha$ und $u'\sin\alpha$. Dieser Strahl ist geradlinig polarisirt, und der Winkel seiner Polarisationsebene mit der Einfallsebene ist nach (464)

$$\tang\gamma = \frac{u'}{u}\cdot\tang\alpha = \frac{\tang\alpha}{\cos(i-r)}.$$

Da $i - r$ stets zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, also $\cos(i-r)$ stets positiv ist, hat $\tang\gamma$ dasselbe Vorzeichen wie $\tang\alpha$. Die Polarisationsebene des gebrochenen Strahles ist stets im selben Sinne gegen die Einfallsebene gedreht wie die Polarisationsebene des einfallenden Strahles. Da ferner $\tang\gamma$ grösser ist als $\tang\alpha$, so sieht man, dass durch die Brechung die Polarisationsebene von der Einfallsebene entfernt wird und sich der zur Einfallsebene senkrechten Ebene nähert. Die Wirkung ist also hier entgegengesetzt der bei der Reflexion eintretenden.

Für die normale Incidenz hat man $i = 0$ und $r = 0$, folglich $\gamma = \alpha$: Die Polarisationsebene ändert ihre Lage nicht.

Ist das zweite Mittel das optisch dichtere und wächst der Incidenzwinkel von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, oder ist es das dünnere und wächst der Incidenzwinkel bis zum Winkel der totalen Reflexion, so nimmt $\cos(i-r)$ ab und $\tang\gamma$ zu. Die Deviation der Polarisationsebene des gebrochenen Strahles wächst also mit dem Incidenzwinkel und erreicht ihr Maximum bei der streifenden Incidenz oder bei der Incidenz der totalen Reflexion.

Der Winkel γ kann bei einer einzigen Brechung nie den Werth $\frac{\pi}{2}$ erreichen, denn für keinen Werth von i wird $i - r = \frac{\pi}{2}$; durch eine einzige Brechung kann also das Licht nicht in einer Ebene senkrecht zur Einfallsebene polarisirt werden. Lässt man aber das Licht durch eine Reihe parallel begrenzter Mittel treten, beispielsweise durch eine Glasplattensäule, so ist der Winkel γ_n, welchen die Polarisationsebene des Strahles nach dem Durchgange durch n Glasplatten mit der Einfallsebene bildet, gegeben durch

$$\tang\gamma_n = \frac{\tang\alpha}{\cos^{2n}(i-r)};$$

für eine grosse Zahl Platten nähert sich γ_n dem Werthe $\frac{\pi}{2}$. Diese Bemerkung ist wichtig in Bezug auf die Erklärung der Wirkung der Glasplattensäulen auf das in einer beliebigen Ebene polarisirte Licht.

Suchen wir nun die Amplitude U und die Intensität R_1'' des gebrochenen Strahles. Man hat offenbar

$$U = \sqrt{u^2 \cos^2 \alpha + u'^2 \sin^2 \alpha},$$

und mit Rücksicht auf die für u und u' früher gefundenen Werthe

$$U = 2 \sin r \cos i \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 (i+r)} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 (i+r) \cos^2 (i-r)}}.$$

Die Intensität ist $m\,U^2$, daher

$$R_1'' = \frac{\sin i \cos r}{\sin r \cos i} 4 \sin^2 r \cos^2 i \left[\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 (i+r)} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 (i+r) \cos^2 (i-r)}\right],$$

oder einfacher

$$R_1'' = \sin 2 r \sin 2 i \left[\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 (i+r)} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 (i+r) \cos^2 (i-r)}\right].$$

466. Brechung des natürlichen Lichtes.

Hat man natürliches oder partiell polarisirtes Licht, so kann man verfahren wie bei der Reflexion. Doch lässt sich der Gang der Rechnung vereinfachen. Man kann (238) den natürlichen Strahl ersetzen durch zwei, in der Einfallsebene und senkrecht zu derselben polarisirte Strahlen von gleicher Intensität, welche in raschem Wechsel auf einander folgen. Die Intensitäten dieser beiden Strahlen, welche für den natürlichen Strahl substituirt werden, sind gleich $\frac{1}{2}$. Nach der Brechung sind die Intensitäten dieser Strahlen (464)

$$\frac{1}{2} \frac{\sin 2 i \sin 2 r}{\sin^2 (i+r)}$$

und

$$\frac{1}{2} \frac{\sin 2 i \sin 2 r}{\sin^2 (i+r) \cos^2 (i-r)}.$$

Wird also natürliches Licht gebrochen, so ist die Intensität des gebrochenen Lichtes:

$$R_1''' = \frac{1}{2} \frac{\sin 2 i \sin 2 r}{\sin^2 (i+r)} + \frac{1}{2} \frac{\sin 2 i \sin 2 r}{\sin^2 (i+r) \cos^2 (i-r)},$$

oder auch

$$R_1''' = \frac{1}{2} \frac{\sin 2 i \sin 2 r}{\sin^2 (i+r)} \left[1 + \frac{1}{\cos^2 (i-r)}\right].$$

Aus den Ausdrücken für die Intensitäten der beiden Composanten des gebrochenen Lichtes geht hervor, dass dieses angesehen werden kann als bestehend aus einer Quantität natürlichen Lichtes von der Intensität

$$\frac{\sin 2 i \sin 2 r}{\sin^2 (i+r)}$$

und aus einer anderen Quantität senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes von der Intensität

$$\frac{1}{2}\frac{\sin 2i \sin 2r}{\sin^2(i+r)\cos^2(i-r)} - \frac{1}{2}\frac{\sin 2i \sin 2r}{\sin^2(i+r)}.$$

Es folgt hieraus, dass das gebrochene Licht partiell polarisirt ist, und dass die Ebene der partiellen Polarisation auf der Einfallsebene senkrecht steht. Da der Ausdruck, welcher die Quantität des natürlichen Lichtes darstellt, niemals der Null gleich werden kann, so folgt, dass natürliches Licht durch eine einzige Brechung niemals vollständig polarisirt werden kann.

Anders verhält es sich, wenn das natürliche Licht durch eine Reihe planparallel begrenzter Medien tritt, beispielsweise durch eine Glasplattensäule. Man hat hier nach n Brechungen für die Intensität des in der Einfallsebene polarisirten Lichtes

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2i \sin 2r}{\sin^2(i+r)}\right]^n,$$

und für die Intensität des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2i \sin 2r}{\sin^2(i+r)\cos^2(i-r)}\right]^n.$$

Das Verhältniss der ersteren Intensität zur letzteren ist $\cos^{2n}(i-r)$ und nähert sich bei fortgesetzt wachsendem n der Null. Wenn also natürliches Licht durch eine Glasplattensäule tritt, so wird es um so vollständiger senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, je grösser die Zahl der Glasplatten ist.

Die Intensität des nach einer einzigen Brechung senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Theiles des gebrochenen Lichtes ist

$$\frac{1}{2}\frac{\sin 2i \sin 2r}{\sin^2(i+r)\cos^2(i-r)} - \frac{1}{2}\frac{\sin 2i \sin 2r}{\sin^2(i+r)},$$

oder

$$\frac{1}{2}\frac{\sin 2i \sin 2r}{\sin^2(i+r)}\left[\frac{1}{\cos^2(i-r)} - 1\right]$$

oder schliesslich

$$\frac{1}{2}\frac{\sin 2i \sin 2r \sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)\cos^2(i-r)}.$$

Bei Betrachtung der Reflexion des natürlichen Lichtes fanden wir als Ausdruck für die Intensität jenes Theiles des reflectirten Lichtes, welches als in der Einfallsebene polarisirt angesehen werden kann,

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} - \frac{\operatorname{tang}^2(i-r)}{\operatorname{tang}^2(i+r)}\right],$$

wofür geschrieben werden kann

$$\frac{1}{2}\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}\left[1-\frac{\cos^2(i+r)}{\cos^2(i-r)}\right]$$

oder

$$\frac{1}{2}\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}\left[\frac{\cos^2(i-r)-\cos^2(i+r)}{\cos^2(i-r)}\right],$$

oder

$$\frac{1}{2}\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}\frac{[\cos(i-r)+\cos(i+r)][\cos(i-r)-\cos(i+r)]}{\cos^2(i-r)}$$

oder schliesslich

$$\frac{1}{2}\frac{\sin 2i \sin 2r \sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)\cos^2(i-r)}.$$

Dieser letztere Ausdruck ist identisch mit jenem, welcher sich für die Intensität des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Theiles des gebrochenen Lichtes ergeben hat. Fällt also natürliches Licht auf die Trennungsfläche zweier Medien, so ist die absolute Menge des polarisirten Theiles des reflectirten Lichtes gleich der absoluten Menge des polarisirten Theiles des gebrochenen Lichtes. Die relativen Mengen hingegen sind ungleich, da die Gesammtmengen des reflectirten und des gebrochenen Lichtes ungleich sind. Diese Bemerkung wird uns in der Folge oft nützlich sein.

467. Totale Reflexion.

Wir haben bisher die totale Reflexion ausser Betracht gelassen. Ist das zweite Mittel optisch dünner als das erste, und überschreitet der Incidenzwinkel eine gewisse Grösse, so findet man für $\sin r$ einen Werth grösser als eins. Der Winkel r wird also imaginär und die Formeln für die Amplituden und Intensitäten des reflectirten und des gebrochenen Strahles verlieren ihre Anwendbarkeit.

Betrachten wir zunächst den Fall, wo das einfallende Licht in der Einfallsebene polarisirt ist. Ueberschreitet der Winkel i jenen Werth, für welchen $r = \frac{\pi}{2}$, so lehrt das Experiment, dass es keinen gebrochenen Strahl giebt, und dass der reflectirte Strahl dem einfallenden Strahle an Intensität gleich und wie dieser in der Einfallsebene polarisirt ist. Die Theorie bestätigt dieses Resultat: Das Huyghens'sche Princip zeigt, dass es keinen gebrochenen Strahl giebt, das Princip der lebendigen Kräfte verlangt, dass die Intensität des reflectirten Strahles jener des einfallenden gleich sei, und die Symmetrie verlangt, dass der reflectirte Strahl in der Einfallsebene polarisirt sei.

Die Formel, welche wir für die Amplitude des reflectirten Strahles für den Fall erhielten, wo das einfallende Licht in der Einfallsebene polarisirt ist, nämlich

$$v = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)},$$

giebt für v einen imaginären Werth, sobald das zweite Mittel das optisch dünnere ist und i den Winkel der totalen Reflexion überschreitet. Man hat nämlich in diesem Falle, wenn man für $\sin r$ seinen Werth $n \sin i$ setzt, so dass n der Brechungsexponent aus dem dünneren in das dichtere Mittel ist,

$$v = -\frac{\sin i \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i} - n \sin i \cos i}{\sin i \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i} + n \sin i \cos i}.$$

Ist nun i grösser als der Winkel der totalen Reflexion, so hat man $n \sin i > 1$, die Grössen unter den Wurzelzeichen sind negativ, der Ausdruck für v wird imaginär; wir schreiben denselben:

$$v = \frac{n \sin i \cos i - \sin i \sqrt{n^2 \sin^2 i - 1}\sqrt{-1}}{n \sin i \cos i + \sin i \sqrt{n^2 \sin^2 i - 1}\sqrt{-1}}.$$

Da hier ein Widerspruch zwischen dem Experimente und den Consequenzen der Theorie vorliegt, muss man schliessen, dass die Principien, von welchen diese Theorie ausgeht, nicht vollkommen exact sind, wenigstens für den Fall, um welchen es sich hier handelt.

Es scheint ferner, dass jene der Annahmen Fresnel's nicht völlig exact ist, nach welcher die Veränderungen der Vibrationsbewegung an der Trennungsfläche plötzlich vor sich gehen sollen.

468. Interpretation der imaginären Ausdrücke.

Statt die Theorie der totalen Reflexion unter modificirten Voraussetzungen neu zu entwickeln, knüpfte vielmehr Fresnel an die für den gewöhnlichen Fall der Reflexion erhaltenen Formeln an [1]) und nahm seine Zuflucht zu einer willkürlichen Interpretation seiner imaginären Ausdrücke, welche jedoch zu Resultaten führte, die mit der Erfahrung übereinstimmen.

Im Falle der totalen Reflexion nimmt die Amplitude v des reflectirten Strahles die Form $a + b\sqrt{-1}$ an. Fresnel fasste diesen Ausdruck so auf, dass man von einem Punkte 0 aus die beiden Längen a, b unter einem rechten Winkel abzutragen habe, und dass alsdann $a + b\sqrt{-1}$ die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreieckes, dessen Katheten a und b sind, bedeute; mit anderen Worten, er betrachtete die Grössen a, b als Amplituden zweier Lichtmengen, welche man nicht unmittelbar zusammenstellen darf, weil sie durch die Reflexion einen

---

[1]) *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXIX, 175. *OEuvres complètes*, I, 253.

Phasenunterschied $\frac{\pi}{2}$ erfahren haben (55). Ein solcher reflectirter Strahl kann stets durch

$$a \sin 2\pi \frac{t}{T} + b \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

ausgedrückt werden, wenn $\sin 2\pi \frac{t}{T}$ die Bewegung des einfallenden Strahles ist. Die Amplitude des reflectirten Strahles ist dann $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Beginnen wir damit, den für v gefundenen Ausdruck auf die Form $a + b\sqrt{-1}$ zu bringen. Wir haben

$$v = \frac{n \sin i \cos i - \sin i \sqrt{n^2 \sin^2 i - 1}\sqrt{-1}}{n \sin i \cos i + \sin i \sqrt{n^2 \sin^2 i - 1}\,\sqrt{-1}},$$

oder wenn wir den Nenner rational machen,

$$v = \frac{n^2 \sin^2 i \cos^2 i - n^2 \sin^4 i + \sin^2 i - 2n \sin^2 i \cos i \sqrt{n^2 \sin^2 i - 1}\sqrt{-1}}{n^2 \sin^2 i \cos^2 i + \sin^2 i (n^2 \sin^2 i - 1)},$$

oder

$$v = \frac{1 + n^2 - 2n^2 \sin^2 i - 2n \cos i \sqrt{n^2 \sin^2 i - 1}\sqrt{-1}}{n^2 - 1},$$

oder schliesslich

$$v = \frac{1 + n^2 - 2n^2 \sin^2 i}{n^2 - 1} - \frac{2n \cos i \sqrt{n^2 \sin^2 i - 1}\sqrt{-1}}{n^2 - 1}.$$

Andererseits kann der Ausdruck

$$a \sin 2\pi \frac{t}{T} + b \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

geschrieben werden:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + arc\,tang \frac{b}{a}\right).$$

$\sqrt{a^2 + b^2}$ ist die Amplitude v des reflectirten Strahles, und $tang \frac{b}{a}$ die Phasendifferenz zwischen dem reflectirten und dem einfallenden Strahle.

Nimmt man also Fresnel's Interpretation der imaginären Ausdrücke an, so erhält man für die Intensität des reflectirten Strahles

$$R = \frac{(1 + n^2 - 2n^2 \sin^2 i)^2 + 4n^2 \cos^2 i (n^2 \sin^2 i - 1)}{(1 - n^2)^2}$$

oder

$$R = \frac{(n^2 + 1)^2 + 4n^4 \sin^2 i - 4n^2 (n^2 + 1) \sin^2 i - 4n^2 \cos^2 i}{(1 - n^2)^2}$$

oder schliesslich

$$R = \frac{(n^2 + 1)^2 - 4n^2}{(1 - n^2)^2} = 1.$$

Wir finden so, dass die Intensität des reflectirten Strahles gleich ist jener des einfallenden, und dies steht in Uebereinstimmung mit Experiment und Theorie.

Es bleibt die Phasendifferenz des reflectirten Strahles gegen den einfallenden im Einfallspunkte zu bestimmen. Drückt man die Bewegung des reflectirten Strahles durch $\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varphi}{\lambda}\right)$ aus, so ist die Phasendifferenz gleich $2\pi\frac{\varphi}{\lambda}$. Man hat also

$$2\pi\frac{\varphi}{\lambda} = arc\ tang\frac{b}{a},\quad tang\, 2\pi\frac{\varphi}{\lambda} = \frac{b}{a}$$

und

$$tang\, 2\pi\frac{\varphi}{\lambda} = -\frac{2n\cos i\sqrt{n^2\sin^2 i - 1}}{n^2 - 1 - 2n^2\sin^2 i}.$$

Diese Formel, welche für einen in der Einfallsebene polarisirten Strahl gilt, ist zur experimentellen Verification geeignet.

Ganz analog ist die Rechnung für einen Strahl, welcher senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist; man hat nur v durch v' zu ersetzen. Es ergiebt sich

$$v' = \frac{\sin i\cos i - n\sin i(\sqrt{n^2\sin^2 i - 1})\sqrt{-1}}{\sin i\cos i + n\sin i(\sqrt{n^2\sin^2 i - 1})\sqrt{-1}}$$

und

$$v' = \frac{n^2 + 1 - (n^4 + 1)\sin^2 i}{(n^2 - 1)[(1 + n^2)\sin^2 i - 1]} - \frac{2n\cos i\sqrt{n^2\sin^2 i - 1}}{(n^2 - 1)[(1 + n^2)\sin^2 i - 1]}\sqrt{-1}.$$

Man hat also hier

$$a = \frac{n^2 + 1 - (n^4 + 1)\sin^2 i}{(n^2 - 1)[(1 + n^2)\sin^2 i - 1]},\quad b = -\frac{2n\cos i\sqrt{n^2\sin^2 i - 1}}{(n^2 - 1)[(1 + n^2)\sin^2 i - 1]}.$$

Die Intensität des reflectirten Strahles ist auch hier $a^2 + b^2$, und man erhält nach Vereinfachung des Ausdruckes abermals die Einheit.

Bezeichnet man ferner durch $\frac{\varphi'}{\lambda}$ die Phasendifferenz des reflectirten Strahles gegen den einfallenden im Incidenzpunkte, so erhält man

$$tang\, 2\pi\frac{\varphi'}{\lambda} = \frac{b}{a} = -\frac{2n\cos i\sqrt{n^2\sin^2 i - 1}}{n^2 + 1 - (1 + n^4)\sin^2 i}.$$

Es sind demnach die Phasendifferenzen, wenn das einfallende Licht in der Einfallsebene polarisirt ist,

$$tang\, 2\pi\frac{\varphi}{\lambda} = -\frac{2n\cos i\sqrt{n^2\sin^2 i - 1}}{n^2 - 1 - 2n^2\sin^2 i},$$

und wenn es senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist,

$$tang\, 2\pi\frac{\varphi'}{\lambda} = -\frac{2n\cos i\sqrt{n^2\sin^2 i - 1}}{n^2 + 1 - (1 + n^4)\sin^2 i}.$$

469. Constitution des total reflectirten Lichtes.

Was die experimentelle Verification der erhaltenen Formeln anlangt, so ergiebt sich dieselbe aus der Reflexion eines geradlinig polarisirten Strahles, dessen Polarisationsebene mit der Einfallsebene einen beliebigen Winkel α einschliesst. Ein solcher Strahl lässt sich in zwei Strahlen zerlegen, von welchen der eine in der Einfallsebene, der andere senkrecht zu derselben polarisirt ist. Die beiden, diesen Strahlen entsprechenden, reflectirten Strahlen haben die Amplituden $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, und sie haben gegen die ihnen entsprechenden einfallenden Composanten die Phasendifferenzen $2\pi\frac{\varphi}{\lambda}$, $2\pi\frac{\varphi'}{\lambda}$. Der reflectirte Strahl, welcher sich aus diesen beiden Strahlen zusammensetzt, ist elliptisch polarisirt. Die Phasendifferenz der beiden Composanten des reflectirten Strahles ist $2\pi\frac{\varphi-\varphi'}{\lambda}$, und lässt sich, wie folgt, berechnen.

Setzen wir

$$\tang 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}=\frac{A}{B},\quad \tang 2\pi\frac{\varphi'}{\lambda}=\frac{A}{B'},$$

so erhalten wir

$$\cos 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad \sin 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$\cos 2\pi\frac{\varphi'}{\lambda}=\frac{B'}{\sqrt{A^2+B'^2}},\quad \sin 2\pi\frac{\varphi'}{\lambda}=\frac{A}{\sqrt{A^2+B'^2}},$$

und

$$\cos 2\pi\frac{\varphi-\varphi'}{\lambda}=\frac{A^2+BB'}{\sqrt{(A^2+B^2)(A^2+B'^2)}},$$

und wenn wir A, B, B' durch ihre Werthe ersetzen,

$$\cos 2\pi\frac{\varphi-\varphi'}{\lambda}$$

$$=\frac{4n^2\cos^2 i(n^2\sin^2 i-1)+(1+n^2-2n^2\sin^2 i)[1+n^2-(n^4+1)\sin^2 i]}{\sqrt{[4n^2\cos^2 i(n^2\sin^2 i-1)+(1+n^2-2n^2\sin^2 i)^2]\{4n^2\cos^2 i(n^2\sin^2 i-1)+[1+n^2-(n^4+1)\sin^2 i]^2\}}}.$$

Sind alle Reductionen vorgenommen, so hat man

$$\cos 2\pi\frac{\varphi-\varphi'}{\lambda}=\frac{1-(1+n^2)\sin^2 i+2n^2\sin^4 i}{(1+n^2)\sin^2 i-1}.$$

Um also den reflectirten Strahl zu erhalten, hat man zwei, parallel und normal zur Einfallsebene polarisirte Strahlen zusammenzusetzen, deren Intensitäten gleich $\sin^2\alpha$ und $\cos^2\alpha$ sind, und deren Phasendifferenz durch die letzte Gleichung gegeben ist. Der reflectirte Strahl ist im

Wir finden so, dass die Intensität des reflectirten Strahles gleich ist jener des einfallenden, und dies steht in Uebereinstimmung mit Experiment und Theorie.

Es bleibt die Phasendifferenz des reflectirten Strahles gegen den einfallenden im Einfallspunkte zu bestimmen. Drückt man die Bewegung des reflectirten Strahles durch $\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\varphi}{\lambda}\right)$ aus, so ist die Phasendifferenz gleich $2\pi\frac{\varphi}{\lambda}$. Man hat also

$$2\pi\frac{\varphi}{\lambda} = \operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}, \quad \operatorname{tang} 2\pi\frac{\varphi}{\lambda} = \frac{b}{a}$$

und

$$\operatorname{tang} 2\pi\cdot\frac{\varphi}{\lambda} = -\frac{2n\cos i\sqrt{n^2\sin^2 i - 1}}{n^2+1-2n^2\sin^2 i}.$$

Diese Formel, welche für einen in der Einfallsebene polarisirten Strahl gilt, ist zur experimentellen Verification geeignet.

Ganz analog ist die Rechnung für einen Strahl, welcher senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist; man hat nur v durch v' zu ersetzen. Es ergiebt sich

$$v' = \frac{\sin i\cos i - n\sin i\sqrt{n^2\sin^2 i - 1}\sqrt{-1}}{\sin i\cos i + n\sin i\sqrt{n^2\sin^2 i - 1}\sqrt{-1}}$$

und

$$v' = \frac{n^2+1-(n^4+1)\sin^2 i}{(n^2-1)\left[(1+n^2)\sin^2 i - 1\right]} - \frac{2n\cos i\sqrt{n^2\sin^2 i - 1}}{(n^2-1)\left[(1+n^2)\sin^2 i - 1\right]}\sqrt{-1}.$$

Man hat also hier

$$a = \frac{n^2+1-(n^4+1)\sin^2 i}{(n^2-1)\left[(1+n^2)\sin^2 i - 1\right]}, \quad b = -\frac{2n\cos i\sqrt{n^2\sin^2 i - 1}}{(n^2-1)\left[(1+n^2)\sin^2 i - 1\right]}.$$

Die Intensität des reflectirten Strahles ist auch hier a^2+b^2, und man erhält nach Vereinfachung des Ausdruckes abermals die Einheit.

Bezeichnet man ferner durch $\frac{\varphi'}{\lambda}$ die Phasendifferenz des reflectirten Strahles gegen den einfallenden im Incidenzpunkte, so erhält man

$$\operatorname{tang} 2\pi\frac{\varphi'}{\lambda} = \frac{b}{a} = \frac{2n\cos i\sqrt{n^2\sin^2 i - 1}}{n^2+1-(1+n^4)\sin^2 i}.$$

Es sind demnach die Phasendifferenzen, wenn das einfallende Licht in der Einfallsebene polarisirt ist,

$$\operatorname{tang} 2\pi\frac{\varphi}{\lambda} = -\frac{2n\cos i\sqrt{n^2\sin^2 i - 1}}{n^2+1-2n^2\sin^2 i},$$

und wenn es senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist,

$$\operatorname{tang} 2\pi\frac{\varphi'}{\lambda} = -\frac{2n\cos i\sqrt{n^2\sin^2 i - 1}}{n^2+1-(1+n^4)\sin^2 i}.$$

469. Constitution des total reflectirten Lichtes.

Was die experimentelle Verification der erhaltenen Formeln anlangt, so ergiebt sich dieselbe aus der Reflexion eines geradlinig polarisirten Strahles, dessen Polarisationsebene mit der Einfallsebene einen beliebigen Winkel α einschliesst. Ein solcher Strahl lässt sich in zwei Strahlen zerlegen, von welchen der eine in der Einfallsebene, der andere senkrecht zu derselben polarisirt ist. Die beiden, diesen Strahlen entsprechenden, reflectirten Strahlen haben die Amplituden $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, und sie haben gegen die ihnen entsprechenden einfallenden Composanten die Phasendifferenzen $2\pi\frac{\varphi}{\lambda}$, $2\pi\frac{\varphi'}{\lambda}$. Der reflectirte Strahl, welcher sich aus diesen beiden Strahlen zusammensetzt, ist elliptisch polarisirt. Die Phasendifferenz der beiden Composanten des reflectirten Strahles ist $2\pi\frac{\varphi-\varphi'}{\lambda}$, und lässt sich, wie folgt, berechnen.

Setzen wir

$$tang\, 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}=\frac{A}{B},\quad tang\, 2\pi\frac{\varphi'}{\lambda}=\frac{A}{B'},$$

so erhalten wir

$$\cos 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad \sin 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$\cos 2\pi\frac{\varphi'}{\lambda}=\frac{B'}{\sqrt{A^2+B'^2}},\quad \sin 2\pi\frac{\varphi'}{\lambda}=\frac{A}{\sqrt{A^2+B'^2}},$$

und

$$\cos 2\pi\frac{\varphi-\varphi'}{\lambda}=\frac{A^2+BB'}{\sqrt{(A^2+B^2)(A^2+B'^2)}},$$

und wenn wir A, B, B' durch ihre Werthe ersetzen,

$$\cos 2\pi\frac{\varphi-\varphi'}{\lambda}$$

$$=\frac{4n^2\cos^2 i(n^2\sin^2 i-1)+(1+n^2-2n^2\sin^2 i)[1+n^2-(n^4+1)\sin^2 i]}{\sqrt{[4n^2\cos^2 i(n^2\sin^2 i-1)+(1+n^2-2n^2\sin^2 i)^2]\{4n^2\cos^2 i(n^2\sin^2 i-1)+[1+n^2-(n^4+1)\sin^2 i]^2\}}}.$$

Sind alle Reductionen vorgenommen, so hat man

$$\cos 2\pi\frac{\varphi-\varphi'}{\lambda}=\frac{1-(1+n^2)\sin^2 i+2n^2\sin^4 i}{(1+n^2)\sin^2 i-1}.$$

Um also den reflectirten Strahl zu erhalten, hat man zwei, parallel und normal zur Einfallsebene polarisirte Strahlen zusammenzusetzen, deren Intensitäten gleich $\sin^2\alpha$ und $\cos^2\alpha$ sind, und deren Phasendifferenz durch die letzte Gleichung gegeben ist. Der reflectirte Strahl ist im

Allgemeinen elliptisch polarisirt, doch geradlinig, wenn die Phasendifferenz Null ist.

Man hat in diesem letzteren Falle

$$\cos 2\pi \frac{\varphi - \varphi'}{\lambda} = 1$$

und

$$1 - (n^2 + 1) \sin^2 i + 2 n^2 \sin^4 i = (1 + n^2) \sin^2 i - 1,$$

also

$$n^2 \sin^4 i - (n^2 + 1) \sin^2 i + 1 = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\sin^2 i = \frac{1 + n^2}{2 n^2} \pm \sqrt{\frac{(1 + n^2)^2}{4 n^4} - \frac{1}{n^2}}$$

und

$$\sin^2 i = \frac{1 + n^2}{2 n^2} \pm \frac{n^2 - 1}{2 n^2}.$$

Die beiden Werthe von $\sin^2 i$ sind 1 und n^2, und folglich sind die beiden Werthe von $\sin i$ gleich 1 und n. Das total reflectirte Licht ist demnach geradlinig polarisirt, wenn der Einfallswinkel i gleich dem Grenzwinkel der totalen Reflexion, und wenn er gleich einem rechten Winkel ist.

Das total reflectirte Licht ist also nur an den beiden Grenzen der totalen Reflexion linear polarisirt, und daselbst die Phasendifferenz $2\pi \frac{\varphi - \varphi'}{\lambda}$ gleich Null. Von einer Grenze zur anderen wächst die Phasendifferenz, um dann wieder abzunehmen: sie geht durch ein Maximum, und dieses entspricht einem Minimum von $\cos 2\pi \frac{\varphi - \varphi'}{\lambda}$. Setzt man den Differentialquotienten dieser letzteren Grösse gleich Null, so erhält man

$$(n^2 + 1) \sin^2 i - 2 = 0$$

und

$$\sin^2 i = \frac{2}{n^2 + 1}.$$

Für diese Incidenz hat man

$$\cos 2\pi \frac{\varphi - \varphi'}{\lambda} = \frac{1 - \frac{2(n^2 + 1)}{(n^2 + 1)} + 2 n^2 \frac{4}{(n^2 + 1)^2}}{(n^2 + 1) \frac{2}{(n^2 + 1)} - 1}.$$

oder

$$\cos 2\pi \frac{\varphi - \varphi'}{\lambda} = \frac{-(n^2 + 1)^2 + 8 n^2}{(n^2 + 1)^2}.$$

Für Glas ist $n = \frac{3}{2}$. Das Maximum der Phasendifferenz tritt also

für Glas ein, wenn $sin^2 i = \frac{8}{13}$, oder nahezu $i = 45^0$. Das Maximum der Phasendifferenz ist wenig grösser als $\frac{\pi}{4}$, und der Gangunterschied wenig grösser als $\frac{\lambda}{8}$.

Ist $2\pi \frac{\varphi - \varphi'}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$ oder $cos\, 2\pi \frac{\varphi - \varphi'}{\lambda} = 0$, so liegen die Achsen der Vibrationsellipse bezüglich parallel oder normal zur Einfallsebene. Um die entsprechende Incidenz zu berechnen, hat man

$$2n^2 sin^4 i - (1 + n^2) sin^2 i + 1 = 0$$

und

$$sin^2 i = \frac{(1 + n^2) \pm \sqrt{(1 + n^2)^2 - 8n^2}}{4n^2}.$$

Ist unter dieser Incidenz überdies der Winkel α der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes mit der Einfallsebene gleich 45 Grad, so ist das total reflectirte Licht circular polarisirt. Dieses Resultat eignet sich zur experimentellen Verification.

Es ist klar, dass bei Glas die circulare Polarisation nicht eintreten kann, indem die Phasendifferenz im Maximum den Werth $\frac{\pi}{4}$ kaum überschreitet.

Andererseits ergiebt die Formel für i, dass die Circularpolarisation erst dann eintreten kann, wenn

$$(1 + n^2)^2 - 8n^2 > 0$$

oder

$$n^4 - 6n^2 + 1 > 0,$$

woraus man erhält

$$n^2 > 3 + \sqrt{8},$$

da $n^2 < 3 - \sqrt{8}$, entsprechend der kleineren Wurzel der Gleichung, unmöglich ist. Unter allen farblosen, einfachbrechenden Substanzen erfüllt keine diese Bedingung mit Ausnahme des Diamanten, welcher aus anderen Gründen hier nicht zulässig ist.

Mittelst einer einzigen Reflexion kann also die experimentelle Verification nicht vorgenommen werden; allein nichts hindert, mehrere Reflexionen eintreten zu lassen. Da die Phasendifferenz der reflectirten Strahlen nur vom Incidenzwinkel abhängt, so kann man diesen Winkel so wählen, dass diese Phasendifferenz gleich $\frac{\pi}{4}$ wird; lässt man sodann eine zweite Reflexion unter demselben Incidenzwinkel und in demselben Mittel eintreten, so ist die Phasendifferenz nach der zweiten Reflexion gleich $\frac{\pi}{2}$; nimmt man überdies $\alpha = 45^0$, so ist der zweimal reflectirte Strahl circular polarisirt. Man könnte gleicherweise auch eine Phasen-

differenz gleich $\frac{\pi}{6}$ hervorbringen und drei Reflexionen eintreten lassen, oder eine Phasendifferenz $\frac{\pi}{8}$ und vier Reflexionen, u. s. w.

Damit die Phasendifferenz gleich $\frac{\pi}{4}$ werde, muss

$$\cos 2\pi \frac{\varphi - \varphi'}{\lambda} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

sein, oder

$$2 - 2(1 + n^2)\sin^2 i + 4n^2 \sin^4 i = \sqrt{2}(1 + n^2)\sin^2 i - \sqrt{2},$$

oder nach vorgenommener Vereinfachung

$$4n^2 \sin^4 i - \left(2 + \sqrt{2}\right)(1 + n^2)\sin^2 i + 2 + \sqrt{2} = 0.$$

Man erhält hieraus

$$\sin^2 i = \frac{\left(2 + \sqrt{2}\right)(1 + n^2) \pm \sqrt{\left(2 + \sqrt{2}\right)^2 (1 + n^2)^2 - 16 n^2 \left(2 + \sqrt{2}\right)}}{8 n^2}$$

oder

$$\sin^2 i = \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1 + n^2) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (1 + n^2)^2 - 8 n^2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{8 n^2}.$$

Dieser Ausdruck ist reell für Glas und ähnliche Substanzen, deren Brechungsexponent zwischen 1·4 und 1·6 variirt.

Für eine Phasendifferenz gleich $\frac{\pi}{6}$ hat man

$$\cos 2\pi \frac{\varphi = \varphi'}{\lambda} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und erhält hieraus

$$\sin^2 i = \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + n^2) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 (1 + n^2)^2 - 8 n^2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}{4 n^2}.$$

Ist die Phasendifferenz gleich $\frac{\pi}{8}$, so hat man

$$\cos 2\pi \frac{\varphi - \varphi'}{\lambda} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

u. s. w.

Es ergiebt sich so eine einfache Art der experimentellen Verification.

Schliesslich ist ersichtlich, dass man für den Incidenzwinkel stets zwei Werthe erhält, da jeder Phasendifferenz diesseits des Maximums eine gleiche Phasendifferenz jenseits desselben entspricht.

470. Eintheilung der experimentellen Verification der Fresnel'schen Reflexionstheorie.

Wir haben bis jetzt von der Theorie der Reflexion und Brechung des polarisirten und natürlichen Lichtes gehandelt ohne auf die experimentellen Verificationen der Resultate dieser Theorie einzugehen; und wollen nun von den verschiedenen Methoden sprechen, nach welchen die Genauigkeit der Resultate der Theorie Fresnel's geprüft werden kann.

Wir unterscheiden drei Kategorien dieser experimentellen Verification. Die erste bezieht sich auf den Polarisationszustand des reflectirten oder gebrochenen Lichtes, also auf die Veränderung der Lage der Polarisationsebene, die vollständige oder partielle Polarisation des natürlichen Lichtes, die Verwandlung des geradlinig polarisirten Lichtes in circular oder elliptisch polarisirtes Licht und umgekehrt. Die zweite Kategorie enthält die photometrischen Messungen zur Bestimmung der Intensität des unter verschiedenen Bedingungen reflectirten oder gebrochenen Lichtes sowie die ergänzenden calorimetrischen Messungen. Die dritte Kategorie endlich umfasst die polarimetrischen Experimente, durch welche der Grad der Polarisation gemessen wird, welche dem natürlichen Lichte durch die Reflexion ertheilt wird.

471. Das Gesetz von Malus, Winkel der totalen Polarisation.

An erster Stelle muss das Gesetz von Malus[1]) genannt werden. Dieses besagt: tritt ein Strahl aus einem Mittel M in ein Mittel N und tritt derselbe umgekehrt aus dem Mittel N in das Mittel M, so besteht zwischen den beiden Winkeln der totalen Polarisation die Gleichung

$$\frac{\sin A}{\sin B} = n.$$

Obgleich dieses Gesetz vor der Aufstellung der Fresnel'schen Theorie entdeckt ist, kann es doch zur Verification dieser Theorie herangezogen werden. Nach der Fresnel'schen Theorie tritt totale Polarisation ein, wenn

$$\cot (A + R) = 0,$$

wo A der Einfallswinkel und R der zugehörige Brechungswinkel sind, und man hat überdies

$$\frac{\sin A}{\sin R} = n.$$

---

[1]) *Mém. de la Soc. d'Arcueil,* II, 143. — *Mém. de la prem. classe de l'Inst.,* XI.

Tritt hingegen der Strahl aus dem zweiten Mittel in das erste, so hat man

$$cot(B + R') = 0 \quad \frac{\sin R'}{\sin B} = n.$$

Es folgt hieraus

$$A = R', \quad R = B$$

und

$$\frac{\sin A}{\sin B} = n.$$

472. Das Gesetz von Brewster. Winkel der totalen Polarisation und Brechungsexponent.

In chronologischer Beziehung an zweiter Stelle steht das von Brewster im Jahre 1815 entdeckte Gesetz [1]), welches den Namen seines Entdeckers trägt. Dieses Gesetz besagt, dass die Tangente des Winkels der totalen Polarisation dem Brechungsexponenten gleich ist.

Es folgt dieses Gesetz unmittelbar aus den beiden Gleichungen

$$cot(A + R) = 0$$

und

$$\sin A = n \sin R,$$

aus welchen man erhält:

$$A + R = \frac{\pi}{2}$$

und

$$tang\, A = n.$$

Die Gleichung $A + R = \frac{\pi}{2}$ besagt, dass bei der totalen Polarisation der reflectirte und der gebrochene Strahl auf einander senkrecht stehen.

Brewster hat selbst zur Verification seines Gesetzes Messungen an 18 Substanzen angestellt und Abweichungen bis zu 32 Minuten erhalten. Wenn dieses Resultat wenig befriedigend ist, so kann man andererseits die Messungen Brewster's nicht für exact gelten lassen. Betrachtet man nämlich die Liste der Substanzen, mit welchen Brewster arbeitete, so erkennt man leicht, dass die Abweichungen der Resultate keinen Schluss gegen die Exactheit des Gesetzes erlauben. Eine der Substanzen war Luft. Brewster nahm den Polarisationswinkel zu 45^0 an; er gelangte zu dieser Zahl durch Betrachtung der Polarisation des Himmelslichtes. Allein diese Methode ist sehr ungenau. Unter den übrigen Substanzen sind vier nur unvollkommen durchsichtig und acht doppeltbrechend. Diamant, von welchem später ausführlicher die Rede

[1]) *Phil. Trans.*, 1815, p. 125.

sein wird, nimmt eine Ausnahmestellung ein und hat, wie auch Brewster fand, keinen Winkel wirklich totaler Polarisation. In Bezug auf zwei weitere Substanzen betrachtet Brewster selbst die Messungen als ungenau.

Brewster hat auch constatirt, dass es nicht immer möglich ist, an der Trennungsfläche zweier Mittel eine totale Polarisation zu erhalten, z. B. bei der Brechung aus Wasser in Glas. In der That ist der grösste Brechungswinkel beim Eintritte des Strahles in das Wasser gegeben durch

$$\sin r = \frac{1}{n}.$$

Ist n' der Brechungsexponent von Glas in Bezug auf Wasser, so hat man für den Polarisationswinkel bei der Reflexion am Glase

$$\tang A = n'.$$

Ist $r < A$, so kann man nicht zur totalen Polarisation gelangen. Man hat also für die Unmöglichkeit der totalen Polarisation die Bedingung

$$\frac{1}{n} < \frac{n'}{\sqrt{1 + n'^2}}$$

oder

$$n^2 > 1 + \frac{1}{n'^2},$$

und man überzeugt sich leicht, dass diese Bedingung für Wasser und Glas erfüllt ist.

Brewster's Apparat bestand aus einem horizontalen getheilten Kreise, in dessen Mitte die reflectirende Platte vertical angebracht war. Ein Strahlenbündel trat durch eine Röhre, wurde an der Platte reflectirt und ging durch ein doppeltbrechendes Prisma, welches von einer um das Centrum des Kreises drehbaren Alhidade getragen wurde. Die Ablesung wurde gemacht, wenn das ausserordentliche Bild ein Minimum der Helligkeit zeigte; hierbei mussten sowohl die Röhre wie die Alhidade bewegt werden. Bei dem Apparate Brewster's verschwindet das Bild nie vollständig und man muss sich bei der Bestimmung des dem Minimum der Helligkeit entsprechenden Winkels von einer Einstellung zur anderen auf das Gedächtniss verlassen; letzteres ist der bedeutendste Fehler des Apparates. Bei Anwendung von Flüssigkeiten wurde der Kreis vertical gestellt.

473. Die Experimente August Seebeck's. Polarisationswinkel.

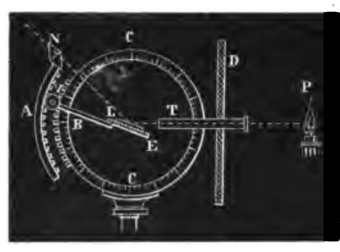
Im Jahre 1830 nahm Seebeck[1]) die Experimente Brewster's wieder auf; bei einer geeigneteren Auswahl der Substanzen und Ver-

[1]) Pogg. Ann. XX, 27.

wendung eines besseren Apparates gelangte er zu sehr befriedigenden Resultaten.

Der Apparat Seebeck's hat die folgende Einrichtung. Ein verticaler Theilkreis *C* (Fig. 69) trägt die horizontale Röhre *T* mit dem Diaphragma *D*. Vor dem Diaphragma befindet sich die Lampe *P*. Um die Achse des Theilkreises dreht sich das Tischchen *E* und mit diesem die reflectirende Platte *L*. An der der Lichtquelle entgegengesetzten Seite des Theilkreises befindet sich der Nicol *N*, durch welchen der reflectirte Strahl gehen soll. Die Bewegung der reflectirenden Platte und des Prismas sind so von einander abhängig gemacht, dass das letztere sich um den doppelten Winkel dreht.

Fig. 69.



Zu diesem Zwecke sind der Nicol mit dem gezahnten Bogen *A* und das Tischchen mit der Alhidade *B* fest verbunden, während die Bewegungen des Bogens *A* und der Alhidade *B* mittelst des Zahnrades *V* von einander abhängig gemacht sind. Die Zähne des Theilkreises *C* und jene des Bogens *A* entsprechen gleichen Centriwinkeln. Richtet man also den Apparat so ein, dass bei einer bestimmten Lage der Platte *L* der reflectirte Strahl durch den Nicol geht, so geht der Strahl auch bei jeder anderen Lage der Platte durch denselben.

Im Uebrigen verfuhr Seebeck wie Brewster. Bei Beobachtung aller Vorsichten ergaben sich Resultate, welche von den theoretischen um nicht mehr als 3 bis 4 Minuten abwichen.

Die Brechungsexponenten der Platten wurden an diesen selbst bestimmt, und zwar mittelst derselben Lampe, welche auch bei den Messungen der Polarisationswinkel diente.

Seebeck arbeitete mit einfachbrechenden, verschieden gefärbten Substanzen. Mehrere Platten ergaben Abweichungen bis zu einem halben Grade. Diese Abweichungen erschienen zu bedeutend, und Seebeck schrieb dieselben den Oberflächenveränderungen zu, welche frisch polirte Platten schon nach kurzer Zeit zeigen. Er wiederholte daher die Versuche, indem er die Platten unmittelbar vor den Messungen selbst polirte; hierdurch reducirten sich die Abweichungen auf wenige Minuten und blieben innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler.

Die erhaltenen Resultate sind:

Substanz	Polarisationswinkel beobachtet	Polarisationswinkel berechnet	Differenz
Flussspath ungefärbt	55° 6'7	55° 6'7	0° 0'0
„ blau	55° 3'8	55° 7'	— 0° 3'2
Opal	55° 29'3	55° 26'3	+ 0° 3'0
Glas *A*	56° 36'	56° 32'2	+ 0° 3'8
„ *B*	56° 45'5	56° 46'4	— 0° 0'9
„ *C*	56° 50'2	56° 52'	— 0° 1'8
„ *D*	57° 12'6	57° 12'6	0° 0'0
„ *E*	57° 41'	57° 38'5	+ 0° 2'5
„ *F*	58° 16'6	58° 19'4	— 0° 2'8
Pyrop	61° 4'	61° 7'7	— 0° 3'7
Blende	67° 8'2	67° 7'	+ 0° 1'2

474. Drehung der Polarisationsebene. Fresnel's und Brewster's Experimente.

Wenn das einfallende Licht nicht wie bei den vorhergehenden Experimenten natürliches, sondern geradlinig polarisirtes Licht ist, sind das reflectirte und das gebrochene Licht ebenfalls geradlinig polarisirt; allein die Polarisationsebene des reflectirten oder gebrochenen Lichtes hat gegen die Einfallsebene nicht die ursprüngliche Lage. Es ist leicht, die theoretischen Resultate experimentell zu prüfen. Man benutzt zu diesem Zwecke einen verticalen Theilkreis, in dessen Centrum die zur Verwendung kommende Platte horizontal angebracht ist. Zwei um das Centrum drehbare Alhidaden tragen je einen Nicol. Einer derselben dient zur Polarisation des einfallenden Lichtes, man bringt seinen Hauptschnitt in eine bestimmte Lage gegen die Einfallsebene. Die zweite Alhidade wird in solche Stellung gebracht, dass der reflectirte Strahl durch den zweiten Nicol geht, und man stellt denselben auf Auslöschung. Man entfernt hierauf die reflectirende Platte, dreht die zweite Alhidade in die Verlängerung des einfallenden Strahles, stellt den zweiten Nicol wieder auf Auslöschung, und misst den Winkel, um welchen hierbei der Nicol gedreht werden muss. Bei intensivem Lichte erhält man eine Annäherung von 4 oder 5 Minuten. Fresnel und Brewster, welche mit Wolkenlicht arbeiteten, hatten Fehler von 1 oder $1^1/_2$ Graden.

Die Messung der Drehung der Polarisationsebene durch Brechung ist noch einfacher; man lässt den durch die planparallele Platte direct

durchgehenden Strahl durch den zweiten Nicol treten. Entsprechend den beiden hier stattfindenden Brechungen sollen nach Fresnel's Theorie die Tangenten der Winkel der ursprünglichen Polarisationsebene und der Polarisationsebene des zweimal gebrochenen Strahles mit der Einfallsebene im Verhältnisse 1 : $cos^2(i - r)$ stehen.

Fresnel hat zwei Reihen von Messungen an Glas und Wasser ausgeführt [1]) unter Variation des Winkels der ursprünglichen Polarisationsebene mit der Einfallsebene. Die Abweichungen gingen nicht über $1^1/_2$ Grade hinaus und blieben innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler.

Brewster hat analoge Messungen ausgeführt [2]). Er arbeitete mit verschiedenen Glasarten und variirte der Einfallswinkel, während der Winkel der Polarisationsebene des einfallenden Strahles mit der Einfallsebene stets gleich 45^0 war. Er experimentirte auch mit Diamant, und gelangte zu ziemlich gut stimmenden Resultaten, welche aber wenig bedeuten, da Fresnel's Theorie, wie wir später sehen werden, auf diesen Körper nicht anwendbar ist. Er machte ferner Messungen am Quarz; der Incidenzwinkel war gleich 70^0 und das Azimuth der Polarisationsebene variirte zwischen 0^0 und 70^0. Dieser Körper war, weil doppeltbrechend, ebenfalls nicht gut gewählt, da jedoch die beiden Brechungsexponenten des Quarzes wenig verschieden sind, so hat man hier eine angenäherte Verification der Fresnel'schen Gesetze.

475. Das Fresnel'sche Parallelepiped.

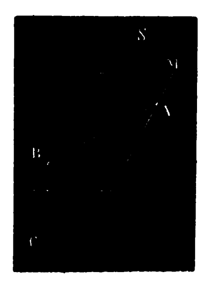
Brewster stellte auch Versuche über die Totalreflexion an; er bemerkte, dass durch diese das polarisirte Licht ganz oder theilweise depolarisirt werden könne, gab aber keine präcisen Resultate an. Fresnel [3]) versuchte, um seine theoretischen Resultate zu verificiren, das geradlinig polarisirte Licht mittelst mehrfacher Reflexion in circular polarisirtes Licht zu verwandeln; bei diesen Versuchen war das Azimuth der Polarisationsebene in Bezug auf die Einfallsebene gleich 45^0. Um die Construction der Apparate zu vereinfachen, verfuhr er stets mittelst einer geraden Zahl von Reflexionen.

Man denke sich ein gerades Parallelepiped mit parallelogrammförmiger Grundfläche. Ein Strahl SA, Fig. 70, tritt normal in das Parallelepiped ein, erfährt bei A und B totale Reflexionen und tritt längs BC wieder aus. Man kann jedoch den Versuch auch so einrichten, dass der Strahl nach 4, 6, 8 . . . Reflexionen austritt, welche sämmtlich unter derselben Incidenz stattfinden. Ist nun der Incidenzwinkel so gewählt,

[1]) *Ann. de chim. et de phys.* (2), XVII, 314. — [2]) *Phil. Trans.*, 1830, p. 69, 133, 145. — [3]) *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXIX, 175.

dass eine Phasendifferenz gleich $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{16} \cdots$ entsteht, so bringen 2, 4, 6, 8 . . . Reflexionen eine Phasendifferenz gleich $\frac{\pi}{2}$ hervor, und ist überdies das Azimuth der Polarisationsebene des einfallenden Strahles in Bezug auf die Einfallsebene gleich 45°, so ist das austretende Licht circular polarisirt.

Fig. 70.



Dies ist das Princip des Fresnel'schen Parallelepipeds. Hat man erst constatirt, dass der austretende Strahl circular polarisirt ist, so kann man sich weiter überzeugen, dass der Sinn dieser Polarisation sich umkehrt, wenn die Polarisationsebene auf die andere Seite der Einfallsebene gedreht wird.

Lässt man umgekehrt einen circular polarisirten Strahl eintreten, d. i. einen Strahl, dessen Composanten parallel und senkrecht zur Einfallsebene gleich intensiv sind und eine Phasendifferenz gleich $\frac{\pi}{2}$ haben, so ist die Phasendifferenz der Composanten des austretenden Strahles gleich π; der austretende Strahl ist geradlinig polarisirt, und seine Polarisationsebene bildet mit der Einfallsebene zur Rechten oder zur Linken einen Winkel gleich 45°, je nach dem Sinne der Polarisation des einfallenden Strahles.

Das Parallelepiped kann auch geradlinig polarisirtes Licht, dessen Polarisationsebene mit der Einfallsebene einen Winkel gleich 45° bildet, in elliptisch polarisirtes Licht verwandeln, dessen Achsen in der Einfallsebene und senkrecht zu derselben liegen, und umgekehrt.

Man sieht, dass das Fresnel'sche Parallelepiped alle Eigenschaften eines $\frac{\lambda}{4}$-Blättchens zeigt, vor welchem es bei Verwendung weissen Lichtes den Vortheil hat, dass der Gangunterschied weniger von der Farbe abhängt. Bei Verwendung homogenen Lichtes ist hingegen das $\frac{\lambda}{4}$-Blättchen vorzuziehen. Ueberdies ist das Parallelepiped unbequem im Gebrauche.

476. Benützung der Wärmestrahlen.

Die Wärmestrahlen befolgen dieselben Gesetze wie die Lichtstrahlen. Interferenz, Doppelbrechung und Polarisation tritt unter denselben Umständen ein wie beim Lichte. Die Verification der Theorie Fresnel's kann also auch auf die Wärmestrahlen ausgedehnt werden.

Bérard hat zuerst im Jahre 1821[1]) gezeigt, dass die Wärmestrahlen wie die Lichtstrahlen durch Reflexion polarisirt werden können.

[1]) *Mém. d'Arcueil,* III, 5.

Die Wärmestrahlen wurden von einem Glasspiegel zurückgeworfen und der Polarisationszustand der reflectirten Strahlen mittelst einer zweiten Reflexion untersucht; ein kleiner metallener Hohlspiegel concentrirte die Strahlen nach der zweiten Reflexion auf die Kugel eines sehr empfindlichen Thermometers. Bérard fand, dass der Winkel der totalen Reflexion für die Wärmestrahlen derselbe war wie für die Lichtstrahlen. Später stellte Knoblauch[1]) die Versuche mittelst des Melloni'schen Thermomultiplicators genauer an und fand, dass der Polarisationswinkel für die Lichtstrahlen und Wärmestrahlen etwas verschieden ist, entsprechend der grösseren Brechbarkeit der dunklen Strahlen.

477. Photometrische und calorimetrische Messungen.

Wir kommen nun zu jenen Verificationen der Fresnel'schen Gesetze, welche auf Intensitätsmessungen des reflectirten und gebrochenen Lichtes beruhen. Wir bemerken zunächst mit Neumann, dass diese Verification eigentlich nicht unumgänglich nöthig ist, indem dieselbe schon in jener Verification enthalten ist, welche sich auf die Gesetze der Deviation der Polarisationsebene bezieht.

In der That, bezeichnet man mit R^2 und R'^2 die Intensitäten des reflectirten und des gebrochenen Strahles in dem Falle, wo das Licht in der Einfallsebene polarisirt ist, so hat man nach dem Principe der lebendigen Kräfte, welches als a priori richtig angesehen werden kann,

$$1 = R^2 + R'^2$$

und in dem Falle, wo das Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist,

$$1 = R_1^2 + R_1'^2.$$

Sieht man andererseits die Gesetze der Deviation der Polarisationsebene als verificirt an, so hat man

$$\frac{R_1}{R} = -\frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)}$$

und

$$\frac{R'_1}{R'} = \frac{1}{\cos(i+r)}.$$

Aus diesen vier Gleichungen lassen sich R^2, R'^2, R_1^2, $R_1'^2$ berechnen.

478. Die Experimente Bouguer's.

Es ist nicht ohne Interesse, bis zu den Experimenten Bouguer's über die Intensität des reflectirten Lichtes zurückzugehen, da dieselben ebenso exact als einfach sind.

---

[1]) Pogg. Ann. LXXIV, 161, 170, 177.

Bouguer liess möglichst gleichmässiges Himmelslicht durch zwei rechteckige Oeffnungen des Fensterladens in ein verfinstertes Zimmer treten und auf einen Papierschirm so fallen, dass die beiden Hälften des Schirmes von je einer der Oeffnungen beleuchtet wurden, was mittelst einer Scheidewand erreicht wurde. Das Licht der einen Oeffnung gelangte jedoch erst nach dem Schirme, nachdem es an der zu untersuchenden Substanz Reflexion erfahren hatte. Nun wurde die Oeffnung, durch welche das Licht direct ging, verkleinert, bis beide Hälften des Schirmes gleich hell erschienen. Das Verhältniss der Intensitäten des reflectirten und des direct gehenden Lichtes ist dann gleich dem Grössenverhältnisse der beiden Oeffnungen.

Bouguer hat in dieser Weise die Reflexion an Glas und Wasser bei verschiedenen Incidenzen studirt, die Resultate in Tafeln zusammengefasst und die empirische Formel

$$I = a + bz + cz^3$$

aufgestellt, in welcher z den Sinusversus des Incidenzwinkels bedeutet, I die Intensität des reflectirten Lichtes und a, b, c drei durch das Experiment zu bestimmende Constanten. Mittelst dieser Formel und der Resultate der Messungen gelangt man beispielsweise für Wasser, dessen Index gleich $\frac{4}{3}$ angenommen ist, zu den folgenden Zahlen:

Incidenz	Messungen Bouguer's	Theorie Fresnel's
0°	0·018	0·020
10°	0·018	—
20°	0·018	—
30°	0·019	0·021
40°	0·022	—
50°	0·034	—
60°	0·065	0·060
70°	0·145	0·133
75°	0·211	0·212
80°	0·333	0·348
85°	0.501	0·583
87°	0·639	0·722
89°	0·721	0·793

Da das Auge nur Helligkeitsunterschiede bis ungefähr $\frac{1}{60}$ wahrnimmt, so ist die Uebereinstimmung bis zu einer Incidenz von 80 Graden eine hinreichende. Von da ab werden die Differenzen grösser; da aber von da ab die Intensität sehr rasch variirt, so dass den Differenzen zwischen Beobachtung und Theorie Differenzen der Incidenz entsprechen, welche einen halben Grad nicht erreichen, so kann die Verification durchaus als eine hinreichende angesehen werden.

Die Betrachtung der vorstehenden Tafel lehrt ferner, dass die Intensität des vom Wasser reflectirten Lichtes bis zu einer Incidenz von 30⁰ nahe constant ist, dass sie dann bis 80⁰ langsam und später rasch wächst.

In Bezug auf Glas hat Bouguer mehrere Reihen von Messungen angestellt, welche unter einander schlecht stimmen, offenbar in Folge der von Seebeck angegebenen Fehlerquelle (473); man kann also auch keine gute Uebereinstimmung der Zahlen Bouguer's mit der Theorie erwarten. Ueberdies ist der Brechungsexponent des von Bouguer verwendeten Glases unbekannt. Da indessen die Indices der alten Gläser sich nicht weit von 1·5 entfernten, konnten die Resultate der Theorie auf Grund dieser Zahl gerechnet und in der folgenden Tabelle mit den experimentellen Werthen zusammengestellt werden.

Incidenz	Messungen Bouguer's	Theorie Fresnel's
6⁰	0·025	0·040
10⁰	0·025	—
20⁰	0·025	—
30⁰	0·029	0·041
40⁰	0·034	—
50⁰	0.057	—
60⁰	0·112	0·089
70⁰	0·222	0·171
75⁰	0·299	0·253
80⁰	0·412	0·387
85⁰	0·543	0·606
87⁰ 30′	0·584	0·779

Die älteren Messungen widersprechen also der Theorie Fresnel's nicht, und stimmen mit derselben gut überein, wo sie genau ausgeführt sind.

479. Die Experimente Arago's.

Wir wollen nun Experimente besprechen, welche Arago mittelst eines von ihm erfundenen Instrumentes anstellte oder anstellen liess. Das Instrument ist ohne Zweifel scharfsinnig erfunden, doch ist es complicirt und nicht so verlässlich, als der Erfinder glaubte [1]).

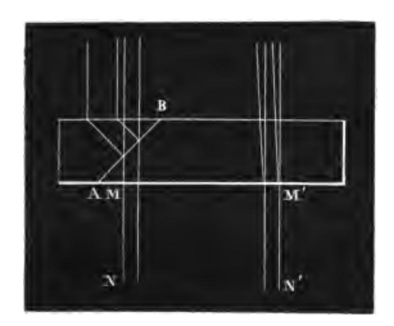
Arago's Verfahren beruht auf dem Satze, nach welchem das natürliche Licht, wenn es senkrecht durch eine doppeltbrechende Krystallplatte tritt, zwei gleich helle Bilder giebt. Bei der Aufgabe, welche sich Arago gestellt hatte, war es unerlässlich, die Richtigkeit dieses Satzes vollständig ausser Zweifel zu setzen. Zu diesem Zwecke verfuhr

[1]) *OEuvres complètes,* X, 150, 185, 217, 468.

Arago folgendermaassen. Er liess natürliches Licht senkrecht durch eine parallel der Achse geschnittene Krystallplatte treten. Die beiden austretenden Lichtbündel hatten einen grossen gegenseitigen Gangunterschied und deckten sich theilweise. Der den beiden Lichtbündeln gemeinsame Theil des austretenden Lichtes zeigte nun alle Eigenschaften des natürlichen Lichtes, und es folgt hieraus, dass die beiden Bündel gleich intensiv waren; denn zwei rechtwinkelig polarisirte Lichtstrahlen von gleicher Intensität und grossem Gangunterschiede verhalten sich wie natürliches Licht, der geringste Intensitätsunterschied der beiden Bündel hätte im Polariskope Farbenentwickelung zur Folge haben müssen, was nicht der Fall war. Auch im Inneren des Krystalles mussten die beiden Bündel gleich intensiv sein, da die Reflexion an der Austrittsfläche für beide Strahlen gleich ist. Jedes der beiden im Krystalle fortschreitenden Strahlenbündel hat demnach die Hälfte der Intensität des eindringenden Lichtes.

Gestützt auf dieses Princip construirte Arago einen kleinen Apparat, welcher zwei Strahlenbündel im Intentitätsverhältnisse 1 : 2 giebt. Der Apparat ist nichts Anderes als ein Rochon'sches Prisma, bestehend aus zwei Quarzprismen, deren Achsen auf einander senkrecht stehen. *AB* (Fig. 71) ist die Trennungsfläche der Prismen. Ein hinreichend dünnes Lichtbündel *MN*, welches an die Fläche *AB* gelangt, erfährt daselbst eine starke Doppelbrechung und giebt, wenn die Platte hinreichand dick ist, beim Austritte zwei vollständig getrennte, gleich intensive Bündel. Ein anderes Bündel, *M'N'*, welches nur durch eines der Prismen geht, giebt zwei weit weniger getrennte austretende Bündel, und die gemeinsame Partie derselben hat eine doppelt so grosse Intensität, wie jedes der beiden von *MN* herstammenden Bündel, sobald nur *MN* und *M'N'* gleich intensiv sind. Der Canadabalsam, welcher die beiden Prismen verbindet, bleibt ausser Betracht, da er denselben Brechungsindex wie der Quarz hat. Der eben beschriebene Apparat dient, wie weiter gezeigt werden soll, zur Messung der Intensität des reflectirten Lichtes.

Fig. 71.



Die Glasplatte *L*, mit welcher Arago arbeitete, war an einem horizontalen Theilkreise *C*, Fig. 72 (a. f. S.) so befestigt, dass die reflectirende Fläche vertical stand und durch das Centrum des Theilkreises ging. Eine um dieses Centrum bewegliche Alhidade trug eine Röhre *T* mit Diaphragma. Das Licht kam von einem gleichmässig hellen, verticalen Papierblatte *AB*, wurde von der Platte *L* reflectirt und gelangte durch die Röhre *T* in das Auge. Das Papierblatt war durch einen

opaken Schirm D in zwei Hälften getheilt. Zwischen dem Papierblatte und der reflectirenden Platte, symmetrisch zu letzterer, befanden sich zwei schwarze Stäbe kl und $k'l'$, so dass das durch die Röhre T blickende Auge kl durch Reflexion und $k'l'$ durch Brechung als zwei schwarze, sich vom hellen Grunde abhebende Linien wahrnahm.

Fig. 72.



Bei einem ersten Experimente wurde die Alhidade in solche Stellung gebracht, dass die Bilder der beiden Stäbe gleich hell erschienen. Hierbei ist zu bemerken, dass die Stäbe in etwas verschiedener Höhe angebracht waren, so dass die Bilder nahe über einander wahrgenommen wurden.

Im Allgemeinen nimmt man Helligkeitsunterschiede bis $\frac{1}{60}$ oder $\frac{1}{120}$ wahr; da die Einrichtung des Apparates der Wahrnehmung geringer Helligkeitsunterschiede günstig war, konnten die Messungen hinreichend genau sein. Um dieselben noch genauer zu machen, wurden sie unter Benutzung der anderen Seite der Glasplatte wiederholt. Man verminderte so die Fehler, welche sich aus der Mangelhaftigkeit der Aufstellung der Platte ergeben, aus der Ungleichheit der Helligkeiten der beiden Papierhälften und aus der Ungleichheit des Reflexionsvermögens der beiden Flächen der Platte.

Arago fand, dass die beiden Bilder gleich hell waren, als der Einfallswinkel $78^0 52'$ betrug. Man muss hieraus schliessen, dass bei dieser Incidenz das reflectirte und das gebrochene Licht gleich intensiv waren.

Es wurde hierauf die Incidenz bestimmt, bei welcher der reflectirte Strahl die doppelte Intensität des gebrochenen hatte. Dies geschah mittelst jenes Prismas, welches oben beschrieben worden ist. Dasselbe wurde so an der Alhidade angebracht, dass das reflectirte Bündel die im Inneren des Prismas befindliche Trennungsfläche traf, hingegen das gebrochene Strahlenbündel nicht. Man hatte so zwei reflectirte und ein durchgelassenes Bild, und suchte die Lage, für welche die Bilder gleich hell erschienen. Da aber die beiden Bilder des Quarzprismas nur dann gleich hell sind, wenn das einfallende Licht natürlich, nicht aber, wenn es polarisirt ist, und da in dem gegebenen Falle sowohl das reflectirte als das gebrochene Licht partiell polarisirt sind, so ergiebt sich die Nothwendigkeit, das Licht vor seinem Eintritte in die Platte G unter gleicher Intensitätsverminderung zu depolarisiren. Zu diesem Zwecke benutzt man eine Bergkrystallplatte, welche so zwischen dem Prisma und der reflectirenden Platte angebracht wird, dass die Achse der Krystall-

platte mit der Einfallsebene einen Winkel von 45 Graden bildet; hierdurch wird das Licht in natürliches verwandelt. Man kann so den Incidenzwinkel genau messen, bei welchem das reflectirte Licht doppelt so intensiv ist wie das gebrochene.

Man kann, in Verfolgung dieser Methode, das einmal durch ein Arago'sches Quarzprisma gegangene Licht depolarisiren und durch ein zweites solches Prisma treten lassen, wo dann jedes der beiden, dem reflectirten Lichte entsprechenden Bündel neuerdings in zwei Bündel zerlegt wird: man erhält so fünf Bilder, von welchen vier dem reflectirten entsprechen und ein einziges dem durchgelassenen. Bringt man die Alhidade in solche Lage, dass alle fünf Bilder gleich hell erscheinen, so hat man die Incidenz, für welche das reflectirte Licht viermal so hell ist wie das gebrochene.

Die folgende Tabelle enthält die vorzüglichsten Resultate dieser ersten Reihe von Messungen. Als Einheit der Intensität ist die Summe der Intensitäten des reflectirten und des gebrochenen, also die Intensität des einfallenden Strahles angenommen.

Incidenzwinkel	Intensiät des reflectirten Lichtes
$85^0\,28'$	$0{\cdot}8000 = \frac{4}{5}$
$82^0\,59'$	$0{\cdot}6667 = \frac{2}{3}$
$78^0\,52'$	$0{\cdot}5000 = \frac{1}{2}$
$72^0\,43'$	$0{\cdot}3333 = \frac{1}{3}$
$68^0\,41'$	$0{\cdot}2500 = \frac{1}{4}$
$63^0\,22'$	$0{\cdot}2000 = \frac{1}{5}$

Die letzteren dieser Resultate, wo die Intensität kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, wurden mittelst eines dem oben beschriebenen entgegengesetzten Verfahrens erhalten, indem man nicht das reflectirte, sondern das gebrochene Bündel durch jenen Theil des Quarzprismas treten liess, welcher zwei getrennte Bündel giebt.

Man kann diese erste Reihe von Messungen Arago's als directe Messungen bezeichnen. Das Verfahren, welches bei denselben angewendet wurde, lässt sich nicht ausdehnen auf kleinere Incidenzwinkel. Deshalb verfuhr Arago auch noch nach einem anderen, weniger directen Verfahren und stellte nach demselben eine zweite Reihe von Messungen an.

Es handelte sich darum, Intensitätsmessungen des reflectirten Lichtes bei Incidenzwinkeln zwischen 0⁰ und 60⁰ anzustellen. Zu diesem Zwecke wurde ausser der Platte L noch eine zweite, mit jener identische Platte verwendet. Letztere wurde zwischen $l'k'$ und L so in den Gang der Strahlen gebracht, dass die von PB kommenden Strahlen durch dieselbe unter jener Incidenz traten, für welche gemessen werden sollte. Die Platte L und die Alhidade wurden sodann in solche Lage gebracht, dass ohne Anwendung eines Prismas die dem reflectirten und dem gebrochenen Lichte entsprechenden Bilder gleich hell erschienen. Die Zahlen der obigen Reihe von Messungen geben mittelst Interpolation das Intensitätsverhältniss des reflectirten und gebrochenen Lichtes, welches dem Abhandensein der zweiten Platte entspricht. Hieraus berechnet sich die Menge des an der zweiten Platte reflectirten Lichtes. Schliesslich kann man sich auch bei dieser Methode der Messung eines oder mehrerer Quarzprismen bedienen.

Die folgende Tabelle enthält die Resultate dieser zweiten Reihe von Messungen:

Incidenzwinkel	Intensität des reflectirten Lichtes
$53^0\,24'$	0·1595
$43^0\,38'$	0·1423
$33^0\,43'$	0·1280
$19^0\,34'$	0·1028
$0^0\,34'$	0·0810

480. Discussion der Experimente Arago's.

Die Vergleichung der Zahlen Arago's mit der Theorie ist weniger einfach, als jene der Zahlen Bouguer's. Würde die zweite Fläche der reflectirenden Platte Arago's geschwärzt gewesen sein, so hätte man es nur mit einer einzigen Reflexion zu thun und es käme einfach die Formel

$$I = \frac{1}{2}\frac{sin^2(i-r)}{sin^2(i+r)} + \frac{1}{2}\frac{tang^2(i-r)}{tang^2(i+r)}$$

zur Anwendung. Allein bei Arago's Experimenten muss man, um die Intensität des reflectirten Lichtes zu erhalten, nicht allein die an der ersten Fläche reflectirten Strahlen in Rechnung ziehen, sondern auch jene Strahlen, welche 1, 3, 5 ... innere Reflexionen erfahren haben.

Die Intensitäten der letzteren Strahlen bilden eine rasch convergirende Reihe, und da die Gangunterschiede sehr gross sind, erhält man die Gesammtintensität des reflectirten Lichtes einfach durch Summation ohne Rücksicht auf Interferenz.

Nehmen wir an, das Licht sei in der Einfallsebene polarisirt, nehmen wir die Intensität des einfallenden Lichtes zur Einheit und bezeichnen wir mit u^2 die Intensität des an der ersten Fläche reflectirten Lichtes. Die Intensität des gebrochenen Strahles ist dann $1 - u^2$, jene des an der zweiten Fläche reflectirten Strahles ist $u^2 (1 - u^2)$, und schliesslich jene des austretenden Strahles $u^2 (1 - u^2)^2$. Dieser Strahl ist einmal reflectirt und zweimal gebrochen. Der nächste Strahl ist dreimal reflectirt und zweimal gebrochen, seine Intensität ist

$$u^6 (1 - u^2)^2.$$

Die Intensität des fünfmal reflectirten Strahles ist

$$u^{10} (1 - u^2)^2,$$

u. s. w.

Man hat also die Summe der Grössen u^2, $u^2 (1 - u^2)^2$, $u^6 (1 - u^2)^2$, $u^{10} (1 - u^2)^2, \ldots$ zu bilden. Vom zweiten Gliede an hat man eine geometrische Reihe, deren Summe gleich

$$\frac{u^2 (1 - u^2)^2}{1 - u^4} = \frac{u^2 (1 - u^2)}{1 + u^2}$$

ist, und demnach hat man für die Gesammtintensität des reflectirten Strahles

$$I = u^2 + \frac{u^2 (1 - u^2)}{1 + u^2} = \frac{2 u^2}{1 + u^2}.$$

Ist der einfallende Strahl senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, so findet man gleicherweise für die Gesammtintensität des reflectirten Lichtes

$$I' = \frac{2 u'^2}{1 + u'^2},$$

wenn u'^2 die Intensität des an der ersten Fläche reflectirten Lichtes ist.

Da das natürliche Licht angesehen werden kann als bestehend aus zwei incohärenten rechtwinkelig polarisirten Bündeln von gleicher Intensität, so hat man für die Gesammtintensität des reflectirten natürlichen Lichtes

$$R = \frac{1}{2} \frac{2 u^2}{1 + u^2} + \frac{1}{2} \frac{2 u'^2}{1 + u'^2} = \frac{u^2}{1 + u^2} + \frac{u'^2}{1 + u'^2}.$$

Was die Intensität des durchgelassenen Lichtes anlangt, so erhält man dieselbe, wenn man die Intensität des reflectirten Lichtes von der Einheit abzieht; es ergiebt sich:

$$T = \frac{1}{2} \frac{1 - u^2}{1 + u^2} + \frac{1}{2} \frac{1 - u'^2}{1 + u'^2}.$$

Da die Amplituden u und u' gegebene Functionen der Winkel i und r sind, können die Intensitäten R und T für die verschiedenen Incidenzen gerechnet werden.

Arago hat die Resultate seiner Messungen mit der Theorie nicht verglichen, ja er hat nicht einmal den Brechungsexponenten seines Glases angegeben, welcher zur Durchführung der experimentellen Verification nöthig ist. Man kann jedoch diesen Brechungsexponenten aus einem der Messungsresultalte Arago's und aus den Gleichungen

$$sin\ i = n\ sin\ r$$

$$R = \frac{u^2}{1 + u^2} + \frac{u'^2}{1 + u'^2}$$

berechnen.

In der letzteren Gleichung bedeutet R die experimentell bestimmte Intensität des unter der Incidenz i reflectirten Lichtes und u^2, u'^2 sind bezüglich gleich $\frac{sin^2 (i - r)}{sin^2 (i + r)}$ und $\frac{tang^2 (i - r)}{tang^2 (i + r)}$.

Das Resultat, welches zur Bestimmung des Brechungsexponenten als das geeignetste erscheint, ist jenes, welches sich auf die Gleichheit der Intensitäten des reflectirten und gebrochenen Lichtes bezieht, denn die Versuchsanordnung ist hier die einfachste und die verglichenen Lichtmengen sind von derselben Grössenordnung. Nun war bei einem Incidenzwinkel von 78⁰ 52′ die Intensität des reflectirten Lichtes gleich 0·5. Substituirt man diese Werthe in den beiden obigen Gleichungen, so gelangt man zu einer Gleichung zwölften Grades; die Berechnung wäre langwierig. Man kann jedoch einen kürzeren Weg einschlagen, indem man bemerkt, dass der gesuchte Brechungsexponent sich nicht viel von 1·5 unterscheiden kann, und diesen Werth als einen ersten Näherungswerth benutzt. Man setzt in die zweite Gleichung $i = 78^0 52'$, berechnet r, indem man für n verschiedene Werthe setzt, welche sich wenig von 1·5 unterscheiden, und beachtet, für welchen dieser Werthe die Grösse R gleich 0·5 wird. Man findet so für den gesuchten Brechungsexponenten die Zahl 1·496.

Unter Benutzung dieses Brechungsexponenten kann man die übrigen Intensitäten berechnen und gelangt zu der folgenden Tabelle:

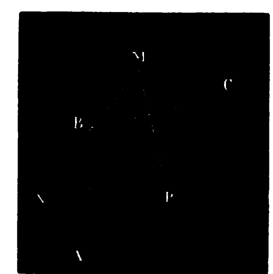
Incidenzwinkel	*R* beobachtet	*T* beobachtet	*R* berechnet	Differenzen
85⁰ 28′	0·7500	0·2500	0·7747	+ 0·0247
82⁰ 59′	0·6667	0·3333	0·6917	+ 0·0250
78⁰ 52′	0.5000	0·5000	—	—
72⁰ 43′	0·3333	0·6667	0·3251	— 0·0082
68⁰ 21′	0.2500	0·7500	0·2428	— 0·0072
63⁰ 22′	0·2000	0·8000	0·1800	— 0·0200
53⁰ 24′	0·1595	0·8405	0·1145	— 0.0450
43⁰ 38′	0·1423	0·8577	0·0894	— 0·0529
33⁰ 43′	0·1280	0·8720	0·0789	— 0·0491
19⁰ 34′	0·1028	0·8932	0·0765	— 0·0263
0⁰ 34′	0·0810	0·9190	0·0760	— 0·0050

Die Uebereinstimmung ist keine sehr befriedigende, doch immerhin eine hinreichende; die grössten Abweichungen zeigen sich bei den indirecten Messungen, welche eine geringere Genauigkeit gestatten. Ueberdies wurden diese schwierigen Messungen nur einmal von zwei Beobachtern gemacht, und es ist wahrscheinlich, dass dies nicht in bester Weise geschehen ist.

Es ist bemerkenswerth, dass für die Incidenzen von $78^0 52'$, $72^0 43'$ und $68^0 41'$ die Uebereinstimmung eine hinreichende ist; es wurden diese drei Resultate von Arago zur Verification eines wichtigen photometrischen Gesetzes benutzt.

Arago verificirte auch ein einfaches, aus Fresnel's Theorie fliessendes Gesetz, nach welchem an der Grenze der totalen Reflexion die Intensität des reflectirten Lichtes gleich jener des einfallenden ist. Arago bediente sich zu diesem Zwecke des oben beschriebenen Apparates. Der von der Glasplatte reflectirte Strahl ging vor der Reflexion durch einen Glaswürfel, der durch die Glasplatte gebrochene Strahl vor seiner Brechung durch ein Prisma *MNP* (Fig. 73), so dass er normal in das Prisma durch die Fläche *NP* eintrat, an der Fläche *MN* unter dem Grenzwinkel total reflectirt wurde und weiter normal durch die Fläche *MP* austrat.

Fig. 73.



Wenn die Reflexion bei *MN* wirklich eine vollständige ist, so müssen die Schwächungen, welche die beiden Lichtbündel, das reflectirte und das gebrochene, erfahren, indem sie bezüglich durch den Würfel und das Prisma gehen, die gleichen sein, und die Gleichheit der beiden Bilder muss immer noch bei einem Incidenzwinkel von $78^0 52'$ eintreten. Der Versuch ergab $78^0 51'$.

481. Calorimetrische Messungen von Provostaye und P. Desains.

Eine gute Methode der Verification der Intensitätsformeln ist die calorimetrische. Provostaye und P. Desains haben derlei Experimente durchgeführt [1]) und die Uebereinstimmung ihrer Resultate mit der Theorie ist eine so gute, dass man auf die Unexactheit der Arago'schen Messungen schliessen muss.

Die beiden Physiker polarisirten die Wärmestrahlen mittelst eines doppeltbrechenden Prismas und liessen sowohl in der Einfallsebene als senkrecht zu derselben polarisirte Strahlen Reflexion erfahren. Die

[1]) *Ann. de chim. et de phys.* (3) XXX, 276.

Reflexion fand an einer Glasplatte statt, welche zur Vermeidung der secundären Reflexionen an der Rückseite geschwärzt war. Der Brechungsexponent der Platte wurde mittelst des Winkels der totalen Polarisation bestimmt und gleich 1·52 gefunden. Die Intensitäten der Wärmestrahlenbündel wurden mittelst eines Thermomultiplicators gemessen.

Für Wärmestrahlen, welche in der Einfallsebene polarisirt waren, ergab sich:

Incidenzwinkel	Gemessene Intensitäten	Gerechnete Intensitäten	Differenzen
20°	0·050	0·050	0·000
30°	0·061	0·061	0·000
40°	0·081	0·081	0·000
50°	0·117	0·117	0·000
60°	0·183	0·180	+ 0·003
70°	0·306	0·308	— 0·002
75°	0·407	0·408	— 0·001
80°	0·551	0·546	+ 0·005

Diese Zahlen sind die Mittel vieler Beobachtungen. Die für die kleineren Incidenzen gefundenen Zahlen sind indirect erhalten, indem die reflectirten Strahlen nicht mit den einfallenden, sondern mit schon gemessenen reflectirten Strahlen verglichen wurden. Es geschah dies, weil es schwer war, Strahlen von beträchtlich verschiedener Intensität zu vergleichen, und weil auch das Galvanometer bei kleinen Incidenzen so besser zu gebrauchen war.

Für die senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Wärmestrahlen fanden Provostaye und Desains die folgenden Resultate:

Incidenzwinkel	Gemessene Intensitäten	Gerechnete Intensitäten	Differenzen
28°	0·030	0·027	+ 0·003
70°	0·043	0·042	+ 0·001
75°	0·110	0·106	+ 0·004
80°	0·240	0·236	+ 0·004

Eine zweite Reihe von Experimenten bezieht sich auf den Durchgang der Wärmestrahlen durch einen Glasplattensatz [1]).

Die Berechnung der Intensität eines Strahlenbündels, welches durch eine Reihe paralleler Glasplatten gegangen ist, kann mittelst der Intensitätsformeln Fresnel's durchgeführt werden. Zwar bildet die unendliche Zahl von Reflexionen, welche in jeder der Platten vor sich gehen, eine Schwierigkeit, doch begegnet man derselben mit dem Kunstgriffe, dass man die Quantität der durch $m - 1$ Platten gehenden Strahlen als bekannt voraussetzt, und berechnet, um wie viel diese Quantität durch die Hinzufügung einer $m$ten Platte vermindert wird.

---

[1]) *Ann. de chim. et de phys.* (3), XXX, 159.

Nehmen wir also die Intensität der einfallenden Wärme zur Einheit und bezeichnen wir mit T_{m-1} und R_{m-1} die Intensitäten der durch $\frac{m-1}{2}$ Platten, und folglich durch $m - 1$ begrenzende Flächen gebrochene und reflectirte Wärmemenge.

Ist u^2 die Intensität der an einer der Flächen reflectirten Wärme unter der Voraussetzung, dass die einfallende Wärmemenge gleich eins ist, so hat man für die Intensität der durch die $m$te Fläche gehenden Wärme $T_{m-1}(1 - u^2)$, und für die Intensität der von der $m$ten Fläche reflectirten Wärme $T_{m-1} u^2$. Diese reflectirte Wärme fällt auf die $m - 1$ ersten Flächen zurück, und ein Theil derselben gelangt neuerdings an die $m$te Fläche. Die Intensität dieses Theiles ist

$$T_{m-1} R_{m-1} u^2,$$

und von demselben geht eine Wärmemenge

$$T_{m-1} R_{m-1} u^2 (1 - u^2)$$

durch die $m$te Fläche hindurch, um sich zu der schon hindurchgegangenen Wärmemenge zu gesellen. Ein anderer Theil

$$T_{m-1} R_{m-1} u^4$$

wird reflectirt und giebt durch Reflexion an den $m - 1$ Flächen ein neues, an die $m$te Fläche gelangendes Bündel von der Intensität

$$T_{m-1} (R_{m-1})^2 u^4.$$

Der Theil dieses letzteren Bündels, welcher durch die $m$te Fläche gegelangt, ist

$$T_{m-1} (R_{m-1})^2 u^4 (1 - u^2),$$

und so fort.

Die Intensität der durch die $m$te Fläche tretenden Strahlen ist demnach die Summe der unendlichen geometrischen Reihe:

$$T_{m-1}(1 - u^2),\ T_{m-1} R_{m-1} u^2 (1 - u^2),\ T_{m-1} (R_{m-1})^2 u^4 (1 - u^2), \ldots$$

also gleich

$$T_m = \frac{T_{m-1}(1 - u^2)}{1 - R_{m-1} u^2}.$$

Diese Formel giebt die durch m-Flächen hindurchgehende Wärme als Function der durch $m - 1$-Flächen gehenden.

Für $m = 1$ hat man $T_m = 1 - u^2$.

Für $m = 2$ hat man $T_m = \frac{(1 - u^2)(1 - u^2)}{1 - u^4} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$.

Für $m = 3$ hat man $T_m = \frac{(1 - u^2)\frac{1 - u^2}{1 + u^2}}{1 - u^2 + u^2 \frac{1 - u^2}{1 + u^2}} = \frac{(1 - u^2)^2}{1 + u^2 - 2u^4}$

$$= \frac{1 - u^2}{1 + 2u^2},$$

und allgemein

$$T_m = \frac{1 - u^2}{1 + (m - 1)\, u^2},$$

und folglich auch

$$R_m = \frac{m\, u^2}{1 + (m - 1)\, u^2}.$$

Dies sind die Formeln, welche von Provostaye und Desains verificirt worden sind; sie gelten ebenso für Wärmestrahlen, welche in der Einfallsebene, als für solche, welche senkrecht zur Einfallsebene polarisirt sind. Um die Absorption zu vermeiden, wurden Strahlen verwendet, welche schon durch eine dicke Glasschicht hindurchgegangen waren, so dass der Glasplattensatz für die benutzten Strahlen als vollkommen diatherman gelten konnte. Der Brechungsexponent des Glases war 1·44.

Wir lassen die vergleichende Tabelle der experimentellen und theoretischen Resultate folgen.

1. Wärme, polarisirt in der Einfallsebene:

Incidenzwinkel		Durchgehende Wärme beobachtet	Durchgehende Wärme gerechnet	Differenzen
Eine Platte	60°	0·706	0·705	+ 0·001
Eine Platte	70°	0·541	0.544	— 0·003
Zwei Platten	60°	0·542	0·544	— 0·002
Zwei Platten	70°	0·270	0·274	— 0·004
Drei Platten	50°	0·586	0·583	+ 0·003
Drei Platten	60°	0·439	0·444	— 0·005
Drei Platten	70°	0·282	0·285	— 0·003
Vier Platten	60°	0·396	0·374	+ 0·022

2. Wärme, polarisirt senkrecht zur Einfallsebene:

Eine Platte	75°	0·802	0·806	— 0·004
Zwei Platten	75°	0·676	0·675	+ 0·001
Drei Platten	70°	0·775	0·778	— 0·003
Drei Platten	75°	0·583	0·583	0·000

3. Natürliche Wärme unter normaler Incidenz:

Eine Platte	0·92	0·92	0·00
Zwei Platten	0·86	0·86	0·00
Drei Platten.	0·80	0·80	0·00
Vier Platten.	0.73	0·75	— 0·02

482. Die Intensitätsmessungen Glan's.

Die Messungen Glan's[1]) bestätigten für das in der Einfallsebene polarisirte Licht die Fresnel'sche Intensitätsformel $\sin^2\,(i - r)$

[1]) Berl. Monatsb. 1874.

: $sin^2(i + r)$, und zwar für die einzelnen homogenen Farben des Spectrums.

Glan benutzte bei seinen Messungen das Spectrometer. Der mittlere Theil der Spalte des Collimators war mittelst eines Stanniolstreifens bedeckt und an der Collimatorlinse ein doppeltbrechendes Prisma so befestigt, dass der Hauptschnitt mit der Spalte parallel war und die beiden Spectra, das ordentliche und ausserordentliche, in verticaler Richtung gegen einander verschoben erschienen. Es gab demnach vier Spectra, e, o, e', o'. Die beiden ersten Spectra rührten von dem unteren Theile der Spalte her, die beiden letzteren von dem oberen, und die beiden mittleren Spectra o, e' grenzten im Beobachtungsfernrohre an einander. Die Spalte wurde von zwei Petroleumlampen beleuchtet, von welchen die eine ihr Licht entweder direct oder nach einer Reflexion an einer Glasfläche zur Spalte senden konnte. Das Beobachtungsfernrohr trug einen Nicol mit Theilkreis.

Gesetzt, in die untere Spalthälfte falle Licht von einer Petroleumlampe. Eine Farbe f des Spectrums o wird im Hauptschnitte polarisirt sein und eine gewisse Intensität i haben. Fällt gleichzeitig in die obere Spalthälfte das Licht einer zweiten Petroleumlampe, so wird dieselbe Farbe f des Spectrums e' normal zum Hauptschnitte polarisirt sein und eine gewisse Intensität i' haben. Fällt aber das letztere Licht ein, nachdem es eine Reflexion in einer horizontalen Ebene erfahren hat, so wird die Intensität eine kleinere, ki', sein, wo k die Intensität des reflectirten Lichtes in Theilen des auffallenden ist, also eine Grösse, welche durch die Fresnel'sche Formel gegeben sein soll.

Man lässt das obere Licht ohne Reflexion einfallen und bestimmt die Lage des Nicols, bei welcher die Farbe f, um welche es sich handelt, in den Spectren o und e' gleich hell erscheint. Ist alsdann α der Winkel des Hauptschnittes des Nicols mit dem Hauptschnitte des doppeltbrechenden Prismas, so hat man für die Intensität der Farbe f im Spectrum o den Betrag $i\,sin^2\alpha$ und im Spectrum e' den Betrag $i'\,cos^2\alpha$ und

$$tang^2\alpha = \frac{i'}{i}.$$

Man lässt hierauf das obere Licht mit Reflexion auffallen, und bestimmt weiter den Winkel β des Nicols, bei welchem die Intensitäten der Farbe f in den Spectren o und e' gleich sind, um zu erhalten

$$tang^2\beta = \frac{ki'}{i}.$$

Durch Division der beiden Gleichungen ergiebt sich

$$k = \frac{tang^2\beta}{tang^2\alpha}.$$

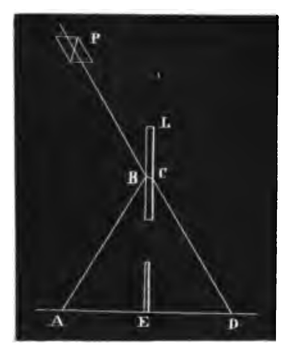
Die Abweichungen zwischen den beobachteten und den nach der Fresnel'schen Formel berechneten Werthen übersteigen nicht 1 Proc.

483. Polarimetrische Messungen.

Tritt natürliches Licht durch eine Trennungsebene, so enthalten das reflectirte und das gebrochene Licht nach Fresnel's Theorie gleiche Quantitäten polarisirten Lichtes. Dieses Gesetz war schon im Jahre 1815 von Arago[1]) experimentell gefunden.

In der That kann dieses Gesetz leicht mittelst eines einfachen Versuches verificirt werden. Oberhalb eines horizontalen weissen Papierschirmes AED, Fig. 74, befindet sich die Glasplatte L in verticaler Lage. Durch das doppeltbrechende Prisma P erhält man zwei Strahlenbündel, beide von dem weissen Papier herrührend, doch erleidet das eine Bündel an der Platte L Reflexion, das andere Brechung. Indem nun die beiden Bilder des Prismas bei jeder Lage desselben gleich hell erscheinen, ist bewiesen, dass die Mengen polarisirten Lichtes, welche sich im reflectirten und im gebrochenen Strahlenbündel befinden, gleich gross sind.

Fig. 74.



Brewster hat gegen dieses Experiment den Einwurf gemacht, dass auf die wiederholten Reflexionen keine Rücksicht genommen sei. Wir wollen sehen, ob dieser Einwurf stichhaltig ist.

Bezeichnet man mit $\frac{1}{2}u^2$ und $\frac{1}{2}u'^2$ die Intensitäten des parallel und normal zur Einfallsebene polarisirten reflectirten Lichtes, so ist, wie wir (S. 384) gesehen haben, die Summe der Intensitäten der in der Einfallsebene polarisirten reflectirten Strahlen gleich $\frac{u^2}{1+u^2}$, und die Summe der Intensitäten der normal zur Einfallsebene polarisirten reflectirten Strahlen gleich $\frac{u'^2}{1+u'^2}$. Man findet gleicherweise für das gebrochene Licht, dass die Summe der Intensitäten der in der Einfallsebene polarisirten Strahlen gleich $\frac{1}{2}\frac{1-u^2}{1+u^2}$ ist, und die Summe der Intensitäten der normal zur Einfallsebene polarisirten Strahlen gleich $\frac{1}{2}\frac{1-u'^2}{1+u'^2}$.

Wir haben also im reflectirten Lichte eine gewisse Menge natürlichen Lichtes und eine gewisse Menge in der Einfallsebene polarisirten Lichtes, dessen Intensität gleich ist

[1]) *OEuvres complètes*, X, 468.

$$\frac{u^2}{1+u^2} - \frac{u'^2}{1+u'^2} = \frac{u^2 - u'^2}{(1+u^2)(1+u'^2)}.$$

Ebenso enthält das gebrochene Licht eine gewisse Menge natürlichen Lichtes und eine gewisse Menge normal zur Einfallsebene polarisirten Lichtes, dessen Intensität gleich ist

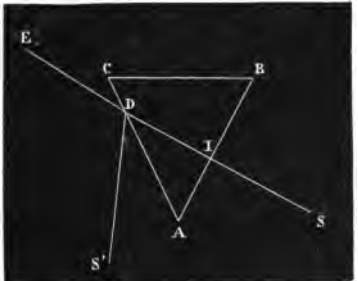
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-u'^2}{1+u'^2} - \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) = \frac{u^2 - u'^2}{(1+u^2)(1+u'^2)}.$$

Die beiden Mengen polarisirten Lichtes, welche sich im reflectirten und gebrochenen Lichte finden, sind demnach immer noch gleich, trotz der secundären Reflexionen, und der oben gemachte Einwurf ist hierdurch entkräftet.

Brewster hat an Stelle des Arago'schen Experimentes ein anderes gesetzt, welches einfacher schien, aber nicht exact ist. Der Strahl *SI* fiel senkrecht auf die Fläche *AB*, Fig. 75, eines Prismas und trat längs derselben Linie *DE* aus, längs welcher ein Strahl *S'D* an der Fläche *AC* reflectirt wurde. Es war bei dieser Versuchsanordnung nicht nöthig, auf die secundären Reflexionen Rücksicht zu nehmen, doch benahm schon die Dispersion des Prismas dem Experimente die nöthige Präcision.

Fig. 75.





Das von Arago aufgestellte Gesetz gilt auch für einen Glasplattensatz; der experimentelle Nachweis geschieht in derselben Art, wie für eine einzige Platte.

484. Photometrische Anwendung.

Das Gesetz der Gleichheit der Mengen des polarisirten zurückgeworfenen und gebrochenen Lichtes hat zur Construction eines Photometers geführt, welches von Duboscq hergestellt und mit Unrecht Babinet zugeschrieben wurde. Dieses Photometer, Fig. 76 (a. f. S.), dient zur Vergleichung der Intensitäten zweier Quellen natürlichen oder circular polarisirten Lichtes. Die beiden zu vergleichenden Lichtbündel treten in die Röhren *AB* und *CB*, um von der Platte *L*, dessen Ebene den 60grädigen Winkel *CBA* halbirt, bezüglich reflectirt und durchgelassen zu werden. Das Doppelbündel *BN* geht durch den Soleil'schen Doppelquarz *Q*, dessen Hälften bezüglich gleich stark nach rechts und nach links drehen, und durch den Analyseur *N*. Sind die beiden einfallenden Bündel ungleich intensiv, so ist das Doppelbündel *BN* partiell

polarisirt und die beiden Hälften eines jeden der beiden Bilder des Analyseurs erscheinen verschieden gefärbt. Sind hingegen die einfallenden Bündel gleich intensiv, so ist das Doppelbündel unpolarisirt und die beiden Hälften eines Bildes des Analyseurs erscheinen gleich. Durch Variirung der Entfernungen der Lichtquellen oder der Dimensionen der Oeffnungen der lichteinlassenden Diaphragmen kann das Verhältniss der Intensitäten der einfallenden Bündel bestimmt werden.

Fig. 76.



485. Anwendung auf die Verification des Malus'schen Gesetzes.

Dasselbe Gesetz von der Gleichheit der polarisirten Lichtmengen bei der Reflexion und Brechung hat im Jahre 1832 Arago[1]) zur Verification eines Malus'schen Gesetzes gedient. Wenn ein Strahl polarisirten Lichtes auf ein doppeltbrechendes Prisma fällt, dessen Hauptschnitt mit der Polarisationsebene den Winkel ω bildet, so sind nach diesem Gesetze die Intensitäten des ordentlichen und des ausserordentlichen Strahles bezüglich gleich $\cos^2 \omega$ und $\sin^2 \omega$, wenn die Intensität des einfallenden Strahles gleich eins ist.

Arago liess auf eine doppeltbrechende Krystallplatte einen mittelst eines Nicols polarisirten Strahl fallen. Nach dem Austritte vereinigten sich die beiden Bündel wieder, wenn die Platte dünn genug war, zu einem einzigen Bündel. Nehmen wir an, es sei $\omega < 45^0$, und folglich $\cos^2 \omega > \sin^2 \omega$, so kann das aus der Platte tretende Bündel nach dem Malus'schen Gesetze angesehen werden als bestehend aus einer gewissen Menge natürlichen Lichtes und einer anderen Menge polarisirten Lichtes, dessen Intensität $\cos^2 \omega - \sin^2 \omega$ oder $\cos 2\omega$ ist. Um diese Consequenz des Malus'schen Gesetzes zu verificiren, liess Arago das austretende Bündel auf eine Glasplattensäule so fallen, dass die Einfallsebene des Bündels und seine Ebene der partiellen Polarisation zusammenfielen. Man sieht leicht, dass sich eine Incidenz finden lässt, bei welcher das durch die Glasplattensäule gehende Licht seine Polarisation verliert. Das auf die Glasplattensäule fallende Licht kann nämlich an-

[1]) *OEuvres complètes*, X, 168.

gesehen werden als bestehend aus zwei rechtwinkelig polarisirten Bündeln von den Intensitäten $\cos^2 \omega$ und $\sin^2 \omega$. In dem Maasse, als der Incidenzwinkel sich vergrössert und sich dem Winkel der vollständigen Polarisation nähert, vermindert sich die Intensität des Bündels, dessen Intensität ursprünglich $\cos^2 \omega$ ist, und wird der Null gleich, während dies beim anderen Bündel, dessen ursprüngliche Intensität $\sin^2 \omega$ ist, nicht zutrifft. Bei einer gewissen Incidenz werden also die beiden Bündel nach ihrem Austritte aus der Glasplattensäule gleiche Intensitäten haben, und das resultirende Licht wird natürliches Licht sein. Um die Incidenz zu finden, bei welcher das austretende Licht unpolarisirt ist, wendet man eine Doppelquarzplatte und einen Analyseur an, wie dies oben bei Gelegenheit der Beschreibung des Photometers ausgeführt worden ist. Das Experiment giebt also die Incidenz, bei welcher die beiden austretenden Bündel gleich intensiv sind. Andererseits kann man diese Incidenz aus dem Malus'schen Gesetze berechnen, wenn der Winkel ω gegeben ist. Die Quarzplatte und das Prisma sind an einem Ende einer Röhre angebracht, welche an dem anderen Ende den Glasplattensatz trägt.

486. Das Polarimeter.

Bei der eben besprochenen Einrichtung des Apparates geht das Lichtbündel parallel der Achse der Röhre durch die Glasplattensäule. Verbindet man die letztere mit einer Alhidade und einem Theilkreise, so kann man den Incidenzwinkel bestimmen.

Lässt man auf die Glasplattensäule partiell polarisirtes Licht fallen und graduirt den Apparat, indem man die verschiedenen Incidenzwinkel notirt, welche den verschiedenen relativen Mengen des im einfallenden Lichte enthaltenen polarisirten Lichtes entsprechen, so hat man ein Arago'sches Polarimeter, d. h. einen Apparat, welcher die verhältnissmässige Menge des in einem partiell polarisirten Lichtbündel enthaltenen polarisirten Lichtes zu messen gestattet.

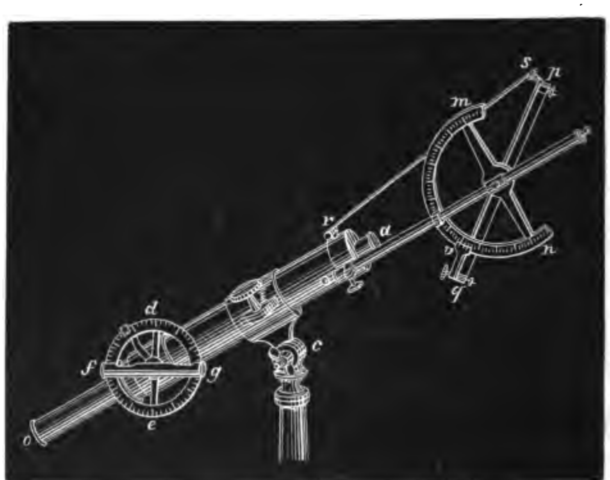
Das Arago'sche Polarimeter[1]), Fig. 77 (a. f. S.), besteht, wie schon erwähnt, aus einer Röhre *a o*, an deren Ende *a* ein Stab befestigt ist, welcher einen getheilten Halbkreis *m n* trägt; sowohl der Mittelpunkt des Halbkreises als der Nullpunkt der Theilung fallen auf die Achse der Röhre. Um den Mittelpunkt des Theilkreises dreht sich eine Alhidade mit dem auf dem Theilkreise spielenden Nonius *v*. Die Alhidade trägt die Glasplattensäule *p q*. Die Theilung des Kreises lässt den Winkel ablesen, welchen die Fläche des Glasplattensatzes mit der Achse der Röhre bildet, d. i. mit dem Lichtstrahle, welcher bei *a* in die Röhre tritt: man erhält so den Incidenzwinkel. Um zu verhindern, dass durch

1) *OEuvres complètes*, X, 270.

den Glasplattensatz in die Röhre Strahlen reflectirt werden, ist der Tuchstreifen *rs* angebracht. Schliesslich befindet sich an dem Ende *o* der Röhre der Analyseur, bestehend aus einem Nicol und einem Doppelquarz. Die um *c* bewegliche Röhre kann in eine beliebige Lage gegen den Horizont gebracht werden, und man kann den Winkel, welchen die Achse der Röhre mit dem Horizonte bildet, mittelst des Theilkreises *de* und der Libelle *fg* bestimmen.

Die Graduirung des Polarimeters kann in verschiedener Weise vorgenommen werden. Eine erste Methode besteht darin, dass man auf die Glasplattensäule Licht fallen lässt, welches durch zwei Turmaline mit gekreuzten Achsen und gleichen Flächen gegangen ist. Man erhält so zwei Bündel rechtwinkelig polarisirten Lichtes, welche mittelst einer Linse auf den Glasplattensatz geworfen werden. Bedeckt man einen

Fig. 77.



bestimmten Theil der Fläche des einen Turmalins, so werden die Intensitäten der beiden rechtwinkelig polarisirten Lichtbündel ungleich, und das Verhältniss dieser Intensitäten ist gleich dem Verhältnisse der Querschnitte der beiden Bündel. Man erhält so partiell polarisirtes Licht von bekannter und beliebig zu variirender Zusammensetzung. Es genügt dann, für jede Zusammensetzung des partiell polarisirten Lichtes den Incidenzwinkel zu notiren, bei welchem das auf den Analyseur fallende Licht die Eigenschaften des natürlichen zeigt, d. i. bei welchem die beiden Hälften jedes der beiden Bilder des Doppelquarzes gleich erscheinen.

Arago hat sich noch einer anderen Methode zur Graduirung seines Polarimeters bedient. Er liess ein Lichtbündel auf die Glasplattensäule fallen, welches vorher an einer planparallelen Glasplatte derart Reflexion

erfahren hatte, dass die Einfallsebene der Glasplatte und des Glasplattensatzes parallel waren. Das reflectirte Lichtbündel von der Intensität i enthielt demnach eine gewisse Menge q in der Einfallsebene polarisirten Lichtes. Es wurde nun der Incidenzwinkel gesucht, unter welchem dieses Licht auf den Glasplattensatz fallen musste, damit das austretende Licht die Eigenschaften des natürlichen Lichtes zeigte. Derselbe Versuch wurde in der Art wiederholt, dass man das Lichtbündel durch die Platte hindurchtreten liess, und derselben eine solche Lage gab, dass die Einfallsebene der Platte und der Glasplattensäule auf einander senkrecht standen. Die Menge des in der Einfallsebene der Glasplattensäule und folglich senkrecht zur Einfallsebene der Glasplatte polarisirten Lichtes war nach dem Arago'schen Gesetze immer noch gleich q, aber die Menge i' des durchgelassenen Lichtes war verschieden von i. Man hatte also im ersten Falle einen Bruchtheil $\frac{q}{i}$ in der Einfallsebene polarisirten Lichtes, welcher bei einer gewissen Incidenz α durch die Glasplattensäule neutralisirt wurde, und im zweiten Falle einen Bruchtheil $\frac{q}{i'}$, welcher bei einer Incidenz α' neutralisirt wurde. Arago liess hierbei das Licht auf die Glasplatte unter Incidenzen fallen, für welche er das Intensitätsverhältniss des reflectirten und gebrochenen Lichtes bestimmt hatte. Das Verhältniss $\frac{q}{i} : \frac{q}{i'}$ war demnach bekannt. Es wurde hierauf die Glasplatte entfernt und durch einen Nicol ersetzt; der durch den Nicol polarisirte Strahl ging durch eine Krystallplatte, deren Hauptschnitt mit der Einfallsebene der Glasplattensäule zusammenfiel, und traf sodann dieselbe unter der Incidenz α. Hierauf wurde der Nicol gedreht bis zur vollständigen Neutralisirung des Lichtes. Sei ω der Winkel, welcher alsdann der Hauptschnitt des Nicols mit jenem der Krystallplatte bildet. Indem der polarisirte Strahl durch die Krystallplatte tritt, theilt er sich in zwei rechtwinkelig, parallel und senkrecht zum Hauptschnitte polarisirte Strahlen, deren Intensitäten nach dem Malus'schem Gesetze $\cos^2 \omega$ und $\sin^2 \omega$ sind. Man hat demnach beim Austritte aus der Krystallplatte ein in der Einfallsebene partiell polarisirtes Lichtbündel, welches angesehen werden kann als bestehend aus einer gewissen Menge natürlichen Lichtes, und einer gewissen Menge in der Einfallsebene polarisirten Lichtes von der Intensität

$$\cos^2 \omega - \sin^2 \omega = \cos 2\,\omega.$$

Man wiederholt das Experiment, indem man den Strahl auf den Glasplattensatz unter dem Incidenzwinkel α' fallen lässt, und findet so für den Winkel zwischen den Hauptschnitten des Nicols und der Krystallplatte einen anderen Werth ω', so dass jetzt, wenn das Malus'sche Gesetz richtig ist, der Bruchtheil polarisirten Lichtes, bezogen auf die Gesammtmenge des durchgehenden Lichtes als Einheit, gleich ist $\cos 2\,\omega'$.

Das Verhältniss $\frac{\cos 2\omega}{\cos 2\omega'}$ giebt also das Verhältniss der Bruchtheile polarisirten Lichtes in den beiden Fällen bezogen auf die Gesammtmenge des durchgehenden Lichtes als Einheit; man hat folglich

$$\frac{\cos 2\omega}{\cos 2\omega'} = \frac{\frac{q}{i}}{\frac{q}{i'}} = \frac{i'}{i}.$$

Nachdem das Verhältniss $\frac{i'}{i}$ durch die Intensitätsmessungen gegeben ist, kann die Richtigkeit dieser Gleichung in jedem besonderen Falle leicht verificirt werden. Arago wählte jene von seinen Experimenten, bei welchen $\frac{i'}{i} = \frac{1}{2}$ und $\frac{i'}{i} = \frac{1}{3}$ war. Die Zahlen, welche man für $\frac{\cos 2\omega}{\cos 2\omega'}$ erhält, sind $\frac{1}{1{\cdot}85}$ und $\frac{1}{2{\cdot}97}$. Die Annäherung ist um so mehr eine hinreichende, als die Zahlen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ selbst nicht ganz genau sind. Jedenfalls sind diese Zahlen unter den von Arago gefundenen die verlässlichsten, da der Apparat gerade bei der Bestimmung dieser Zahlen am einfachsten eingerichtet war.

Die Reihe von Operationen, welche wir beschrieben haben, ist nichts Anderes als eine directe Verification des Gesetzes von Malus; diese Verification war, strenge genommen, überflüssig, da die sämmtlichen Erscheinungen der chromatischen Polarisation aus diesem Gesetze hergeleitet werden können, und also eine Bestätigung a posteriori der Richtigkeit dieses Gesetzes liefern.

Gestützt auf das Gesetz von Malus ist es leicht, das Polarimeter in einfacher Weise zu graduiren. Man lässt ein Strahlenbündel durch einen Nicol und eine Krystallplatte treten und sodann auf die Glasplattensäule fallen. Das Bündel ist partiell in der Einfallsebene polarisirt, welche mit dem Hauptschnitte der Krystallplatte zusammenfällt, und der polarisirte Bruchtheil des einfallenden Lichtes ist $\cos 2\omega$, wenn ω der Winkel des Hauptschnittes des Nicols mit jenem der Krystallplatte ist. Man giebt dem Glasplattensatze jene Neigung, bei welcher das austretende Licht die Eigenschaften des natürlichen Lichtes zeigt, und erhält so den Incidenzwinkel, welcher einem Bruchtheile $\cos 2\omega$ polarisirten Lichtes entspricht. Indem man den Winkel ω variirt, kann man den Apparat graduiren.

487. Die Experimente von Ed. Desains.

Ed. Desains[1]) graduirte ein Arago'sches Polarimeter nach einem Verfahren, auf welches wir später zurückkommen werden. Er benutzte das Instrument zu Versuchen über die Reflexion des Lichtes an einem schwarzen Glase, dessen Brechungsindex mittelst des Polarisationswinkels zu 1·425 bestimmt worden war.

Er gelangte zu den folgenden Resultaten:

Incidenzwinkel	Bruchtheil des polarisirten Lichtes beobachtet	berechnet	Differenzen
30⁰	0·420	0·413	+ 0·007
35⁰	0·555	0·563	— 0·008
40⁰	0·707	0·719	— 0·012
70⁰	0·698	0·708	— 0·010
75⁰	0·539	0·536	+ 0·003

Die Uebereinstimmung ist eine sehr befriedigende.

Versuche mit durchgehendem Lichte anzustellen ist unnütz, da nach dem Gesetze Arago's, welches theoretisch und experimentell verificirt ist, die absolute Menge des durch Brechung polarisirten Lichtes gleich jener des durch Reflexion polarisirten Lichtes ist.

Ist das Polarimeter Arago's einmal graduirt, so kann es schliesslich zur Verification der Gesetze Fresnel's von den Intensitäten des reflectirten und gebrochenen Lichtes dienen. Man lässt zu diesem Zwecke auf die Glasplattensäule einen Strahl fallen, welcher von der zu untersuchenden Substanz reflectirt worden ist, und sucht die Incidenz an der Glasplattensäule auf, bei welcher das polarisirte Licht neutralisirt wird; d. i. bei welcher die beiden Hälften jedes Bildes des Analyseurs gleich erscheinen. Die Theilung des Polarimeters giebt dann das Verhältniss $\frac{q}{i}$ der Intensität q des polarisirten Lichtes zur Intensität i des gesammten reflectirten Lichtes. Oder lässt man auf die Glasplattensäule das Licht fallen, welches durch die zu untersuchende Platte hindurchgegangen ist, so giebt der Incidenzwinkel, bei welchem Neutralisation stattfindet, das Verhältniss $\frac{q}{i'}$ der Intensität des polarisirten Lichtes zu jener der gesammten durchgelassenen Lichtmenge. Da die Grösse q nach dem Arago'schen Gesetze in beiden Fällen gleich ist, so ist das Verhältniss der mittelst des Polarimeters bestimmten Grössen $\frac{q}{i}$ und $\frac{q}{i'}$ zugleich das

[1]) *Ann. de chim. et de phys.* (3) XXXI, 286.

Verhältniss $\frac{i'}{i}$ der Intensitäten des durchgelassenen und des reflectirten Lichtes. Arago hat dieses Verfahren angegeben, hat sich aber desselben nicht bedient.

488. Glasplattensäulen bei dünnen Strahlenbündeln.

Die Eigenschaften einer Glasplattensäule lassen sich aus Fresnel's Gesetzen der Brechung und Zurückwerfung ableiten. Auch hierin zeigt sich eine neue Bestätigung der Richtigkeit der Formeln Fresnel's.

Man hat zwei Fälle zu betrachten: den Fall eines Bündels von sehr kleinem Querschnitte, und den Fall eines Bündels von beträchtlichem Querschnitte.

Wird die Glasplattensäule von einem sehr dünnen Strahlenbündel durchsetzt, so ist die Berechnung des Resultates einfach. Man kann in diesem Falle, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, an jeder Trennungsfläche nur einen einzigen zurückgeworfenen und einen einzigen gebrochenen Strahl in Betracht ziehen. Untersuchen wir den Polarisationszustand des durchgehenden Strahles. Ein auf die erste Glasplatte fallender polarisirter Strahl kann in zwei parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Strahlen zerlegt werden, deren Amplituden $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ sind. Nach der ersten Brechung sind die beiden Amplituden $m\cos\alpha$ und $\frac{m\sin\alpha}{\cos(i-r)}$, wie aus den früher entwickelten Formeln hervorgeht. Hat der Strahl eine Zahl p Platten durchsetzt, so ist die Zahl der Brechungen $2p$, und die Amplituden der beiden Composanten sind m^{2p} und $\frac{m^{2p}\sin\alpha}{\cos^{2p}(i-r)}$.

Das Licht, welches aus der Glasplattensäule tritt, ist demnach geradlinig polarisirt, und der Winkel β seiner Polarisationsebene mit der Einfallsebene ist

$$\operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}\alpha\,\frac{1}{\cos^{2p}(i-r)}.$$

Diese Formel lässt sich leicht verificiren.

Fällt natürliches Licht auf die Glasplattensäule, so sind die relativen Intensitäten der beiden Composanten beim Austritte aus der Glasplattensäule 1 und $\frac{1}{\cos^{4p}(i-r)}$; nimmt man also die senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Composante zur Einheit, so ist die andere Composante gleich $\cos^4(i-r)$. Das Verhältniss der polarisirten Lichtmenge zur gesammten durchgehenden Lichtmenge ist $\frac{1-\cos^{4p}(i-r)}{1+\cos^{4p}(i-r)}$.

Man kann mittelst des Polarimeters diesen Ausdruck, dessen Grenze die Einheit ist, verificiren.

In der oben abgeleiteten Formel

$$tang\, \beta = tang\, \alpha \frac{1}{cos^{2p}\,(i - r)}$$

hängt der Winkel β vom Brechungsindex ab, so dass Alles, was diesen verändert, auch die Drehung der Polarisationsebene verändern muss. Lässt man aber durch eine planparallele Platte in der Richtung der Erdbewegung einen Strahl treten, so erscheint der Brechungsindex verändert. Man hat die Geschwindigkeit des Lichtes in der Luft um die Geschwindigkeit der Erde zu vergrössern, hingegen die Geschwindigkeit des Lichtes in der Platte um das Product der Geschwindigkeit der Erde in die lichtbrechende Kraft der Platte. Eine Differenz in Bezug auf die Richtung des gebrochenen Strahles, je nachdem derselbe in der Richtung der Erdbewegung oder in der entgegengesetzten Richtung geht, ergiebt sich hieraus nicht. Anders verhält es sich mit der Drehung der Polarisationsebene, welche verschieden sein muss, je nachdem der Strahl in der Richtung der Erdbewegung geht, oder in der entgegengesetzten Richtung.

Fizeau hat diese Consequenz der Theorie experimentell verificirt[1]. Er liess einen Lichtstrahl parallel der Bewegung der Erde durch einen Polariseur, eine Glasplattensäule und einen Analyseur treten. Wurde der Apparat umgekehrt, so dass der Strahl in einer der ursprünglichen entgegengesetzten Richtung ging, so zeigte sich eine Veränderung der Lage der Polarisationsebene.

Das Experiment unterliegt Schwierigkeiten, denn der Zähler und der Nenner des Brechungsindex ändern sich um Grössen, welche weniger als $^1/_{10\,000}$ des eigenen Werthes betragen. Man muss also einerseits viele Platten verwenden, während andererseits mit zunehmender Plattenzahl sich die Polarisationsebene des durchgehenden Strahles einer zur Einfallsebene senkrechten Ebene nähert und hierdurch die Empfindlichkeit des Apparates wieder verringert wird.

Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, ordnete Fizeau mehrere Säulen so an, dass die Einfallsebene einer jeden zur Einfallsebene der vorhergehenden normal war; man erhält so eine Drehung der Polarisationsebene um mehrere volle Winkel, und der Einfluss der Bewegung der Erde wird wahrnehmbar.

489. Glasplattensäulen bei dicken Strahlenbündeln.

Der Fall eines dicken Strahlenbündels ist zwar complicirter als der vorhergehende, bietet jedoch keine wesentliche Schwierigkeit. Man zer-

[1]) *Ann. de chim. et de phys.* (3), LVIII, 129.

legt den einfallenden polarisirten Strahl in zwei Strahlen, welche beziehungsweise parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirt sind. Die Intensität einer jeden der beiden Composanten des nach dem Durchgange durch die Säule austretenden Strahles erscheint als die Summe der Intensitäten einer Reihe von Strahlen, deren erster direct durch die Säule geht, während der zweite im Inneren der Säule zwei Reflexionen erfährt, der dritte vier, der vierte sechs u. s. w. Die Summe der Intensitäten der beiden so berechneten Composanten ist die Intensität des austretenden Strahles.

Fällt natürliches Licht ein, so ist das austretende Licht partiell senkrecht zur Einfallsebene polarisirt. Ist jedoch das einfallende Licht geradlinig polarisirt, so ist es wegen der mehrfachen Reflexionen nicht exact, mit Provostaye und Desains zu schliessen, dass das austretende Licht in einer Ebene polarisirt sei, welche mit der Einfallsebene einen Winkel einschliesst, dessen Tangente durch das Amplitudenverhältniss der beiden Composanten gegeben ist.

Analoge Betrachtungen lassen sich in Bezug auf das reflectirte Bündel anstellen.

490. Haidinger's Büschel.

Es wurde versucht, Haidinger's Büschel[1]) mittelst der Modificationen zu erklären, welche das polarisirte Licht bei der Brechung erfährt, und dies ist der Grund, warum hier auf diese Erscheinung eingegangen wird.

Die Erscheinung der Haidinger'schen Büschel ist die folgende. Gelangt von einer leuchtenden Fläche weisses polarisirtes Licht in das Auge, so gewahrt man ein Farbenbild, dessen vier Quadranten abwechselnd bläulich und gelblich gefärbt erscheinen. Die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes geht mitten durch die beiden gelben Quadranten. Um die Erscheinung zu erhalten, blickt man durch ein Nicol'sches Prisma nach dem Himmel; die Wahrnehmbarkeit der Büschel wird erhöht, wenn man den Nicol vor dem Auge um 90 Grade dreht. Sendet die betrachtete Stelle des unbewölkten Himmels hinreichend polarisirtes Licht aus, so nimmt man die Büschel mit unbewaffnetem Auge wahr. Steht die Sonne nahe dem Horizonte, so blicke man nach dem Zenithe oder nach einem Punkte des Horizontes, welcher von der Sonne um 90 Grade absteht; die von diesen beiden Punkten kommenden Strahlen sind rechtwinkelig polarisirt, und man erhöht folglich die Wahrnehmbarkeit der Haidinger'schen Büschel, wenn man in rascher Folge nach dem Zenithe und dem Horizonte blickt.

---

[1]) Pogg. Ann., LXIII, LXVII, LVIII, LXXV, XCI.

Jamin[1]) hat versucht, die Erscheinung der Haidinger'schen Büschel aus der Wirkung der Glasplattensäule zu erklären. Fällt ein polarisirter Strahl auf eine Glasplattensäule, so kann man denselben in zwei parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Strahlen zerlegen. In Folge der Wirkung der Glasplattensäule verliert der in der Einfallsebene polarisirte Strahl beim Durchgange durch die Säule mehr an Intensität, als der senkrecht zur Einfallsebene polarisirte, woraus folgt, dass die Intensität des durchgelassenen Strahles um so geringer ist, je mehr sich die Polarisationsebene der Einfallsebene nähert. Fällt demnach ein polarisirtes Strahlenbündel auf ein System concentrischer, sphärischer Flächen, und legt man eine Ebene durch das Centrum der Flächen parallel mit der Polarisationsebene, so werden die in dieser Ebene enthaltenen Strahlen nach ihrem Austritte ein Minimum der Intensität haben, hingegen die Strahlen, welche in einer zu der gedachten Ebene senkrechten Ebene liegen, ein Maximum der Intensität.

In den Zwischenlagen wird die Intensität von der ersteren Ebene gegen die letztere zunehmen. Allein Strahlen von verschiedener Farbe werden verschiedene Intensitätsveränderungen erfahren, da diese Veränderungen von den Winkeln i und r, und folglich von den Brechungsexponenten abhängen. Hat man also weisses Licht, so sind die Maxima und Minima der verschiedenen Farben nicht proportional den Intensitäten dieser Farben im weissen Lichte; es herrscht eine Farbe vor, und diese wird wahrgenommen. Berechnet man die Abschwächung der in der Einfallsebene und senkrecht zu derselben polarisirten Strahlen für die verschiedenen Farben, so findet man in der That, dass im ersteren Falle die gelbe Farbe vorherrscht, im letzteren die violette.

Man kann das Phänomen künstlich hervorbringen mittelst einer aus 100 bis 200 Gläsern zusammengesetzten Säule.

Jamin nimmt nun an, dass das Auge sich analog verhalte, da die Cornea und die Krystalllinse aus ungleich brechenden spärischen Schichten zusammengesetzt sind.

Indessen hat Helmholtz diese Erklärung Jamin's widerlegt, und namentlich geltend gemacht, dass im homogenen Lichte nur die blaue Farbe die Büschel erkennen lässt; ferner, dass nach Jamin's Theorie die Büschel nach den Rändern des Gesichtsfeldes hin continuirlich an Stärke zunehmen müssten, während sie im Gegentheil auf einen sehr kleinen centralen Theil beschränkt sind; schliesslich, dass ihr Centrum im Achsenpunkte des Auges liegen müsste, während es im Fixationspunkte liegt. Die von Helmholtz gegebene, sehr befriedigende Erklärung ist schon an anderer Stelle besprochen worden (451).

Die von Jamin specieller ausgeführte Theorie ist überdies schon von Erlach[2]) angedeutet.

[1]) C. R. XXVI, 197. — [2]) Pogg. Ann. LXX, 403.

491. Polarisation durch Ausstrahlung.

Die Polarisation durch Ausstrahlung erklärt sich ebenfalls aus den Fresnel'schen Gesetzen. Einige Versuche sind schon von Arago[1]) angestellt. Das von einem flüssigen oder festen, glühenden Körper schief gegen die Oberfläche ausgestrahlte Licht ist polarisirt wie durch Brechung, d. h. es ist partiell und senkrecht zur Ebene der Ausstrahlung polarisirt. Es kommt dies daher, dass nicht die an der Oberfläche liegenden Molecüle allein ausstrahlen, sondern auch die etwas tiefer liegenden, so dass die Strahlen vor ihrem Austritte aus dem Körper Brechung erleiden.

Das von einem glühenden Gase kommende Licht ist niemals polarisirt. Man führt diese Thatsache auf die geringe brechende Kraft der Gase zurück.

Der Polarisationszustand des von einem Körper ausgesendeten Lichtes gestattet demnach einen Schluss auf die Art des Austrittes und auf den Zustand des Körpers. So zeigt das Licht des Mondes den der Reflexion entsprechenden Polarisationszustand, es ist in der Ebene polarisirt, welche durch Sonne, Mond und Beobachter geht. Man kann hieraus schliessen, dass das vom Monde kommende Licht reflectirtes Licht ist.

Das Licht der Sonne zeigt keine Polarisation, und Arago hat hieraus geschlossen, dass dasselbe von glühenden Gasen herrühre.

492. Polarisation durch Diffusion.

Ueber die Polarisation durch Diffusion hat Arago einige Experimente angestellt. Provostaye und Desains[2]) nahmen die Experimente wieder auf, jedoch, wie Arago, ohne jeden theoretischen Gesichtspunkt.

Arago machte einen Versuch mit vollkommen geschliffenem Porzellan: indem er die diffus reflectirten Strahlen mittelst eines Polariskopes untersuchte, fand er dieselben senkrecht zur Diffusionsebene polarisirt. Hingegen fanden Provostaye und Desains, dass, wenn das Licht senkrecht auf die Porzellanplatte fällt, das diffus reflectirte Licht in der Diffusionsebene polarisirt sei. Bei wachsendem Incidenzwinkel nahm die Polarisation ab, verschwand bei einem gewissen Incidenzwinkel und zeigte dann zunehmende Polarisation senkrecht zur Diffusionsebene.

Dieser Versuch ist dadurch complicirt, dass man es gleichzeitig mit verschiedenen Gattungen zerstreuten Lichtes zu thun hat: mit regelmässig reflectirtem Lichte, diffundirtem Lichte und Fluorescenzlichte.

Provostaye und Desains experimentirten auch mit Russ. Hier zeigte sich das zerstreute Licht als in der Diffusionsebene polarisirt.

---

[1]) *OEuvres complètes*, VII, 403. — [2]) *Ann. de chim. et de phys.* (3), XXXIV.

Eine weitere Reihe untersuchter Substanzen war: Papier, Schwefel, Zinnober, Bleiweiss u. s. w. Bei diesen Substanzen dringt das Licht bis zu einer gewissen Tiefe ein, um modificirt wieder an die Oberfläche zurückzukehren. War das einfallende Licht natürliches Licht, so war das zerstreute Licht ebenfalls natürliches Licht. War das einfallende Licht polarisirt, so erwies sich das zerstreute Licht als mehr oder weniger depolarisirt.

Dieselben Beobachtungen wurden auch an den Wärmestrahlen gemacht.

493. Fortsetzung. Farben trüber Medien.

Die eben besprochenen Erscheinungen stehen im Zusammenhange mit den Farben trüber Medien [1]).

Unter einem trüben Medium versteht man einen Körper, dessen Durchsichtigkeit durch die Theilchen eines anderen Körpers, die in dem ersteren möglichst fein vertheilt sind, geschwächt ist. Beispielsweise lässt sich ein vollkommen trübes Medium stets in bequemer Weise herstellen, wenn man die Lösung eines Harzes oder ätherischen Oeles in Alkohol tropfenweise in Wasser giesst, das durch Umschütteln oder Umrühren in Bewegung gesetzt wird.

Eine solche durch Harztheilchen getrübte Flüssigkeit zeigt auf dunklem Grunde einen blauen Farbenton. Die Färbung ist um so weisslicher, je grösser die Harztheilchen ausgeschieden werden.

E. Brücke nimmt zur Darstellung trüber Medien, welche die Eigenschaften derselben in vollkommener Weise zeigen, 1 g des feinsten und möglichst farblosen Mastix auf 87 g Weingeist. Tyndall liess durch Huxley eine derartige Flüssigkeit mikroskopisch untersuchen; die Theilchen waren jedoch nicht sichtbar, obwohl sie sich bei einem Durchmesser von 0·00025 mm der Beobachtung nicht hätten entziehen können.

Ein trübes Medium zeigt im durchgehenden Lichte eine gelbliche Farbe, welche bei stärkerer Trübung in Orange und Roth übergeht [2]).

Zu weiteren Untersuchungen erscheint es geeignet, ein Bündel directer Sonnenstrahlen im verdunkelten Zimmer auf das trübe Medium fallen zu lassen. Die spectroskopische Untersuchung lehrt, dass im reflectirten Lichte alle Farben enthalten sind, aber Blau überwiegend, und dass im durchgelassenen Lichte das Spectrum an seinem brechbareren Ende geschwächt ist.

Es ergiebt sich also, dass an den Theilchen eines trüben Mediums das Licht von kürzerer Wellenlänge verhältnissmässig stärker reflectirt wird, als das von grösserer Wellenlänge.

---

[1]) J. Tyndall, Die Wärme. — Brücke, Sitzungsber. d. math.-nat. Classe, IX, Wien. — J. Dechant, Programm des k. k. St. Gymn. in Bozen, 1877. — [2]) Göthe, Farbenlehre, §. 147.

Ueberdies erscheint die regelmässige Fortpflanzung des Lichtes in den trüben Medien nicht gestört: die Gegenstände erscheinen uns nämlich, durch ein solches Medium angesehen, mit vollkommen scharfen Rändern.

Die interessanteste Eigenschaft der trüben Medien bilden die eigenthümlichen Polarisationsverhältnisse des zurückgeworfenen Lichtes. Geht ein unpolarisirtes Lichtbündel horizontal durch das trübe Medium, so erweist sich das reflectirte Licht als vollständig polarisirt, wenn man gegen das Lichtbündel in einer auf der Richtung der einfallenden Strahlen senkrechten Ebene hinsieht, und zwar fällt die Polarisationsebene mit der durch den directen und den reflectirten Strahl bestimmten Ebene zusammen. In einer anderen Richtung gegen das Lichtbündel gesehen, ist die Polarisation eine partielle und um so geringer, je mehr sich der Winkel zwischen der Richtung der Strahlen und der Richtung des Sehens 0^0 oder 180^0 nähert; aber stets fällt die Polarisationsebene mit der Diffusionsebene zusammen.

Lässt man polarisirtes Licht einfallen und liegt die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes vertical, so wird in der auf dem Strahle senkrechten Ebene das Licht am meisten vertical reflectirt, nach anderen Richtungen aber um so weniger, je mehr man sich der horizontalen nähert; horizontal, senkrecht zum Strahle hingesehen, verschwindet das reflectirte Licht gänzlich. Blickt man schief gegen das Lichtbündel, so nimmt die Lichtstärke zu in dem Maasse, als man sich der Richtung der einfallenden Strahlen nähert. Das Licht ist in jeder Richtung total polarisirt. Diese Verhältnisse lassen sich kurz in das folgende, höchst interessante Gesetz zusammenfassen: Nach irgend einer Richtung hin pflanzen sich die Schwingungen mit einer Amplitude fort, welche proportional ist der senkrechten Componente der Amplitude des einfallenden Strahles in Bezug auf jene Richtung [1]).

Die beschriebenen Eigenschaften zeigen auch die weiteren trüben Medien, von welchen wir hier erwähnen wollen die Seifenlösungen (Trübung durch Niederschlag des sauren Salzes), filtrirte Milch (Butterkügelchen), feiner und trockener Rauch [2]), Tyndall's actinische Wolken, Milch- oder Beinglas, die glühenden Kohlentheilchen in einer leuchtenden Flamme (Soret).

Farbenerscheinungen und Polarisation im Sonnenlichte, welches eine mit Wasserdampf gefüllte Atmosphäre durchstrahlt, wurden schon von Haidinger [3]) beobachtet.

Zur Hervorbringung der actinischen Wolken verwendete Tyndall verschiedene Substanzen. Zu einer einfachen Wiederholung der Versuche ist besonders Schwefelkohlenstoff passend. Man gebe einige Tropfen

---

[1]) A. Lallemand, J. d. Ph. V. — *Ann. de chim.* (5), VIII. — [2]) J. Kober, Pogg. Ann. CILIV. — [3]) Pogg. Ann. LXVIII.

dieser Flüssigkeit in einen geräumigen Stehkolben und schliesse denselben mit einem Korke. Concentrirt man nun ein Bündel Sonnenstrahlen mit einer stark convexen Linse, so zeigt sich bald ein blauer Schimmer. Die Polarisation ist rechtwinkelig zur Achse eine vollständige. Nach einiger Zeit wird der Lichtkegel weisslicher, indem offenbar ausser der Abscheidung neuer Theilchen die vorhandenen durch Aneinanderlagerung an Grösse zunehmen; sie werden bald so gross, dass sie mit freiem Auge wahrgenommen werden können. Das Licht ist jetzt senkrecht zum einfallenden Strahle nicht mehr vollständig in der Einfallsebene polarisirt. Stellt man den Nicol auf Auslöschung, so bleibt ein Rest von schönem Blau. Die blauen Lichtwellen hören also bei wachsender Grösse der Theilchen am ersten auf, das oben ausgesprochene Polarisationsgesetz strenge zu befolgen. Wenn die reflectirenden Theilchen noch mehr wachsen, werden die Abweichungen von jenem Gesetze so beträchtlich, dass sogar die entgegengesetzte Polarisation eintreten kann. So beobachtete Tyndall[1]) bei Bündeln paralleler Sonnenstrahlen, welche in die, schwebende Staubtheilchen enthaltende Luft seines Laboratoriums drangen, senkrecht gegen die Richtung der eindringenden Strahlen polarisirtes Licht; drehte er dann den mit einem Gypsblättchen versehene Nicol so, dass der Winkel der Beobachtungsrichtung mit der Richtung der Sonnenstrahlen allmälig schiefer wurde, so nahm die Stärke der Polarisation allmälig ab, bis bei einer bestimmten Schiefe dieselbe verschwand und darauf mit einer plötzlich um 90^0 gedrehten Polarisationsebene wieder allmälig wuchs. Das Vorhandensein suspendirter Staubtheilchen war aber nothwendige Bedingung. Eben solche Abweichungen zeigten die actinischen Wolken, wenn sie durch Vergrösserung der Theilchen weiss geworden waren. Das Polarisationsmaximum trat dann erst bei mehr oder weniger schiefer Neigung gegen die einfallenden Strahlen ein, und die Lage der neutralen Punkte wechselte mit der Natur des Dampfes. Ebenso verhielten sich Rauchwolken.

Die atmosphärische Luft zeigt Erscheinungen, welche jenen der trüben Medien ähnlich sind. Die Luft erscheint uns blau, sobald der Hintergrund dunkel ist. Die Färbung der Luft vor dunklen Bergen zeigt vollkommene Aehnlichkeit mit einem durch Harz getrübten Medium, das man in verschiedener Dicke vor dunklem Hintergrunde betrachtet. Das durch die Luft hindurchgehende Sonnenlicht zeigt zwar bei hoch über dem Horizonte stehender Sonne noch kaum einen gelblichen Farbenton; bei auf- und untergehender Sonne aber wird das durchgelassene Licht gelb, ja orange bis roth. Beobachten wir an den dunklen Bergen nur geringen Duft, so haben wir auch keine gesättigte Abendbeleuchtung zu erwarten. Das blaue Licht der Luft mittelst des Spectroskopes untersucht, giebt, wie das reflectirte Licht der trüben Medien, ein vollständiges Spectrum, nur ist der mehr brechbare Theil darin überwiegend. Ebenso

[1]) *Ann. de chim.* (4), XVI.

giebt die untergehende Sonne ein Spectrum, welches sich immer mehr gegen das rothe Ende zusammenzieht. Auch die Luft lässt das directe Licht ungestört hindurchgehen, so dass wir durch dieselbe die Gegenstände mit deutlichen Umrissen wahrnehmen. Die Analogie wird durch die Betrachtung der von Arago entdeckten Polarisation der Luft noch vollständiger. Das von der Luft kommende Licht erweist sich als polarisirt und zwar überwiegt das in der Einfallsebene polarisirte Licht. Die Polarisation ist am grössten in der auf der Richtung der Sonnenstrahlen senkrecht stehenden Ebene; sie ist aber auch hier keine vollständige. In dem durch die Sonne gehenden Verticalkreise zeigen sich neutrale Punkte. In gleicher Weise zeigt die Luft vor Bergen Polarisation, am stärksten wieder in der Richtung senkrecht zu den Sonnenstrahlen. Blickt man mit Tyndall durch einen Nicol gegen einen in Duft gehüllten Berg, der in einer auf den Sonnenstrahlen senkrechten Richtung liegt, so wird man durch Drehung des Nicols das Licht des Duftes auszulöschen vermögen und die Gegenstände schärfer und in ihren eigentlichen Farben wahrnehmen können. Es scheint nach alledem, dass die Atmosphäre den trüben Medien beizuzählen sei.

Aehnliche Polarisationserscheinungen wurden auch am Wasser beobachtet. Soret[1]) tauchte ein Rohr, welches an der einen Seite mit einer Glasplatte verschlossen und an der anderen mit einem Nicol versehen war, senkrecht gegen die Sonnenstrahlen in den Genfer See. Bei ruhigem Wetter zeigte sich das aus dem Wasser in das Rohr dringende Licht in einer Ebene deutlich wahrnehmbar polarisirt, welche durch die Röhrenachse und die Sonne ging. Bei geänderter Neigung der Röhre wurde die Polarisation schwächer. Wurden in Wasser feine Niederschläge erzeugt, so traten die Erscheinungen deutlicher hervor. Lallemand[2]) liess die Strahlen durch eine mit reinem Wasser, Salpetersäure, Salzsäure, Ammoniak oder Collodium gefüllte Glasröhre treten und nahm im seitlich diffundirten Lichte dieselben charakteristischen Polarisationserscheinungen wahr, wie bei den trüben Medien. Zu ähnlichen Resultaten gelangte Tyndall[3]). Soret[4]) fand ferner, dass Quarz, Kalkspath, Steinsalz, Diamant, Alaun und Eis keine innere Diffusion zeigen, oder dass dieselbe durch meist leicht nachweisbare Fehler im Inneren der Krystalle hervorgebracht wird. Chemische Untersuchungen in Bezug auf die innere Diffusion des Wassers rühren von W. Spring[5]) her.

Die besprochenen Erscheinungen trüber Medien stehen in engem Zusammenhange mit den im vorhergehenden Paragraphen besprochenen Erscheinungen der äusseren Diffusion, wie die charakteristischen Polarisationserscheinungen beweisen. Lässt man ein Bündel paralleler polarisirter Strahlen auf eine berusste Platte fallen, so zeigt das von der

---

[1]) C. R. LXVIII, LXIX, LXX. — *Ann. de chim.* (4), XX. — [2]) C. R. LXIX. — [3]) Dingler's J. CXCIX. — *Arch. sc. phys.* (2), XXXIX. — [4]) Phil. mag. (4), XLVII. — C. R. LXXVIII. — [5]) *Bull. Ac. Belg.* (3), V.

getroffenen Stelle der Platte zerstreute Licht die charakteristischen Polarisationserscheinungen trüber Medien, d. h., die Fresnel'sche Anschauung über die Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes vorausgesetzt, pflanzt sich in jeder Diffusionsrichtung eine Amplitude fort, welche der Projection der einfallenden Amplitude auf eine zur Diffusionsrichtung senkrechte Ebene proportional ist [1]). Bei anderen Substanzen sind die Polarisationsverhältnisse complicirter, was nach Lallemand daher rührt, dass sich zwei andere Gattungen diffusen Lichtes beimengen: spiegelnd reflectirtes Licht und Fluorescenzlicht, welch letzteres entweder gleiche oder grössere, nie aber kleinere Wellenlänge hat als das einfallende Licht und stets unpolarisirt ist.

Die Polarisationserscheinungen der inneren und äusseren Diffusion entsprechen in keiner Weise den Reflexionsgesetzen. In der That hat schon Brücke darauf aufmerksam gemacht, dass diese Gesetze für excessiv kleine Theilchen ihre Gültigkeit verlieren. Zur Erklärung der Farbenerscheinungen hat Brücke die Thatsache in Anspruch genommen, dass bei jeder Reflexion das brechbarere Licht mehr reflectirt wird, und ferner einen zweiten Grund, der auch schon von Newton zur Erklärung des Himmelsblau verwendet wurde, die Interferenz zwischen dem an der Aussenfläche und dem an der Innenseite der Theilchen reflectirten Lichte. Clausius [2]) fasst die blaue Farbe des Himmels und die Morgen- und Abendröthe ebenfalls als Interferenzfarben auf, jedoch mit dem Unterschiede, dass die schwebenden Wassertheilchen Bläschenform haben sollen. Letzteres ist erwiesenermaassen nicht der Fall. Dass die schwebenden Wassertheilchen massiv sind, folgt direct aus der Betrachtung dieser Theilchen unter dem Mikroskope [3]) und aus dem folgenden Versuche [4]). Erzeugt man Nebel künstlich in einem Glasrecipienten, in welchem der Druck beliebig verändert werden kann, und leitet man Lichtstrahlen so durch den Recipienten, dass durch die schwebenden Theilchen Beugungsringe entstehen, so müssten die Beugungsringe, wenn die Wassertheilchen Bläschen wären, bei Druckvermehrung sich erweitern und bei Druckverminderung sich zusammenziehen. Die Radien der Ringe bleiben jedoch im Gegentheil constant. Brewster [5]) ist der Meinung, dass das Licht des blauen Himmels polarisirt werde durch Reflexion an den Lufttheilchen, ebenso Lallemand [6]), welcher direct die Luftmolecüle als reflectirende Theilchen in Anspruch nimmt. Gegen diese Annahme scheint die Beobachtung an nicht fluorescirenden Krystallen zu sprechen, welche kein Licht diffundiren. Vaillant und Hagenbach hinwieder erklären die blaue Farbe der Luft durch die Annahme, die Reflexion des Lichtes geschehe an ungleich dichten Luftschichten, welche durch die ungleiche Temperatur in Folge aufsteigender Luftströme hervorgebracht werden,

[1]) Soret, l. c., Lallemand, C. R. LXXVIII, LXXIX; *Ann. de chim.* (5), VIII. — [2]) Pogg. Ann. LXXVI, LXXXVIII. — [3]) Assmann, Deutsche meteorologische Zeitschr. LXXXV. — [4]) Kiessling, ibid. LXXXIV. — [5]) Phil. Mag. XXXIII. — [6]) C. R. LXXV.

indem das Blau gemäss der Fresnel'schen Intensitätsformel ins Uebergewicht gelangen soll. Die Erscheinungen der Scintillation und insbesondere die terrestrischen Scintillationserscheinungen, welche sich im Fernrohre bei eingeschobenem Oculare zeigen, wenn das Instrument auf ein entferntes Heliotropenlicht gerichtet ist, lassen es nicht als unwahrscheinlich erscheinen, dass diese Reflexion mit eine Ursache der blauen Färbung ist.

Die trübenden Theilchen müssen wir uns als klein vorstellen im Vergleiche mit einer Lichtwellenlänge. Die Voraussetzungen, auf welchen die Ableitungen der Reflexionsformeln beruhen, treffen also in dem betrachteten Falle nicht mehr zu. Um so interessanter ist es, in diesem Falle Aufschluss über die Art der Reflexion zu erhalten. Als erstes Gesetz ergab sich, dass die kurzwelligen Strahlen mehr reflectirt werden als die langwelligen und noch interessanter sind die oben formulirten Gesetze der Polarisation.

Das Verhalten des Lichtes, welches innere Diffusion erfahren hat, spricht ausserordentlich für die Annahme Fresnel's, nach welcher die Lichtschwingungen senkrecht zur Polarisationsebene erfolgen. Lallemand hat deshalb eine experimentelle Verification durchgeführt.

Als bequemste Anordnung der Versuche stellte sich hierbei jene heraus, bei welcher das einfallende Lichtbündel horizontal war, und nur das in der Horizontalebene diffundirte Licht beobachtet wurde. Die erleuchtete Substanz befand sich in einer dünnwandigen Glaskugel, nach deren Mittelpunkt die Beobachtungsapparate gerichtet waren.

Es sei das einfallende Licht vollständig polarisirt, ferner seien ω und φ der Winkel der Schwingungsebene mit der Horizontale und jener des diffundirten Strahles mit dem einfallenden. Die Stärke des senkrecht schwingenden Lichtes ist dann $\sin^2 \omega$, die des horizontal schwingenden $\cos^2 \omega$, wenn die des einfallenden gleich 1 ist. Der erste Theil pflanzt sich in der Horizontalebene unverändert fort; der zweite hingegen nur mit dem auf die Richtung φ entfallenden senkrechten Antheil, d. i. $\cos^2 \omega \cos^2 \varphi$. Die gesammte Intensität des nach einer Richtung reflectirten Lichtes ist daher proportional

$$\sin^2 \omega + \cos^2 \omega \cos^2 \varphi = 1 - \cos^2 \omega \sin^2 \varphi.$$

Die beiden auf einander senkrechten Componenten des nach irgend einer Richtung fortschreitenden Lichtes setzen sich stets zu einer geradlinigen Schwingung zusammen, das reflectirte Licht ist total polarisirt. Die Neigung der Schwingungsrichtung gegen die Horizontale aber ist verschieden und bestimmt durch

$$\tan \omega' = \frac{\sin \omega}{\cos \omega \cos \varphi} = \frac{\tan \omega}{\cos \varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Lallemand's Untersuchung des diffundirten Lichtes mittelst einer Soleil'schen Doppelplatte und eines Nicols bestätigte diese Formel mit ziemlicher Genauigkeit.

Ebenso verhält es sich in Bezug auf die äussere Diffusion. Lallemand hat zahlreiche Messungen an dem von berussten Flächen diffundirten Lichte angestellt.

Die experimentelle Prüfung der Formel (1) an berussten Flächen wies darauf hin, dass dem unter dem Winkel φ diffundirten Lichte, abgesehen von schwachem Fluorescenzlichte, auch eine Menge regelmässig von den Rauhheiten der Russtheilchen unter dem Winkel $\frac{\varphi}{2}$ reflectirten Lichtes beigemengt sei. Ein weit grösserer Einfluss solchen Lichtes gab sich zu erkennen, wenn statt des Russes andere schwarze Körper benutzt wurden. In zwei Fällen liess sich das regelmässig reflectirte Licht von dem diffundirten trennen: 1) für $\varphi = 90^0$ und $\omega = 0^0$, 2) wenn φ der doppelte Polarisationswinkel der reflectirenden Schicht und $\omega = 0$ waren; im ersten Falle konnte nur reflectirtes, im zweiten nur diffundirtes Licht beobachtet werden.

494. Vollständige Theorie der Farbenringe.

Die genauere Kenntniss der Gesetze der Zurückwerfung und Brechung des Lichtes gestattet uns nun die Theorie der Farbenringe zu vervollständigen, wie dies zuerst Airy[1]) gethan hat.

Wir wollen zunächst den Fall der reflectirten Ringe unter der Voraussetzung behandeln, dass das einfallende Licht in der Einfallsebene polarisirt sei, und nehmen an, die Lamelle sei das optisch dünnere Mittel. Wenn das einfallende Bündel dick ist, so besteht das in irgend einer Richtung reflectirte Bündel aus Strahlen, welche 1, 3, 5 . . . Reflexionen erfahren haben, und da die Intensitäten dieser Strahlen mit ihrer Ordnungszahl rasch abnehmen, kann man ihre Zahl als unendlich gross in die Rechnung einführen.

Wird die einfallende Vibrationsbewegung durch $\sin 2\pi \frac{t}{T}$ dargestellt, so ist die Vibrationsbewegung des an der ersten Begrenzungsfläche reflectirten Strahles darzustellen durch $a \sin 2\pi \frac{t}{T}$. Bezeichnet man mit e die Dicke der Lamelle, und mit i den Incidenzwinkel, so sieht man, dass die Vibrationsbewegung des an der zweiten Fläche reflectirten Strahles, dessen Wegdifferenz gegen den ersten gleich $2e \cos i$ ist, auszudrücken ist durch

$$A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2e \cos i}{\lambda}\right).$$

Die Amplitude A kann ersetzt werden durch das Product bcd, wenn die Amplitude des einfallenden Strahles sich bei der ersten Brechung

---

1) *Phil. Mag.* (2), X, 141; (3), II, 120.

mit b, bei der Reflexion mit c und bei der zweiten Brechung mit d multiplicirt. Die Vibrationsbewegung des zweiten reflectirten Strahles hat sonach zum Ausdrucke:

$$b\,c\,d\,sin\,2\,\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{2\,e\,cos\,i}{\lambda}\right).$$

Der dritte Strahl des reflectirten Bündels wird einmal aus dem ersten Mittel in das zweite gebrochen, im Inneren der Platte dreimal reflectirt und sodann aus dem zweiten Mittel in das erste gebrochen. Die Amplitude dieses Strahles ist demnach gleich $b\,c^3\,d$. Was seine Wegdifferenz gegen den ersten Strahl betrifft, so beträgt sie zweimal $2\,e\,cos\,i$. Man erhält demnach für die Vibrationsbewegung dieses dritten Strahles den Ausdruck

$$b\,c^3\,d\,sin\,2\,\pi\left(\frac{t}{T}-2\,\frac{2\,e\,cos\,i}{\lambda}\right).$$

Gleicherweise erhält man für den vierten Strahl

$$b\,c^5\,d\,sin\,2\,\pi\left(\frac{t}{T}-3\,\frac{2\,e\,cos\,i}{\lambda}\right),$$

und allgemein für den $(n+1)$ten reflectirten Strahl

$$b\,c^{2n-1}\,d\,sin\,2\,\pi\left(\frac{t}{T}-n\,\frac{2\,e\,cos\,i}{\lambda}\right).$$

Andererseits hat man nach den Formeln Fresnel's, wenn i der Incidenzwinkel in der Lamelle ist,

$$a=-\frac{sin\,(r-i)}{sin\,(r+i)}\qquad c=-a=-\frac{sin\,(i-r)}{sin\,(i+r)}$$

$$b=\frac{2\,sin\,i\,cos\,r}{sin\,(i+r)}\qquad d=\frac{2\,sin\,r\,cos\,i}{sin\,(i+r)}.$$

Folglich erhält man

$$b\,d=\frac{4\,sin\,i\,cos\,i\,sin\,r\,cos\,r}{sin^2\,(i+r)}=\frac{[sin\,(i+r)+sin\,(i-r)]\,[sin\,(i+r)-sin\,(i-r)]}{sin^2\,(i+r)}$$

$$=\frac{sin^2\,(i+r)-sin^2\,(i-r)}{sin^2\,(i+r)}=1-\frac{sin^2\,(i-r)}{sin^2\,(i+r)}=1-c^2.$$

Setzt man

$$2\,\pi\,\frac{t}{T}=x,\quad 2\,\pi\,\frac{2\,e\,cos\,i}{\lambda}=y,$$

so nehmen die Ausdrücke der Vibrationsbewegungen die folgenden Formen an: für den ersten reflectirten Strahl $-c\,sin\,x$; für den zweiten $c\,(1-c^2)\,sin\,(x-y)$; für den dritten $c^3\,(1-c^2)\,sin\,(x-2\,y)$; und allgemein für den $(n+1)$ten Strahl $c^{2n-1}\,(1-c^2)\,sin\,(x-n\,y)$.

Setzt man für den Sinus seinen imaginären Ausdruck, so erhält man, mit Uebergehung des ersten Strahles, der Reihe nach

$$\frac{c(1-c^2)}{2\sqrt{-1}}\left[e^{(x-y)\sqrt{-1}}-e^{-(x-y)\sqrt{-1}}\right],$$

$$\frac{c^3(1-c^2)}{2\sqrt{-1}}\left[e^{(x-2y)\sqrt{-1}}-e^{-(x-2y)\sqrt{-1}}\right],$$

und für den $(n+1)$ten reflectirten Strahl

$$\frac{c^{2n-1}(1-c^2)}{2\sqrt{-1}}\left[e^{(x-ny)\sqrt{-1}}-e^{-(x-ny)\sqrt{-1}}\right].$$

Zerlegt man diese Reihe in zwei Reihen, so dass die erste dem allgemeinen Gliede

$$\frac{c^{2n-1}(1-c^2)}{2\sqrt{-1}}e^{(x-ny)\sqrt{-1}}$$

entspricht, und die zweite dem allgemeinen Gliede

$$-\frac{c^{2n-1}(1-c^2)}{2\sqrt{-1}}e^{-(x-ny)\sqrt{-1}},$$

so hat man zwei geometrische Reihen, deren constante Factoren

$$c^2 e^{-y\sqrt{-1}} \text{ und } c^2 e^{y\sqrt{-1}}$$

sind. Man erhält als Summe der n ersten Glieder der ersten Reihe:

$$\frac{c(1-c^2)}{2\sqrt{-1}}\,\frac{c^{2n}\; e^{[x-(n+1)y]\sqrt{-1}}-e^{(x-y)\sqrt{-1}}}{c^2\, e^{-y\sqrt{-1}}-1}$$

und ebenso für die zweite Reihe:

$$-\frac{c(1-c^2)}{2\sqrt{-1}}\,\frac{c^{2n}\; e^{-[x-(n+1)y]\sqrt{-1}}-e^{-(x-y)\sqrt{-1}}}{c^2\, e^{y\sqrt{-1}}-1}.$$

Die Summe der beiden Reihen ist demnach

$$\frac{\frac{c(1-c^2)}{2\sqrt{-1}}}{1-2c^2\cos y+c^4}\left\{\begin{array}{l} c^{2(n+1)}\left[e^{(x-ny)\sqrt{-1}}-e^{-(x-ny)\sqrt{-1}}\right] \\ -c^{2n}\left[e^{[x-(n+1)y]\sqrt{-1}}-e^{-[x-(n+1)y]\sqrt{-1}}\right] \\ -c^2\left(e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}\right)+e^{(x-y)\sqrt{-1}}-e^{-(x-y)\sqrt{-1}} \end{array}\right\}.$$

Im Nenner des letzten Ausdruckes wurde das Glied $c^2\left(e^{y\sqrt{-1}}+e^{-y\sqrt{-1}}\right)$ durch seinen Werth $2c^2\cos y$ ersetzt.

Ersetzt man auch im Zähler die imaginären Ausdrücke durch ihre trigonometrischen Werthe, so erhält man für die Summe der Vibrationsbewegungen der reflectirten Strahlen, mit Ausnahme des ersten Strahles,

$$c(1-c^2)\frac{c^{2(n+1)}\sin(x-ny)-c^{2n}\sin[x-(n+1)y]-c^2\sin x+\sin(x-y)}{1-2c^2\cos y+c^4}.$$

Dieser Ausdruck ist reell. Lässt man n unendlich wachsen, so geht er über in

$$c(1-c^2)\,\frac{\sin(x-y)-c^2\sin x}{1-2c^2\cos y+c^4}.$$

Um nun die gesammte Vibrationsbewegung des reflectirten Strahles zu erhalten, muss man diesem Grenzwerthe das Glied $-c \sin x$ beifügen, welches die Bewegung des ersten reflectirten Strahles darstellt und bei der vorgenommenen Summation unberücksichtigt geblieben ist. Man erhält hierdurch als definitiven Ausdruck der reflectirten Vibrationsbewegung:

$$c(1-c^2)\frac{\sin(x-y)-c^2\sin x}{1-2c^2\cos y+c^4}-c\sin x.$$

Um die Intensität der reflectirten Bewegung zu erhalten, muss man diesen Ausdruck auf die Form

$$A\sin 2\pi\left(\frac{t-\theta}{T}\right)$$

bringen, wo A^2 die Intensität ist; man kann jedoch den Ausdruck auch auf die Form

$$a\sin 2\pi\frac{t}{T}+b\cos 2\pi\frac{t}{T}$$

bringen, und dann ist a^2+b^2 die Intensität. Wir wählen die letztere Form, und erhalten für die Vibrationsbewegung des reflectirten Lichtes:

$$\frac{c(1-c^2)\sin(x-y)-c^3\sin x+2c^3\sin x\cos y-c\sin x}{1-2c^2\cos y+c^4}$$

$$=c\frac{(1-c^2)\sin(x-y)-(1+c^2)\sin x+2c^2\sin x\cos y}{1-2c^2\cos y+c^4}$$

$$=c\frac{(1+c^2)(\cos y-1)\sin x-(1-c^2)\sin y\cos x}{1-2c^2\cos y+c^4},$$

woraus sich für die Intensität des reflectirten Lichtes ergiebt

$$J=\frac{c^2(1+c^2)^2(\cos y-1)^2+c^2(1-c^2)^2\sin^2 y}{(1-2c^2\cos y+c^4)^2}$$

$$=c^2\frac{2(1+c^4)+4c^2\cos^2 y-2(1+c^2)^2\cos y}{(1-2c^2\cos y+c^4)^2}$$

$$=2c^2\frac{(1+c^4)(1-\cos y)-2c^2(1-\cos y)\cos y}{(1-2c^2\cos y+c^4)^2}$$

$$=2c^2\frac{(1-2c^2\cos y+c^4)(1-\cos y)}{(1-2c^2\cos y+c^4)^2},$$

und schliesslich

$$J=\frac{2c^2(1-\cos y)}{1-2c^2\cos y+c^4}.$$

Ersetzt man y durch seinen Werth $2\pi\frac{2e\cos i}{\lambda}$, so gelangt man zu dem definitiven Ausdrucke

$$J = \frac{4\,c^2 \sin^2 \pi \dfrac{2\,e \cos i}{\lambda}}{(1 - c^2)^2 + 4\,c^2 \sin^2 \pi \dfrac{2\,e \cos i}{\lambda}}.$$

Dies ist die Intensität der reflectirten Ringe, wenn das einfallende Licht in der Einfallsebene polarisirt ist. Die Intensität der durchgelassenen Ringe ergiebt sich durch Subtraction der Intensität der reflectirten Ringe von der Einheit. Man erhält:

$$T = \frac{(1 - c^2)^2}{(1 - c^2)^2 + 4\,c^2 \sin^2 \pi \dfrac{2\,e \cos i}{\lambda}}.$$

Die in den beiden Ausdrücken vorkommende Grösse c^2 ist gleich $\frac{\sin^2 (i - r)}{\sin^2 (i + r)}$.

Ist das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, so gelangt man zu denselben Formeln, nur nimmt die Grösse c^2 einen anderen Werth an:

$$c^2 = \frac{\tang^2 (i - r)}{\tang^2 (i + r)}.$$

495. Maxima und Minima.

Betrachten wir zunächst die zurückgeworfenen Ringe. In den beiden Fällen, wo das Licht in der Einfallsebene oder senkrecht zu derselben polarisirt ist, wird die Intensität J der Null gleich, wenn

$$\sin^2 \pi \frac{2\,e \cos i}{\lambda} = 0,$$

oder wenn

$$2\,e \cos i = 2\,n \frac{\lambda}{2}.$$

Es sind dies dieselben Bedingungen, zu welchen auch die elementare Theorie führt, und man sieht, dass die Minima der zurückgeworfenen Ringe in den beiden betrachteten Fällen vollständig Null sind oder dass die dunklen Ringe vollständig schwarz erscheinen müssen, in Uebereinstimmung mit dem Experimente.

Der Ausdruck für die Intensität der reflectirten Ringe kann auch geschrieben werden:

$$J = \frac{4\,c^2}{\dfrac{(1 - c^2)^2}{\sin^2 \pi \dfrac{2\,e \cos i}{\lambda}} + 4\,c^2};$$

demnach wird die Intensität gleichzeitig mit $sin^2 \pi \frac{2 e \cos i}{\lambda}$ zu einem Maximum, und die zurückgeworfenen Ringe haben in den beiden betrachteten Fällen ihre grössten Intensitäten, wenn

$$2 e \cos i = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Diese grössten Intensitäten selbst sind

$$\frac{4c^2}{(1 - c^2)^2 + 4c^2} = \frac{4c^2}{(1 + c^2)^2}.$$

Da die Intensitäten der durchgelassenen Ringe mit jenen der zurückgeworfenen die constante Summe eins geben müssen, so folgt, dass die Maxima der Intensitäten der durchgelassenen Ringe gleichzeitig mit den Minimis der Intensitäten der zurückgeworfenen Ringe eintreten, und die Minima der durchgelassenen Ringe gleichzeitig mit den Maximis der zurückgeworfenen. Die Maxima der durchgelassenen Ringe sind demnach der Einheit gleich, und die Minima sind gleich $\frac{(1 - c^2)^2}{(1 + c^2)^2}$.

Man sieht, dass die Minima der durchgelassenen Ringe niemals gleich Null werden, und dass folglich diese Ringe niemals vollkommen schwarz erscheinen können; ist c sehr klein, wie bei nahe normaler Incidenz, so unterscheiden sich die Minima wenig von den Maximis.

Ist das Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, so hat man $c^2 = \frac{tang^2 (i - r)}{tang^2 (i + r)}$. Wird in diesem Falle der Einfallswinkel gleich dem Winkel der totalen Polarisation, so hat man $i + r = \frac{\pi}{2}$, $c = 0$, $J = 0$, $T = 1$. Ist also das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, und ist der Einfallswinkel gleich dem Winkel der totalen Polarisation, so verschwinden die zurückgeworfenen Ringe vollständig und die Intensität der durchgelassenen Ringe wird für alle Ringe gleich eins, d. h. die durchgelassenen Ringe machen einer gleichmässigen Helligkeit Platz.

496. Abhängigkeit vom Polarisationsazimuthe des einfallenden Lichtes.

Der Fall, wo das einfallende Licht in einer beliebigen Ebene polarisirt ist, führt sich leicht auf die beiden schon behandelten Fälle zurück. Ist α der Winkel der Polarisationsebene des einfallenden Strahles mit der Einfallsebene, und nehmen wir die Intensität des einfallenden Strahles zur Einheit, so kann dieser Strahl in zwei, parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Strahlen zerlegt werden, deren Amplituden

beziehungsweise $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ sind. Wendet man auf jede dieser Composanten die oben abgeleiteten Formeln an, so erhält man die Intensitäten der beiden zurückgeworfenen und der beiden durchgelassenen Composanten, und erhält ferner die Intensität des zurückgeworfenen und des durchgelassenen Strahles, wenn man die Intensitäten der beiden Composanten summirt. So ergiebt sich für die zurückgeworfenen und durchgelassenen Ringe:

$$J = \cos^2\alpha \frac{4\,c^2 \sin^2 \pi \dfrac{2\,e \cos i}{\lambda}}{(1-c^2)^2 + 4\,c^2 \sin^2 \pi \dfrac{2\,e \cos i}{\lambda}}$$

$$+ \sin^2\alpha \frac{4\,c'^2 \sin^2 \pi \dfrac{2\,e \cos i}{\lambda}}{(1-c'^2)^2 + 4\,c'^2 \sin^2 \pi \dfrac{2\,e \cos i}{\lambda}}$$

$$T = \cos^2\alpha \frac{(1-c^2)^2}{(1-c^2)^2 + 4\,c^2 \sin^2 \pi \dfrac{2\,e \cos i}{\lambda}}$$

$$+ \sin^2\alpha \frac{(1-c'^2)^2}{(1-c'^2)^2 + 4\,c'^2 \sin^2 \pi \dfrac{2\,e \cos i}{\lambda}}.$$

In diesen Ausdrücken ist zu setzen:

$$c^2 = \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}, \quad c'^2 = \frac{\operatorname{tang}^2(i-r)}{\operatorname{tang}^2(i+r)}.$$

Man sieht, dass in dem Falle, wo das einfallende Licht in einer beliebigen Ebene polarisirt ist, die Maxima und Minima der reflectirten und der durchgelassenen Ringe unter denselben Bedingungen auftreten wie in den Fällen, wo das einfallende Licht parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist. Die Minima der reflectirten Ringe sind immer noch Null, und die Maxima der reflectirten Ringe sind gleich

$$\frac{4\,c^2 \cos^2\alpha}{(1-c^2)^2} + \frac{4\,c'^2 \sin^2\alpha}{(1+c'^2)^2}.$$

Die Maxima der durchgelassenen Ringe sind gleich eins, und die Minima gleich

$$\frac{(1-c^2)\cos^2\alpha}{(1+c^2)^2} + \frac{(1-c'^2)\sin^2\alpha}{(1+c'^2)}.$$

Man sieht überdies, dass in dem allgemeineren Falle, um welchen es sich jetzt handelt, die Ringe bei keiner Incidenz verschwinden.

497. Die Farbenringe im natürlichen Lichte.

Betrachtet man das natürliche Licht als zusammengesetzt aus zwei incohärenten, rechtwinkelig polarisirten Bündeln, deren Intensitäten gleich $\frac{1}{2}$ sind, so hat man für die parallel der Einfallsebene polarisirte Composante des reflectirten Strahles die Intensität

$$\frac{2\,c^2 \sin^2 \pi \dfrac{2\,e \cos i}{\lambda}}{(1 - c^2)^2 + 4\,c^2 \sin^2 \pi \dfrac{2\,e \cos i}{\lambda}},$$

und für die senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Composante

$$\frac{2\,c'^2 \sin^2 \pi \dfrac{2\,e \cos i}{\lambda}}{(1 - c'^2)^2 + 4\,c'^2 \sin^2 \pi \dfrac{2\,e \cos i}{\lambda}}.$$

Man sieht leicht, dass der reflectirte Strahl wie bei der gewöhnlichen Reflexion des natürlichen Lichtes partiell in der Einfallsebene polarisirt ist. In der That, die Differenz

$$\frac{2\,c^2 \sin^2 \pi \dfrac{2\,e \cos i}{\lambda}}{(1 - c^2)^2 + 4\,c^2 \sin^2 \pi \dfrac{2\,e \cos i}{\lambda}} - \frac{2\,c'^2 \sin^2 \pi \dfrac{2\,e \cos i}{\lambda}}{(1 - c'^2)^2 + 4\,c'^2 \sin^2 \pi \dfrac{2\,e \cos i}{\lambda}}.$$

kann in Form eines Bruches geschrieben werden, dessen Zähler gleich ist

$$\begin{aligned} 2\,c^2 \sin^2 \pi \frac{2\,e \cos i}{\lambda} \left[(1 - c'^2)^2 + 4\,c'^2 \sin^2 \pi \frac{2\,e \cos i}{\lambda}\right] \\ - 2\,c'^2 \sin^2 \pi \frac{2\,e \cos i}{\lambda} \left[(1 - c^2)^2 + 4\,c^2 \sin^2 \pi \frac{2\,e \cos i}{\lambda}\right] \\ = 2 \sin^2 \pi \frac{2\,e \cos i}{\lambda} \left[c^2 (1 - c'^2)^2 - c'^2 (1 - c^2)^2\right]; \end{aligned}$$

da c^2 grösser ist als c'^2, und da jede dieser Grössen kleiner ist als eins, ist dieser Ausdruck positiv, und folglich ist die Intensität des reflectirten Lichtes grösser für die in der Einfallsebene polarisirte Composante als für die senkrecht zur Einfallsebene polarisirte.

Für das durchgehende Licht verhält es sich umgekehrt; dasselbe ist partiell senkrecht zur Einfallsebene polarisirt.

Indem Arago das reflectirte oder das durchgehende Licht mittelst eines doppeltbrechenden Prismas auffing, dessen Hauptschnitt mit der

Einfallsebene parallel war, erhielt er zwei Ringsysteme, eines herrührend von den ordentlichen Strahlen, das andere von den ausserordentlichen. War der Incidenzwinkel jener der totalen Polarisation, so verschwanden die Ringe im ausserordentlichen Bilde, oder vielmehr, es verschwand das reflectirte ausserordentliche Bild selbst, während das durchgelassene als ein intensives und gleichmässig helles Feld erschien. Die Erklärung dieser Beobachtung ergiebt sich leicht. Ist das Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt und ist der Incidenzwinkel dem Polarisationswinkel gleich, so wird c'^2 gleich null, und folglich auch die Intensität des reflectirten Strahles gleich null und jene des durchgelassenen gleich eins (459).

498. Erklärung der Experimente Young's.

Die Amplitude der verschiedenen reflectirten Strahlen, aus welchen sich der resultirende reflectirte Strahl zusammensetzt, nimmt sehr rasch an Grösse ab; demnach ist das Zeichen der Summe der Amplituden der reflectirten Strahlen, mit Ausschluss des ersten, gleich dem Zeichen der Amplitude des zweiten reflectirten Strahles. Es sind aber die Amplituden des ersten und des zweiten reflectirten Strahles gleich $-c$ und $c(1-c^2)$. Liegt nun das innere Mittel zwischen zwei gleichen äusseren Mitteln, wie wir bisher vorausgesetzt haben, so sind diese beiden Amplituden stets von entgegengesetztem Zeichen, und folglich wechselt einer der beiden ersten reflectirten Strahlen das Vorzeichen seiner Vibrationsgeschwindigkeit.

Setzen wir zunächst voraus, das innere Mittel sei optisch dünner als die beiden äusseren; ist alsdann das einfallende Licht in der Einfallsebene polarisirt, so ist c gleich $-\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}$ und positiv, der Phasensprung findet an der zweiten Fläche statt; ist hingegen das Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, so ist c gleich $-\frac{\tang(i-r)}{\tang(i+r)}$, der Phasensprung findet an der einen oder anderen Fläche statt, je nachdem $i+r$ kleiner oder grösser als 90 Grade ist, d. i. je nachdem der Incidenzwinkel kleiner oder grösser ist als der Polarisationswinkel.

Ist das innere Mittel das optisch dichtere, und ist das Licht in der Einfallsebene polarisirt, so ist c negativ, der Phasensprung findet an der ersten Fläche statt; ist in demselben Falle das Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, so findet der Phasensprung wieder an der einen oder anderen Fläche statt, je nachdem der Incidenzwinkel grösser oder kleiner ist als der Polarisationswinkel.

Befindet sich also das innere Mittel zwischen zwei gleichen äusseren Mitteln, so erleidet immer einer, und nur einer, der beiden ersten reflectirten Strahlen den Phasensprung. Es folgt, dass in diesem Falle das

Centrum der reflectirten Ringe dunkel und jenes der durchgelassenen hell ist.

Anders verhält es sich, wenn die beiden äusseren Mittel unter einander verschieden sind. Setzen wir zunächst voraus, dass das innere Mittel in Hinsicht auf seine optische Dichte zwischen den beiden äusseren Mitteln stehe. Die beiden Reflexionen gehen dann unter den gleichen Bedingungen vor sich, und die beiden ersten reflectirten Strahlen müssen entweder beide ohne Zeichenwechsel bleiben oder beide das Zeichen wechseln, einer an der ersten und der andere an der zweiten Fläche. In beiden Fällen entsteht durch die Reflexion kein Gangunterschied, und folglich müssen die reflectirten Ringe im Centrum hell, die durchgelassenen dunkel erscheinen. Eben dies hat Young bei seinen Versuchen constatirt (14).

Betrachten wir schliesslich den Fall, wo die beiden äusseren Mittel beide optisch dichter oder beide optisch dünner sind als das innere Mittel, jedoch auch unter einander verschieden.

Nehmen wir beispielsweise an, die beiden äusseren Mittel hätten grössere Brechungsexponenten als die Lamelle und das einfallende Licht sei senkrecht zur Einfallsebene polarisirt. Der an der ersten Fläche reflectirte Strahl hat dann die Amplitude $-\frac{tang\,(r-i)}{tang\,(r+i)}$, und der an der zweiten Fläche reflectirte Strahl die Amplitude $-\frac{tang\,(i-r')}{tang\,(i+r')}$, wenn in beiden Fällen die Amplitude des einfallenden Strahles gleich eins gesetzt wird. Man hat nun $i>r$ und $i>r'$; wenn man überdies $r>r'$ voraussetzt, d. i. wenn man das zweite der äusseren Mittel als das optisch dichtere annimmt, so findet der Zeichenwechsel an einer der beiden Flächen statt, so lange $i+r<90^0$, d. i. so lange der Incidenzwinkel kleiner ist als der Polarisationswinkel im ersten Mittel, das Centrum der reflectirten Ringe ist dunkel. Für $i+r>90^0$ und $i+r'<90^0$, d. i. wenn der Incidenzwinkel zwischen den beiden Polarisationswinkeln liegt, wechseln beide Strahlen das Zeichen, das Centrum der reflectirten Ringe ist hell. Ist endlich $i+r'>90^0$, d. i. überschreitet der Incidenzwinkel den zweiten Polarisationswinkel, so erscheinen die reflectirten Ringe neuerdings im Centrum dunkel.

Statt auf die Lamelle Licht auffallen zu lassen, welches senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist, kann man auch natürliches Licht auffallen lassen und die reflectirten Strahlen mittelst eines doppeltbrechenden Prismas beobachten, dessen Hauptschnitt mit der Einfallsebene parallel liegt: das ausserordentliche Bild wird dann durch das Licht hervorgebracht, welches senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist, und zeigt bei variirender Incidenz die verschiedenen, eben besprochenen Erscheinungen.

Die Ausführung der Experimente ist dadurch erschwert, dass man zwei vollkommen durchsichtige Substanzen von sehr verschiedenen

Brechungsexponenten braucht. Airy hat bei seinen Experimenten Schwefelzink und Schwefeleisen verwendet.

499. Polarisation durch Beugung. Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes.

Die ersten Untersuchungen über die Modificationen, welche das polarisirte Licht durch die Beugung erfährt, rühren von Stokes her[1]). Der Zweck seiner Untersuchungen war die Bestimmung der Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes. Die Erscheinungen der Interferenz geben in dieser Richtung durchaus keinen Aufschluss. Ebenso gelangte zwar Fresnel in seiner Theorie der Doppelbrechung zu dem Resultate, dass die Schwingungen des polarisirten Lichtes senkrecht zur Polarisationsebene vor sich gehen, allein Fresnel's Theorie beruht, wie wir gesehen haben, zum Theile auf Hypothesen (457). Die Arbeiten Poisson's und Cauchy's haben überdies gelehrt, dass man in der Theorie der Doppelbrechung, je nach den Annahmen, welche man in Bezug auf die daselbst vorkommenden Coëfficienten macht, sowohl zu Schwingungen gelangen kann, welche in der Polarisationsebene vor sich gehen als zu Schwingungen, welche auf derselben senkrecht stehen, und dass die beiderseitigen Annahmen gleich zulässig sind. Schliesslich hat Fresnel eine Theorie der Reflexion und Brechung gegeben, deren Resultate durch das Experiment verificirt sind. Diese Theorie wird aus den folgenden Annahmen entwickelt: der Annahme, nach welcher die Lichtschwingungen senkrecht zur Polarisationsebene vor sich gehen, dem Continuitätsprincip, dem Princip der lebendigen Kräfte, und der Annahme, dass die Elasticität des Aethers in allen Körpern gleich, hingegen die Dichte des Aethers dem Quadrate des auf den leeren Raum bezogenen Brechungsexponenten proportional ist. Die letztere Hypothese wurde später durch Fizeau verificirt. Seine Experimente zeigten, dass die Geschwindigkeit des Aethers in dem bewegten Mittel mit jener theoretischen Geschwindigkeit übereinstimmt, welche sich aus dem Principe Fresnel's ergiebt. Es scheint also, dass in den Voraussetzungen, welche Fresnel seiner Reflexionstheorie zu Grunde legte, nichts hypothetisch ist, als die Annahme, nach welcher die Schwingungen senkrecht zur Polarisationsebene vor sich gehen sollen, und dass folglich die Uebereinstimmung der Fresnel'schen Reflexionstheorie mit der Erfahrung als ein Beweis für die Richtigkeit dieser Annahme Fresnel's angesehen werden könne. Immerhin war im Jahre 1850, als Stokes seine Versuche anstellte, Fizeau's experimentelle Verification noch nicht erfolgt.

Nehmen wir an, man erzeuge die Beugungserscheinungen nicht mittelst natürlichen, sondern mittelst geradlinig polarisirten Lichtes.

---

[1]) *Cambr. Trans.*, IX, 1. — *Ann. de chim. et de phys.* (3), LV, 491.

Betrachten wir ein sehr kleines Stück der Wellenfläche, welches Elementarstrahlen nach allen Richtungen sendet. Auf jenen Strahlen, welche zu dem betrachteten Elemente der Welle normal sind, gehen die Schwingungen parallel mit der ursprünglichen Schwingungsrichtung vor sich, allein auf den schiefen Elementarstrahlen kann dies nicht der Fall sein, da die Schwingungen auf dem Strahle senkrecht stehen müssen. Die Polarisationsebene des gebeugten Strahles muss sonach gegen die ursprüngliche Polarisationsebene gedreht sein. Man kann nun den Winkel der Drehung berechnen, indem man die Schwingungsrichtung entweder als normal oder als parallel zur Polarisationsebene voraussetzt, und sehen, welche dieser beiden Annahmen den Experimenten entspricht.

500. Das Theorem von Stokes.

Stokes hat diese Frage mathematisch behandelt und hierbei den Aether als einen festen Körper betrachtet, wenigstens insoweit, als er die Resultante der auf ein Flächenelement ausgeübten Druckkräfte im Allgemeinen nicht als senkrecht auf diesem Elemente annahm, wie dies bei Flüssigkeiten der Fall ist; überdies nahm er an, dass sich nur die transversalen Schwingungen fortpflanzen, nicht aber die longitudinalen. Er fand so, dass der Winkel der Schwingungsrichtung des gebeugten Strahles mit der ursprünglichen Schwingungsrichtung stets ein Minimum ist. Das heisst: zieht man durch einen Punkt des gebeugten Strahles eine Parallele zur ursprünglichen Schwingungsrichtung, so liegt die Schwingungsrichtung des gebeugten Strahles in der durch die ursprüngliche Schwingungsrichtung und den gebeugten Strahl bestimmten Ebene und steht auf dem gebeugten Strahle senkrecht.

Seien, Fig. 78, ON die Richtung des einfallenden Strahles, OM die Schwingungsrichtung dieses Strahles, OP die Richtung des gebeugten Strahles, OQ seine Schwingungsrichtung, β und α die Winkel von OQ und OM mit der Normale OZ der Beugungsebene, θ der Winkel zwischen dem einfallenden und dem gebeugten Strahle. Dann liegt, nach dem Stokes'schen Theoreme, OQ in der Ebene POM. Betrachten wir die dreiseitige Ecke, deren Kanten OM, OQ, OZ sind, so sehen wir, dass dieselbe bei OQ rechtwinkelig ist; OQ und OZ stehen nämlich senkrecht auf OP, OP senkrecht auf der Ebene QOZ, und die Ebene POM oder, was dasselbe ist, die Ebene QOM senkrecht auf der Ebene QOZ. Man hat daher nach einer bekannten Formel

Fig. 78.

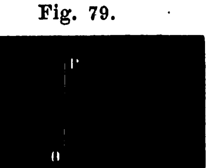


$$tang\ \beta = tang\ \alpha \cos\theta.$$

501. Elementare Ableitung von Holtzmann.

Holtzmann[1]) gelangte zu derselben Formel auf einem einfacheren Wege. Nehmen wir zunächst die Beugungsebene normal zur Schwingungsrichtung des einfallenden Lichtes an, so sehen wir, dass die Schwingungen des gebeugten Strahles jenen des einfallenden parallel sind.

Fig. 79.



Nehmen wir sodann die Beugungsebene als parallel der Schwingungsrichtung des einfallenden Lichtes an, so ergiebt sich folgendes. Sind, Fig. 79, OP der einfallende Strahl, OQ der gebeugte Strahl, OM die Amplitude des ersteren, θ der Winkel der beiden Strahlen, so kann man die Schwingung OM in zwei Schwingungen parallel und senkrecht zur Richtung des gebeugten Strahles zerlegen; nur die letztere Composante pflanzt sich fort und diese ist gleich $OM.\cos\theta$.

Betrachten wir nun schliesslich den allgemeinen Fall. Nehmen wir an, dass die Schwingungen des einfallenden Strahles mit der Normale der Beugungsebene einen Winkel α bilden. Man zerlegt dann die einfallende Schwingung in zwei Schwingungen, parallel und senkrecht zur Beugungsebene. Die letztere Composante, $OM\cos\alpha$, geht unverändert auf den gebeugten Strahl über; die erstere, $OM\sin\alpha$, welche in der Beugungsebene liegt, zerlegt sich neuerdings und liefert die Composante $OM\sin\alpha\cos\theta$. Nennt man nun β den Winkel der Schwingungsrichtung des gebeugten Strahles mit der Normale der Beugungsebene, so hat man

$$tang\,\beta = \frac{OM\sin\alpha\cos\theta}{OM\cos\alpha} = tang\,\alpha\cos\theta,$$

in Uebereinstimmung mit Stokes.

Diese Formel zeigt, dass β kleiner ist als α, oder dass durch die Beugung die Schwingungsrichtung der Normale der Beugungsebene genähert wird. Steht demnach, wie Fresnel annimmt, die Polarisationsebene auf der Schwingungsrichtung senkrecht, so muss durch die Beugung die Polarisationsebene der Beugungsebene genähert werden.

Ist im Gegentheile die Polarisationsebene der Schwingungsrichtung parallel, so muss durch die Beugung die Polarisationsebene von der Beugungsebene entfernt werden.

Soll die Drehung der Polarisationsebene messbar sein, so muss θ hinreichend gross sein; man muss also unter grossen Beugungswinkeln

[1]) Pogg. Ann. XCIX, 446.

beobachten und zu diesem Zwecke Gitter mit sehr vielen, sehr kleinen Oeffnungen benutzen. Stokes benutzte ein mit dem Diamanten geritztes Glasgitter, welches 50 Striche auf dem Millimeter zählte.

502. Experimentelle Schwierigkeiten.

Bei den in Rede stehenden Experimenten ist ausser der Beugung noch eine andere Ursache der Drehung der Polarisationsebene vorhanden, der Wechsel des Mittels und die mit demselben verbundene Brechung, durch welche die Polarisationsebene von der Refractionsebene oder Diffractionsebene entfernt wird. Die Wirkung der Brechung in Bezug auf die Rotation der Polarisationsebene geht also in einem Sinne vor sich, entgegengesetzt dem Sinne der Wirkung der Beugung nach Fresnel's Hypothese. Findet man sonach, dass sich die Polarisationsebene von der Diffractionsebene entfernt, so lässt sich hieraus kein Schluss ziehen, da die Wirkung der Brechung vorwiegen kann; nähert sich jedoch die Polarisationsebene der Diffractionsebene, so kann man hieraus einen der Fresnel'schen Annahme günstigen Schluss ziehen, indem dann die Beugung im Sinne Fresnel's die Polarisationsebene der Diffractionsebene mehr nähert, als die Brechung sie entfernt.

Nehmen wir zunächst die Gitterfurchen an der zweiten Fläche der Glasplatte an, so dass das Licht nach dem Durchgange durch das Glas Beugung erleidet. Steht der Strahl auf der Platte senkrecht, so erfährt er beim Durchgange durch das Glas keine Veränderung seines Polarisationszustandes, wird jedoch beim Austritte sowohl gebeugt als gebrochen. Man kann nun zwei Hypothesen aufstellen:

Findet die Brechung vor der Beugung statt, so hat man, da der Strahl senkrecht einfällt, nur die Wirkung der Beugung, und

$$tang\ \beta = tang\ \alpha\ cos\ \theta,$$

wo β und α die Winkel der Vibrationsrichtungen mit der Normale der Beugungsebene sind, oder, unter Annahme der Hypothese Fresnel's, die Winkel der Polarisationsebenen des gebeugten und des einfallenden Strahles mit der Beugungsebene.

Findet im Gegentheile die Beugung vor der Brechung statt, so hat man einen Strahl, welcher unter dem Incidenzwinkel θ gebrochen wird. Die Polarisationsebene des einfallenden Strahles bildet mit der Beugungsebene einen Winkel, welcher durch die Gleichung

$$tang\ \beta' = tang\ \alpha\ cos\ \theta \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

(Brechung vor der Beugung an der zweiten Fläche.)

gegeben ist. Wird nun der Strahl unter der Incidenz θ gebrochen, und nennt man θ' den entsprechenden Brechungswinkel, β' den Winkel der Polarisationsebene des einfallenden Strahles mit der Brechungsebene und

β den Winkel der Polarisationsebene des gebrochenen Strahles mit derselben Ebene, so hat man (465)

$$tang\ \beta = \frac{tang\ \beta'}{cos\ (\theta' - \theta)},$$

oder nach (1)

$$tang\ \beta = \frac{tang\ \alpha\ cos\ \theta}{cos\ (\theta' - \theta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

(Beugung vor der Brechung an der zweiten Fläche.)

Betrachten wir nun den Fall, wo das Gitter sich an der ersten Fläche des Glases befindet.

Nimmt man an, dass die Brechung vor der Beugung vor sich gehe, so ändert die Brechung nichts an dem Polarisationszustande des einfallenden Strahles; bei der darauf folgenden Beugung hat man, wenn β' den Winkel der Polarisationsebene mit der Beugungsebene bedeutet,

$$tang\ \beta' = tang\ \alpha\ cos\ \theta.$$

An der zweiten Fläche findet Brechung statt, und wenn man mit β den Winkel der Polarisationsebene des austretenden Strahles mit der Brechungsebene bezeichnet, wird

$$tang\ \beta = \frac{tang\ \alpha\ cos\ \theta}{cos\ (\theta' - \theta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

(Brechung vor der Beugung an der ersten Fläche.)

welche Formel mit der Formel (2) des früher behandelten Falles identisch ist. Es ergeben sich also gleiche Resultate, wenn an der ersten Fläche die Brechung der Beugung vorangeht, und wenn an der zweiten Fläche die Beugung der Brechung vorangeht.

Setzen wir schliesslich voraus, dass an der ersten Fläche die Beugung vor der Brechung vor sich gehe, so haben wir, wenn β'' der Winkel der Polarisationsebene des gebeugten Strahles mit der Beugungsebene ist, β' der Winkel der Polarisationsebene des Strahles nach der ersten Brechung mit der Beugungsebene und β der Winkel der Polarisationsebene des austretenden Strahles mit der Beugungsebene,

$$tang\ \beta'' = tang\ \alpha\ cos\ \theta,\ tang\ \beta' = \frac{tang\ \beta''}{cos\ (\theta - \theta')}$$

$$tang\ \beta = \frac{tang\ \beta'}{cos\ (\theta - \theta')},$$

und folglich

$$tang\ \beta = \frac{tang\ \alpha\ cos\ \theta}{cos^2\ (\theta - \theta')} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

(Beugung vor der Brechung an der ersten Fläche.)

Die Formeln (1), (2), (3), (4) setzen die Schwingungsebene als senkrecht zur Polarisationsebene voraus, denn sie sind aus Fresnel's Theorie abgeleitet.

503. Die Experimente von Stokes.

Die Experimente von Stokes sind, wie erwähnt, mittelst eines sehr feinen Gitters angestellt. Der einfallende Strahl wurde durch einen Nicol polarisirt, und der austretende durch einen zweiten Nicol analysirt. Die Beugungswinkel waren sehr beträchtlich und variirten zwischen 50 und 65 Graden. Es wurden die Spectra erster Classe beobachtet, in welchen die Farben unvollkommen getrennt sind.

Stokes fand, dass das gebeugte Licht nicht vollständig polarisirt war, indem das Bild bei keiner Stellung des Analyseurs vollständig ausgelöscht wurde. Allein jedes Bild zeigte ein Minimum der Helligkeit bei einer bestimmten Stellung des Analyseurs; und zwar waren die Erscheinungen derart, dass man für die verschiedenen Farben eine verschieden starke Drehung der Polarisationsebene annehmen musste. Die Experimente von Stokes gaben keine sehr übereinstimmende Resultate, im Ganzen genommen jedoch sprachen sie für die Hypothese Fresnel's.

Stokes verfuhr in der folgenden Weise. Er bemerkte zunächst, dass die Formeln (1), (2), (3), (4) von der Form $tang\,\beta = m\,tang\,\alpha$ sind, wo m eine Function von θ ist. Er construirte hierauf drei Curven, welche den Werthen von m in den Formeln (1), (2), (3), (4) entsprachen, nämlich unter Annahme der Fresnel'schen Hypothese den Werthen

$$m = cos\,\theta,\ m = \frac{cos\,\theta}{cos\,(\theta - \theta')},\ m = \frac{cos\,\theta}{cos^2\,(\theta - \theta')}.$$

Er fand so, dass die erste, durch $m = cos\,\theta$ gegebene Curve sich nicht in der Nähe der durch das Experiment gegebenen Punkte bewegt. Die zweite, durch die Formel $m = \frac{cos\,\theta}{cos\,(\theta' - \theta)}$ gegebene Curve verlief in der Nähe der durch das Experiment in dem Falle gegebenen Punkte, wo das Gitter sich an der zweiten Fläche befindet. Schliesslich entspricht die dritte, durch die Formel $m = \frac{cos\,\theta}{cos^2\,(\theta - \theta')}$ gegebene Curve den experimentellen Resultaten in dem Falle, wo sich das Gitter an der ersten Fläche befindet.

Geht man hingegen von jener Hypothese aus, welche der Fresnel'schen entgegengesetzt ist, d. h. nimmt man die Schwingungen als parallel mit der Polarisationsebene an, so hat man für die vier betrachteten Fälle:

$$tang\,\beta = \frac{tang\,\alpha}{cos\,\theta},\ tang\,\beta = \frac{tang\,\alpha\,cos\,(\theta' - \theta)}{cos\,\theta},$$
$$tang\,\beta = \frac{tang\,\alpha\,cos^2\,(\theta' - \theta)}{cos\,\theta},$$

wo α und β immer noch die Winkel der Polarisationsebenen des einfallenden und des gebeugten Strahles mit der Beugungsebene sind. Con-

struirt man die diesen Formeln entsprechenden Curven, so findet man, dass dieselben in grosser Entfernung von den durch das Experiment gegebenen Punkten verlaufen.

Die Experimente von Stokes schienen demnach für die Richtigkeit der Fresnel'schen Hypothese zu sprechen, nach welcher die Schwingungen auf der Polarisationsebene senkrecht stehen. Sie schienen überdies zu beweisen, dass die Beugung vor der Brechung vor sich geht. Gleichwohl sind die von Stokes gefundenen Resultate ziemlich unregelmässiger Art, und es ist wahrscheinlich, dass bei seinen Experimenten Fehlerquellen vorhanden waren.

504. Die Experimente von Holtzmann.

Holtzmann benutzte ein feines Russgitter. Er erhielt regelmässigere Resultate als Stokes, und gelangte zu dem gerade entgegengesetzten Schlusse. Er stellte Messungen an sowohl der Drehung der Polarisationsebene als der Intensität.

Es werde das einfallende Licht unter einem Winkel von 45 Graden gegen die Beugungsebene polarisirt, und das austretende Licht mittelst eines Analyseurs untersucht, dessen Hauptschnitt der Beugungsebene parallel sei. Ist die Hypothese Fresnel's richtig, so muss durch die Beugung die Polarisationsebene der Beugungsebene genähert werden, und folglich muss das ordentliche Bild das intensivere sein. Ist die entgegengesetzte Hypothese richtig, so entfernt sich die Polarisationsebene von der Beugungsebene, und das ausserordentliche Bild ist das intensivere. Das Experiment ergab, dass das ausserordentliche Bild das hellere war, und dies schien zu beweisen, dass die Schwingungen parallel der Polarisationsebene vor sich gehen.

Bei seinen Messungen bezüglich der Drehung der Polarisationsebene gelangte Holtzmann ebenfalls zu guten Resultaten. Befindet sich das Gitter an der zweiten Fläche des Glases, nimmt man die der Fresnel'schen entgegengesetzte Hypothese an, und nimmt man schliesslich an, dass die Beugung vor der Brechung eintrete, so hat man

$$tang\, \beta = \frac{tang\, \alpha\, cos\, (\theta' - \theta)}{cos\, \theta},$$

wo α und β die Winkel der Polarisationsebenen des einfallenden und des austretenden Strahles mit der Beugungsebene sind. Nach dieser Formel sind die Zahlen der fünften Verticalreihe der folgenden Tafel gerechnet; die Zahlen der letzten Reihe sind nach Fresnel's Hypothese und nach der Formel

$$tang\, \beta = \frac{tang\, \alpha\, cos\, \theta}{cos\, (\theta' - \theta)}$$

gerechnet.

Experiment	θ	α	β			
			Gemessen von Holtzmann	Gerechnet nach Holtzmann	Gerechnet nach Eisenlohr	Gerechnet nach Fresnel
1	10° 36′	45° 36′	44° 27′	45° 3′	44° 34′	46° 2′
2	20° 17′	44° 5′	40° 32′	42° 4′	40° 32′	45° 42′
3	20° 35′	45° 36′	40° 52′	43° 29′	41° 57′	47° 16′
4	31° 51′	45°	38° 6′	40° 2′	37° 29′	48° 53′
5	52° 15′	45° 36′	38° 4′	40° 14′	38° 9′	50° 26′

Man sieht, diese Messungen scheinen gegen Fresnel's Annahme bezüglich der Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes zu sprechen.

505. Die Untersuchungen Eisenlohr's.

Um diese Widersprüche zu lösen, hat Eisenlohr mit Cauchy angenommen, dass in einem Mittel sich auch Longitudinalwellen auf äusserst kurze Distanz fortpflanzen, und diese Annahme verändert, wenn sie richtig ist, die theoretischen Resultate [1]).

Er gelangte zu der folgenden Formel, in welcher α und β die Winkel der Polarisationsebenen des einfallenden und des gebeugten Strahles mit der Normale der Beugungsebene bedeuten. In dieser Formel ist k^2 eine Constante proportional dem Verhältnisse der Absorptionscoëfficienten der Longitudinalwellen in den beiden Mitteln, Glas und Luft, gebrochen durch die Wellenlänge, und ist die Richtigkeit der Hypothese Fresnel's über die Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes angenommen. Die Formel lautet:

$$tang\,\beta = \frac{1 + k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos(\theta - \theta')}\, tang\,\alpha,$$

und gestattet eine Vergleichung mit dem Experimente. Zu diesem Zwecke bestimmt man die Constante k^2 mittelst einer der Beobachtungen. In der obigen Tabelle wurde diese Bestimmung mittelst der zweiten Beobachtung gemacht. Dann berechnet man mittelst des für k^2 gefundenen Werthes den Werth von β bei den übrigen Messungen. Man ersieht aus der Tabelle, dass die Uebereinstimmung zwischen der Formel Eisenlohr's und den gemessenen Werthen eine gute ist. Man darf

[1]) Pogg. Ann. CIV.

jedoch nicht ausser Acht lassen, dass von den fünf Beobachtungen Eisenlohr's eine zur Bestimmung der Constante verwendet wurde und dass sämmtliche Daten sich innerhalb eines verhältnissmässig engen Intervalles befinden, so dass die vermeintliche Verificirung gleichwohl eine wenig befriedigende ist.

Das Phänomen ist, wie es scheint, experimentell und theoretisch complicirter, als vorausgesetzt wurde, und zur Entscheidung der Frage nach der Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes nicht geeignet.

506. Fortsetzung. Die neueren Arbeiten.

Die in den letzten Paragraphen besprochenen Bemühungen, die Frage nach der Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes mittelst der Gittererscheinungen zu lösen, wurden von mehreren Physikern mit vielem Fleisse fortgesetzt, ohne jedoch zu einem Resultate zu führen.

Gilbert [1]) fand für die Intensität des von einem Sector einer ringförmigen Oeffnung gebeugten, von einem Schirme aufgefangenen Lichtes einen sehr einfachen Ausdruck, welcher erkennen lässt, dass die Intensität einen sehr ungleichen Werth erhält, je nachdem die Schwingungsrichtung des Lichtes vor der Beugung dem mittleren Radius des Ringfactors parallel ist, oder senkrecht darauf steht. Doch scheint der Versuch selbst auf Schwierigkeiten zu stossen.

Ebenso behandelte Potier [2]) die Beugungserscheinungen hinter einem rechteckigen Spalt.

Ditscheiner [3]) und Quincke [4]) setzten die Studien an Beugungsgittern fort. Letzterer glaubte aus seinen Versuchen schliessen zu sollen, dass die gegenseitige Lage von Schwingungs- und Polarisationsrichtung beim gegenwärtigen Stande der Theorie mittelst der Gittererscheinungen nicht entschieden werden könne.

Mit den Gittererscheinungen beschäftigten sich ferner Lorenz [5]) und Mascart [6]), welch Letzterer das einfallende Licht durch ein doppeltbrechendes Prisma in zwei senkrecht zu einander polarisirte Componenten zerlegte und deren Intensitätsverhältnisse im gebeugten Lichte maass. Er verfolgte das gebeugte Licht bis zu einem Diffractionswinkel von nahezu 70° und fand dabei fast genau das Stokes'sche Cosinusgesetz bestätigt.

Weitere Studien über diesen Gegenstand sind angestellt von J. Fröhlich [7]), welcher unter anderem die Thatsache constatirte, dass das von der geritzten Fläche eines sehr engen Metallgitters (die Entfernung der Striche war 0·00147 mm) direct reflectirte Licht bedeutend anderen

[1]) C. R. LXIV. — [2]) C. R. LXIV. — [3]) Wien. Ber. LX. — LXVII. — [4]) Pogg. Ann. CIL. — [5]) Ibid. CXI. — [6]) C. R. LXIII. — [7]) Wied. Ann. I, XIII, XXII.

Polarisationszustand hat, als das von der polirten Fläche (Randfläche des Gitters) reflectirte Licht.

Rethy[1]) behandelte den Gegenstand theoretisch. Er ging von der Elasticitätstheorie des Lichtes aus, legte die für den unendlichen, homogenen Raum geltenden Bewegungsgleichungen des Aethers zu Grunde und betrachtete insbesondere zwei von Kirchhoff herrührende einfache Lösungen derselben, leitete aus ihnen zwei Formeln für das Amplitudenverhältniss des gebeugten linear polarisirten Lichtes ab und wies mittelst numerischer Vergleichung eine genügende Uebereinstimmung zwischen Erfahrung und Theorie nach.

Seine Betrachtungsweise wurde von W. König[2]) auf die Polarisation des von Lamellengittern reflectirten und gebeugten Lichtes angewendet, welches elliptische Polarisation von grosser Regelmässigkeit zeigt. König bildete eine theoretische Formel für die Phasendifferenz des gebeugten elliptisch polarisirten Lichtes, mittelst welcher seine diesbezüglichen Beobachtungen in genügender Weise dargestellt wurden.

Fröhlich hinwieder zeigte, dass diese Entwickelungen unzureichend seien, dass die benutzten Lösungssysteme zwar einen Theil des Polarisationszustandes des gebeugten Lichtes darstellen, hingegen mit einem anderen Theile desselben in vollem Widerspruche stehen. Er entwickelte selbst eine Theorie der Erscheinungen, um welche es sich handelt, und gab ein drittes System von Lösungen. Eine numerische Vergleichung der erhaltenen Formeln mit der Erfahrung unterblieb, da bei der grossen Zahl (zwölf) der Constanten eine Nichtübereinstimmung von vornherein ausgeschlossen war.

Schliesslich besitzen wir zwei Studien von Gouy[3]) über die Polarisation des gebeugten Lichtes, insbesondere im Schatten eines Schirmes mit geradem Rande.

507. Die Reflexionstheorie Neumann's und Mac Cullagh's.

Es könnte scheinen, dass die früher besprochenen Verificationen eine vollständige Bestätigung der Richtigkeit der Theorie Fresnel's zu liefern geeignet seien. Gleichwohl muss man beachten, dass lediglich die Formeln verificirt sind; wenn es sich herausstellt, dass noch andere Grundannahmen zu denselben Formeln führen, so bleiben die Principien der Theorie fraglich.

Eben dies trifft nun zu. Neumann[4]) und Mac Cullagh[5]) gelangten fast gleichzeitig zu Formeln, welche mit jenen Fresnel's iden-

---

[1]) Wied. Ann. XI. — [2]) Ibid. XVII. — [3]) C. R. XCVI, XCVIII. — [4]) Abh. Berl. Akad. 1835. — [5]) *Phil. Mag.* (3), VII, 295; X, 42.

tisch sind, obgleich sie von anderen Grundannahmen ausgingen. Die beiden Physiker wurden zu der Abweichung von der Theorie Fresnel's namentlich durch jenes Princip Fresnel's bewogen, welches annimmt, dass an der Trennungsfläche zweier Medien die der Trennungsfläche parallelen Composanten der Bewegung identisch sind, die normalen Composanten aber nicht. Sie zogen es vor, die Identität der Bewegung ohne Einschränkung anzunehmen, was zu drei unvereinbaren Gleichungen geführt hatte. Unter den übrigen Grundannahmen Fresnel's ist noch eine, welche jene beiden Physiker abändern zu sollen meinten: Die Annahme, nach welcher in den verschiedenen Körpern der Aether verschiedene Dichte und gleiche Elasticität besitzt. Neumann und Mac Cullagh gingen von der entgegengesetzten Hypothese aus und nahmen an, dass die Dichte des Aethers in allen Körpern gleich, hingegen die Elasticität verschieden sei.

Von diesen Grundannahmen ausgehend fanden Neumann und Mac Cullagh, dass im Falle, wo das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist, die drei unverträglichen Gleichungen sich auf zwei Gleichungen reducirten, nämlich dieselben Gleichungen, zu welchen Fresnel für das in der Einfallsebene polarisirte Licht gelangt war; und umgekehrt fanden sie für das in der Einfallsebene polarisirte Licht dieselben Formeln, welche Fresnel für das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Licht erhalten hatte. Um die Uebereinstimmung zwischen Experiment und Theorie wieder herzustellen, sahen sie sich nun auch genöthigt, entgegengesetzt der Annahme Fresnel's, die Schwingungen als in der Polarisationsebene vor sich gehend anzunehmen. So wurden die Formeln Neumann's und Mac Cullagh's mit jenen Fresnel's identisch.

Ist das Licht in der Einfallsebene polarisirt, so giebt das Princip der Continuität der Bewegung nach Neumann und Mac Cullagh die beiden Gleichungen

$$(1 - v) \cos i = u \cos r$$
$$(1 + v) \sin i = u \sin r,$$

und das Princip der lebendigen Kräfte die Gleichung

$$(1 - v^2) \lambda \cos i = u^2 \lambda' \cos r,$$

oder, da $\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\sin i}{\sin r}$,

$$(1 - v^2) \sin i \cos i = u^2 \sin r \cos r.$$

Diese dritte Gleichung ist verträglich mit den beiden anderen, denn dividirt man sie durch eine derselben, so erhält man die andere.

Sowohl die Theorie Neumann's als jene Fresnel's stimmen also mit der Erfahrung überein; nach Neumann's Theorie liegen die Schwingungen in der Polarisationsebene, und die Dichte des Aethers ist in allen Körpern constant, nach Fresnel's Theorie liegen die Schwin-

gungen zur Polarisationsebene normal, und die Dichte des Aethers ist in verschiedenen Körpern verschieden.

Diese Hypothesen sind paarweise aneinander gebunden; könnte man experimentell beweisen, dass die Dichte des Aethers in verschiedenen Körpern verschieden ist, so wäre damit eine Entscheidung zwischen den beiden Theorien getroffen. Es scheint aber in der That die Erklärung des Einflusses der Bewegung der ponderablen Massen auf die optischen Erscheinungen und insbesondere die Erklärung der Fizeau'schen Experimente bei Voraussetzung einer constanten Aetherdichte Schwierigkeiten zu unterliegen. Diese Schwierigkeiten verschwinden, wenn man den Aether in den verschiedenen Körpern als verschieden dicht annimmt, und wenn man ferner annimmt, dass der Ueberschuss des in einem Körper enthaltenen Aethers über den einem gleichen Volumen leeren Raumes entsprechenden Aether die Bewegung des Körpers mitmacht. Es spricht dies für die Richtigkeit der Fresnel'schen Theorie und für die Richtigkeit der Annahme, nach welcher die Schwingungen senkrecht zur Polarisationsebene vor sich gehen.

508. Krystallreflexion.

Wir haben bisher nur den Fall isotroper Körper in Betracht gezogen, d. h. solcher Körper, welche entweder amorph sind oder im cubischen Systeme krystallisiren. Bei diesen Körpern hängen die Erscheinungen der Reflexion und Brechung nur vom Einfallswinkel und der Lage der Polarisationsebene des einfallenden Strahles ab. Wir wollen nun den Fall betrachten, wo eines der beiden Mittel doppeltbrechend ist. Die Erscheinungen hängen hier von vier Elementen ab: dem Einfallswinkel, der Lage der Polarisationsebene des einfallenden Strahles gegen die Einfallsebene, der Lage der Einfallsebene gegen die reflectirende Ebene, und schliesslich der Lage dieser Ebene gegen die Achsen des Krystalls.

Die ersten experimentellen Resultate in dieser Richtung wurden von Brewster im Jahre 1819 veröffentlicht[1]). Dieser arbeitete mit Kalkspath und Bleibichromat, welche zu den stark doppeltbrechenden Substanzen gehören; Krystalle wie Quarz oder Gyps wären für die in Rede stehenden Versuche zu schwach doppeltbrechend gewesen. Ueberdies sind die Krystalle, deren sich Brewster bediente, beide einachsig und repulsiv, wodurch die ersten Resultate sich einfacher gestalteten.

Brewster gelangte zu den folgenden experimentellen Gesetzen.

1. Der Winkel der totalen Polarisation hängt von der Lage der Einfallsebene und von der Lage der reflectirenden Fläche ab. Sind: φ der Polarisationswinkel, ω der Winkel der Einfallsebene mit dem

[1]) *Phil. Trans.*, 1819, p. 145.

Hauptschnitte des Krystalls und α, β zwei Constanten, von welchen β die grössere ist, so fand er

$$\varphi = \alpha + (\beta - \alpha) \sin^2 \omega.$$

Für $\omega = 0$ wird $\varphi = \alpha$, und für $\omega = \frac{\pi}{2}$ wird $\varphi = \beta$. Demnach ist der Polarisationswinkel ein Maximum oder Minimum, je nachdem die Einfallsebene auf dem Hauptschnitte senkrecht steht oder mit demselben parallel ist. Wir wollen vorausbemerken, dass es sich bei attractiven Krystallen umgekehrt verhält.

2. Während bei den isotropen Körpern das unter dem Polarisationswinkel reflectirte Licht in der Einfallsebene polarisirt ist, ist dies bei den Krystallen nur dann der Fall, wenn die Einfallsebene mit dem Hauptschnitte parallel ist oder auf demselben senkrecht steht. Letzteres verlangt schon die Symmetrie. Hat aber die Einfallsebene eine andere Lage, so bildet die Polarisationsebene des reflectirten Lichtes einen von null verschiedenen Winkel mit der Einfallsebene: dieser ist im Allgemeinen sehr klein und überschreitet nicht zwei oder drei Grade.

Um das Verfahren empfindlicher zu machen, gebrauchte Brewster den Kunstgriff, die reflectirende Krystallfläche in eine Flüssigkeit zu tauchen; die Abweichung der Polarisationsebene vergrössert sich hierdurch, und zwar um so mehr, je mehr sich der Brechungsindex der Flüssigkeit jenem des Krystalls nähert. Bei Anwendung von Zimmtöl, dessen Index nahe gleich dem ordentlichen Brechungsexponenten des Kalkspathes ist, erreichte die Abweichung der Polarisationsebene nahe 90°.

509. Die Experimente von Seebeck.

Im Jahre 1831 nahm August Seebeck[1]) die Experimente Brewster's wieder auf. Er machte nicht die Gesammtheit der Erscheinungen zum Gegenstande seiner Experimente, sondern beschränkte sich auf die Untersuchung der Abhängigkeit des Polarisationswinkels von der Lage der reflectirenden Fläche des Krystalls und der Lage der Einfallsebene.

Er bediente sich bei seinen Untersuchungen des schon beschriebenen Apparates (S. 372); nur war noch die Einrichtung getroffen, dass die reflectirende Fläche in ihrer eigenen Ebene gedreht werden und so ihre Lage gegen die Einfallsebene verändert werden konnte.

Obgleich der Apparat Seebeck's einigermaassen complicirt eingerichtet war, ergaben sich doch gute Resultate, und die Uebereinstimmung der Messungen mit den theoretischen Formeln lässt die letzteren als geeignet zur Darstellung der Phänomene erscheinen.

---

1) Pogg. Ann. XXI, 290; XXII, 126.

Bei Anstellung der Experimente ergab sich noch die folgende Schwierigkeit. Es wurde schon bemerkt, dass man bei isotropen Substanzen exacte Resultate nur unter Benutzung frisch polirter Flächen erhält. Seebeck glaubte deshalb mit frisch gespaltenen oder frisch polirten Krystallflächen arbeiten zu müssen. Nun sind die Verhältnisse der Lichtbrechung beim Kalkspathe, dessen sich Seebeck bediente, symmetrisch in Bezug auf die Achse des Krystalls, und es muss folglich dasselbe auch für die Reflexion gelten. Gleichwohl ergaben gespaltene und polirte Flächen, welche gegen die Achse gleich geneigt waren, nicht gleiche Werthe für den Polarisationswinkel. Es zeigte sich, dass diese Differenz von der chemischen Einwirkung der Polirmittel herrührte. Indem Seebeck sich schliesslich beim Poliren der Krystallflächen der pulverisirten Kreide bediente, ergaben sich die gleichen Resultate bei künstlichen wie bei natürlichen, gegen die Achse gleich geneigten Flächen.

Seebeck führte mit Kalkspath sechs Reihen von Messungen an verschiedenen künstlichen und natürlichen Flächen aus. Die hauptsächlichsten Resultate, zu welchen er gelangte, sind die folgenden.

1. Für ein und dieselbe reflectirende Fläche ist Brewster's Formel

$$\varphi = \alpha + (\beta - \alpha) \sin^2 \omega$$

nicht genau. Es ist wahrscheinlich, dass das Gesetz sich durch die Formel

$$f(\varphi) = f(\alpha) + [f(\beta) - f(\alpha)] \sin^2 \omega$$

ausdrücken lässt. α und β sind die Polarisationswinkel im Hauptschnitte und normal zu demselben, sie sind abhängig von der Lage der reflectirenden Fläche. Die Function f ist wahrscheinlich eine einfache trigonometrische Function, welche sich innerhalb gewisser Grenzen wenig von der Proportionalität mit der Variablen entfernt.

2. Zur Bestimmung von α und β hat Seebeck eine Reihe von Messungen angestellt. Bei den Messungen im Hauptschnitte an Flächen, welche gegen eine zur Achse normale Ebene um den variablen Winkel θ geneigt waren, ergab sich: sind a und c die Polarisationswinkel für die Flächen parallel und senkrecht zur Achse, so hat man, wenn die Einfallsebene mit dem Hauptschnitte zusammenfällt, die Formel

$$\alpha = a \sin^2 \theta + c \cos^2 \theta.$$

In dieser Formel sind a und c Constanten, welche nur vom Krystall abhängen. Steht ferner die Einfallsebene auf dem Hauptschnitte senkrecht, und sind b und c die Polarisationswinkel für reflectirende Flächen parallel und normal zur Achse, so erhält man

$$\beta = b \sin^2 \theta + c \cos^2 \theta.$$

Diese Formeln geben die Erscheinungen mit demselben Grade der Genauigkeit, wie die Formeln Brewster's, und es schien wahrscheinlich, dass die Erscheinungen noch genauer durch die Formeln

$$f_1(\alpha) = f_1(a)\sin^2\theta + f_1(c)\cos^2\theta$$
$$f_1(\beta) = f_1(b)\sin^2\theta + f_1(c)\cos^2\theta$$

dargestellt würden, in welchen f_1 ebenfalls eine einfache trigonometrische Function bedeutet, welche innerhalb gewisser Grenzen nahe proportional der Variablen verläuft. a, b, c sind Constanten, welche nur von den Brechungsexponenten des Krystalls abhängen, und insbesondere b steht mit denselben in einfachem Zusammenhange. b ist nämlich der Polarisationswinkel in dem Falle, wo die reflectirende Fläche mit der Achse parallel ist und die Einfallsebene auf der Achse senkrecht steht. In diesem Falle verhalten sich die beiden gebrochenen Strahlen wie ordentliche Strahlen von verschiedenen Brechungsexponenten (S. 175), und es ist eine Analogie mit dem Verhalten isotroper Substanzen vorhanden. Bei den isotropen Substanzen wird unter dem Polarisationswinkel das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Licht nicht reflectirt, und die Tangente des Polarisationswinkels ist gleich dem Brechungsexponenten. Hier ist der senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Strahl der ordentliche Strahl, sein Brechungsexponent ist der ordentliche Brechungsexponent n des Krystalls. Man kann nun annehmen, dass

$$tang\, b = n.$$

Die beiden anderen Winkel a und c bestimmen sich nicht so einfach. Man fand empirisch

$$tang\, a = n\sqrt{\frac{m^2-1}{n^2-1}}, \quad tang\, c = m\sqrt{\frac{n^2-1}{m^2-1}},$$

wo n und m der ordentliche und der ausserordentliche Brechungsexponent sind.

Diese drei Formeln schliessen sich hinreichend an das Experiment an. Man findet:

	Gerechnet	Gemessen
b	58° 49′	58° 56′
a	54° 3·4′	54° 3·6′
c	60° 47·1′	60° 33·4′.

Seebeck hat noch die folgenden Beobachtungen gemacht.

1. Findet die Reflexion an einer zur Achse normalen Fläche statt, so ist die Deviation der Polarisationsebene von der Lage der Einfallsebene unabhängig.

2. Ist der einfallende Strahl parallel oder normal zur Einfallsebene polarisirt, so ist es der reflectirte Strahl im Allgemeinen nicht mehr.

3. Die Deviation der Polarisationsebene des einfallenden Strahles hängt ab von der Lage der Einfallsebene und der Lage der reflectirenden Ebene.

4. In einem Hauptschnitte sind die Erscheinungen zu beiden Seiten des Einfallslothes symmetrisch.

510. Seebeck's Theorie.

Um zu Formeln der Krystallreflexion zu gelangen, hat Seebeck versucht, die Fresnel'schen Principien zu erweitern und unter Anwendung der Analogie auf die Krystalle auszudehnen. Obgleich diese Analogie sich nicht strenge erweisen lässt, gelangte er doch zu Formeln, welche mit dem Experimente gut übereinstimmen.

Seebeck hat sich auf den Fall beschränkt, wo die Einfallsebene mit einem Hauptschnitte des Krystalls zusammenfällt. Er geht aus von dem Principe der Continuität der Bewegung, letzteres beschränkt auf die der Trennungsfläche parallele Composante, und von dem Principe der lebendigen Kräfte.

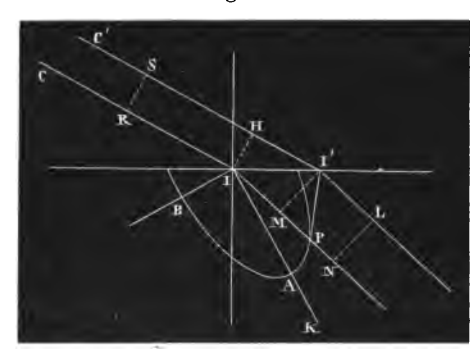
Ist das einfallende Licht normal zur Einfallsebene polarisirt, also normal zum Hauptschnitte, so giebt es nur éinen gebrochenen Strahl, den ausserordentlichen. Das Continuitätsprincip giebt, wie bei den isotropen Körpern, die Gleichung

$$(1 - v) \cos i = u \cos r.$$

Es muss indessen bemerkt werden, dass diese Gleichung für die doppeltbrechenden Krystalle nur angenähert richtig ist, indem die Wellen nicht mehr sphärisch sind und die Schwingungen der gebrochenen Strahlen auf diesen nicht mehr genau senkrecht stehen.

Es ist nun auf den in Rede stehenden Fall noch das Princip der lebendigen Kräfte anzuwenden. Sei, Fig. 80, CJ ein einfallender Strahl; derselbe giebt nur einen gebrochenen Strahl, den ausserordentlichen. Die Richtung des gebrochenen Strahles kann mittelst der Huyghens'schen Construction gefunden werden. Wir tragen auf der Durchschnittslinie der Einfallsebene und der reflectirenden Krystallfläche von J aus die Strecke JJ' gleich $\frac{1}{\sin i}$ ab, ziehen von J aus die Gerade JK parallel der Krystallachse und eine zu JK senkrechte Gerade, machen auf diesen beiden Geraden $JA = \frac{1}{n}$, $JB = \frac{1}{m}$, wo n und m der ordentliche und der ausserordentliche Brechungsindex des Krystalls sind, construiren mit den Halbachsen JA und JB eine Ellipse, ziehen von J' aus die Tangente JP und verbinden P mit J. JP ist der ausserordentliche Strahl.

Fig. 80.



Seien $JHRS$ und $J'MNL$ die Grundflächen zweier in den beiden Mitteln liegenden Aetherprismen, so dass die Bewegung des einen sich nach Ablauf einer gewissen Zeit auf das andere überträgt. Bezeichnen wir mit U und V die beiden Volumina, mit v und u die Amplituden des einfallenden und des gebrochenen Strahles, mit $\varDelta$ die Dichte des Aethers im zweiten Mittel, und nehmen wir die Dichte des Aethers im ersten Mittel zur Einheit, so giebt das Princip der lebendigen Kräfte die Gleichung

$$V(1 - v^2) = \varDelta\, U u^2.$$

Die Dichte $\varDelta$ ist hier nicht dem Quadrate von $\frac{\sin r}{\sin i}$ verkehrt proportional, denn der Brechungsindex ist variabel und $\varDelta$ constant; um jedoch eine Gleichung von derselben Form zu erhalten, wie bei den isotropen Mitteln, setzte Seebeck gleichwohl unter Vernachlässigung der Veränderlichkeit des Brechungsexponenten

$$\varDelta = \frac{1}{\Omega^2},$$

wo Ω für $\frac{\sin r}{\sin i}$ steht.

Nimmt man $RJ = J'H = JJ' \sin i = 1$, so ist die Breite JH des Prismas gleich $JJ' \cos i = \frac{\cos i}{\sin i}$, und das Volumen V ist, wenn die Höhe des Prismas gleich 1 gesetzt wird, gleich

$$V = \frac{\cos i}{\sin i}.$$

Für das Volumen U findet man

$$J'M.MN.1 = \frac{\cos r}{\sin i} \cdot \frac{\sin r}{\sin i} = \frac{\cos r}{\sin i} \cdot \Omega.$$

Ω ist keine Constante, sondern eine Function des Winkels i und der Lage der Krystallfläche gegen die Achse.

Die Gleichung der lebendigen Kräfte nimmt also die Form an

$$\cos i\,(1 - v^2) = \frac{u^2 \cos r}{\Omega},$$

und man hat zwischen den Grössen

$$v,\ u,\ i,\ r,\ \theta,\ \varphi,\ \alpha,\ \beta,\ a,\ b,\ c,\ \omega,\ n \text{ und } m$$

die folgenden Gleichungen:

$$f(\varphi) = f(\alpha) \cos^2 \omega + f(\beta) \sin^2 \omega$$
$$f_1(\alpha) = f_1(a) \sin^2 \theta + f_1(c) \cos^2 \theta$$
$$f_1(\beta) = f_1(b) \sin^2 \theta + f_1(c) \cos^2 \theta$$
$$(1 - v) \cos i = u \cos r$$
$$(1 - v^2) \cos i = \frac{u^2 \cos r}{\Omega}.$$

Da Ω gleich $\frac{sin\, r}{sin\, i}$ angenommen wurde, sind die beiden letzten Gleichungen dieselben, welche für isotrope Körper gelten, wenn das Licht normal zur Einfallsebene polarisirt ist. Man hat also

$$v = \frac{tang\,(i - r)}{tang\,(i + r)}$$

und erhält für $i + r = 90^0$ auch $v = 0$; i ist der Polarisationswinkel, welchen wir mit φ bezeichnet haben. Dieser Winkel kann nun als Function von θ, m, n dargestellt werden. Bezeichnen wir zu diesem Zwecke mit x_0, y_0 die Coordinaten des Punktes P, so ergiebt sich

$$x_0 = y_0\,.\,tang\, r,$$

und da jetzt $i = \varphi$, und folglich $\varphi + r = 90^0$, so hat man

$$y_0 = x_0\, tang\, \varphi.$$

Nun können x_0 und y_0 durch θ, φ, m, n ausgedrückt werden. Thut man dies in der letzten Gleichung, so erhält man

$$sin^2 \varphi = \frac{n^2 (m^2 - 1)}{m^2 n^2 - 1} sin^2 \theta + \frac{m^2 (n^2 - 1)}{m^2 n^2 - 1} cos^2 \theta.$$

Es ist andererseits, wie wir gesehen haben, wenigstens angenähert

$$tang\, a = n \sqrt{\frac{m^2 - 1}{n^2 - 1}}, \quad tang\, c = m \sqrt{\frac{n^2 - 1}{m^2 - 1}},$$

also

$$sin^2 a = \frac{n^2 (m^2 - 1)}{m^2 n^2 - 1}, \quad sin^2 c = \frac{m^2 (n^2 - 1)}{m^2 n^2 - 1}.$$

Wir können demnach schreiben

$$sin^2 \varphi = sin^2 a\, sin^2 \theta + sin^2 c\, cos^2 \theta.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der früher aufgestellten Gleichung

$$f_1 (\alpha) = f_1 (a)\, sin^2 \theta + f_1 (c)\, cos^2 \theta,$$

so ergiebt sich die Function f_1 als Sinusquadrat.

Es liegt nahe, anzunehmen, dass in der Gleichung

$$f(\varphi) = f(\alpha)\, cos^2 \omega + f(\beta)\, sin^2 \omega$$

die Function f von derselben Form ist wie f_1, wodurch man erhält:

$$sin^2 \varphi = sin^2 \alpha\, cos^2 \omega + sin^2 \beta\, sin^2 \omega.$$

In der That schliessen sich diese Formeln sehr gut an das Experiment an, und sie können als empirische Formeln gelten, welchen jede Theorie wird genügen müssen. Doch gelten die Formeln nur für Krystalle, welche, was fast durchgängig der Fall ist, schwach doppeltbrechen, und es bleibt fraglich, ob die Formeln auch dann ihre Güte behalten, wenn die Indices m und n beträchtlich verschieden sind.

511. Neumann's Theorie.

Nach Seebeck veröffentlichte Neumann eine vollständige Theorie der Reflexion an Krystallflächen [1]. Neumann's Theorie ist gegründet auf die Annahmen der Gleichheit der Aetherdichte und der absoluten Continuität der Bewegung, und im Zusammenhange damit auf die Annahme des Parallelismus der Schwingungen mit der Polarisationsebene. Wir beschränken uns darauf, die Resultate der Theorie Neumann's anzuführen. In dieser Theorie wird vorausgesetzt, dass die Schwingungen des ausserordentlichen Strahles normal zum Hauptschnitte vor sich gehen, und die Schwingungen des ordentlichen Strahles im Hauptschnitte.

Da die zur Einfallsebene normalen oder parallelen Schwingungen ihre Richtung nicht unverändert beibehalten, ergäbe sich keine Vereinfachung aus der Annahme solcher einfallender Schwingungen. Wir betrachten daher sogleich den allgemeinen Fall und bezeichnen mit θ den Winkel der Polarisationsebene mit der Einfallsebene. Die einfallende Vibrationsbewegung lässt sich zerlegen in eine Composante normal zur Einfallsebene von der Amplitude $\sin\theta$, und eine Composante in der Einfallsebene von der Amplitude $\cos\theta$. Diese letztere Composante lässt sich selbst wieder parallel und normal zur reflectirenden Ebene zerlegen; die erstere Composante ist $\cos\theta \cos i$, die letztere $\cos\theta \sin i$. Bezeichnen wir mit α und α' die Winkel der Schwingungen des ordentlichen und des ausserordentlichen Strahles mit der Normale der Einfallsebene, mit β und β' die Winkel dieser Schwingungen mit der Spur der Einfallsebene auf der reflectirenden Ebene, und mit γ und γ' die Winkel der Schwingungen mit dem Einfallslothe; bezeichnen wir ferner mit v und v' die Amplituden der Composanten des reflectirten Strahles in der Einfallsebene und senkrecht zu derselben, ferner mit u und u' die Amplituden des ordentlichen und des ausserordentlichen gebrochenen Strahles, so giebt das Continuitätsprincip, angewendet auf die Composanten der Bewegung nach den drei Achsen, nämlich der Normale der Einfallsebene, der Spur der Einfallsebene auf der reflectirenden Ebene und dem Einfallslothe, die folgenden Gleichungen:

$$\sin\theta + v' = u\cos\alpha + u'\cos\alpha' \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$(\cos\theta - v)\cos i = u\cos\beta + u'\cos\beta' \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$(\cos\theta - v)\sin i = u\cos\gamma + u'\cos\gamma' \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \alpha' \beta' \gamma'$ können mittelst der Huyghens'schen Construction durch gewisse andere Grössen ausgedrückt werden. Ist ψ der Winkel der ordentlichen gebrochenen Welle mit der reflectirenden

[1] Ueber den Einfluss der Krystallflächen bei der Reflexion des Lichtes, Pogg. Ann. XL.

Ebene, ψ' jener der ausserordentlichen, N der Winkel der Normale der reflectirenden Ebene mit der Achse des Krystalles, ω der Winkel der Einfallsebene mit dem Hauptschnitte, χ der Winkel der Normale der ordentlichen Welle mit der Achse des Krystalles, χ' der Winkel der Normale der ausserordentlichen Welle mit der Achse des Krystalles, so findet man

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\sin N \sin\omega}{\sin\chi}, \quad \cos\alpha' = \frac{\cos N \sin\psi - \sin N \cos\psi' \cos\omega}{\sin\chi'}, \\ \cos\beta &= -\frac{\cos\psi(\cos N \sin\psi - \sin N \cos\psi \cos\omega)}{\sin\chi}, \quad \cos\beta' = \frac{\sin N \cos\psi' \sin\omega}{\sin\chi'}, \\ \cos\gamma &= \frac{\sin\psi(\cos N \sin\psi - \sin N \cos\psi \cos\omega)}{\sin\chi}, \quad \cos\gamma' = \frac{\sin N \sin\psi' \sin\omega}{\sin\chi'}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Sind V und V' die Volumina der Aetherprismen der ordentlichen und der ausserordentlichen Strahlen, auf welche sich die Vibrationsbewegung eines Aetherprismas des einfallenden Lichtes überträgt, und wird das Volumen des letzteren Prismas gleich eins gesetzt, so liefert das Princip der lebendigen Kräfte die Gleichung

$$1 - (v^2 + v'^2) = u^2 V + u'^2 V'.$$

Für V findet man den Ausdruck $\frac{\sin r}{\sin i}\,\frac{\cos r}{\cos i}$, wenn i und r der Einfallswinkel und Brechungswinkel des ordentlichen Strahles sind; diese beiden Winkel sind durch die Gleichung $\sin i = n \sin r$ verbunden. Gleicherweise findet man $V' = \frac{\sin r'}{\sin i}\cdot\frac{\cos r'}{\sin i}$; diese Gleichung bezieht sich auf den ausserordentlichen Strahl, und r' muss nach der Huyghens'schen Construction ermittelt werden. Setzt man für V und V' ihre Werthe, so wird die Gleichung der lebendigen Kräfte:

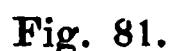
$$\left.\begin{aligned} 1 - (v^2 + v'^2) &= \frac{u^2 \sin\psi \cos\psi}{\sin i \cos i} \\ &+ \frac{u'^2 \sin\psi' \cos\psi'}{\sin i \cos i}\left[1 - \frac{(a^2 - b^2)\cos\chi'\left(\frac{\cos N}{\cos\psi'} - \cos\chi'\right)}{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\chi'}\right] \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

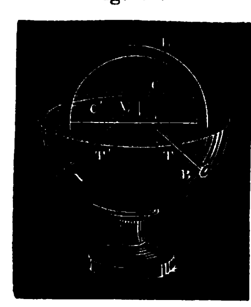
wo a und b die in der Theorie der Doppelbrechung gewöhnliche Bedeutung haben.

Substituirt man die für $\cos\alpha$, $\cos\alpha'$, $\cos\beta$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma$, $\cos\gamma'$ gefundenen Werthe (4) in den Gleichungen (1), (2), (3), so geben diese Gleichungen zusammen mit (5) ein System von vier Gleichungen, welches gestattet, die Composanten v, v' der Amplitude des reflectirten Strahles und die Amplituden u, u' der beiden gebrochenen Strahlen als Functionen der Winkel i, θ, N, und der Winkel χ, χ', ψ, ψ' darzustellen; die Winkel i, θ und N müssen in jedem besonderen Falle gegeben sein, die Winkel χ, χ', ψ, ψ' sind aus den gegebenen Winkeln nach der Huyghens'schen Construction abzuleiten.

512. Neumann's Experimente.

Neumann hat die Formeln, zu welchen er gelangt war, experimentell verificirt. Der Apparat, dessen er sich bediente, Fig. 81, zeigt einen horizontalen Theilkreis C, einen um eine verticale Achse drehbaren Theilkreis L und einen Träger C', welcher im Centrum den Krystall A trägt. Eine horizontale Röhre T, an deren Ende B sich eine Lampe befindet, enthält einen Turmalin und sendet folglich geradlinig polarisirtes Licht nach dem Krystalle. Der reflectirte oder gebrochene Strahl gelangt durch eine zweite Röhre T', welche um das Centrum drehbar ist und den Analyseur N trägt.


Fig. 81.



Man bestimmt die Lage, für welche der Hauptschnitt der Krystallplatte A horizontal steht, die Lagen, für welche die Hauptschnitte des Turmalins und des Analyseurs vertical stehen und die Lage, für welche die reflectirende Krystallfläche auf dem einfallenden Strahle senkrecht steht.

Der Winkel der Polarisationsebene des einfallenden Strahles mit der Einfallsebene wird mittelst des Turmalins variirt, der Incidenzwinkel durch Drehung des verticalen Theilkreises um seine verticale Achse, und der Winkel der Polarisationsebene des einfallenden Strahles mit dem Hauptschnitte des Krystalles durch Drehung der reflectirenden Fläche um eine horizontale Achse.

Mit diesem Apparate stellte Neumann sieben Reihen von Messungen an.

1. Indem er die Stellung des Turmalins variirte, bestimmte er für verschiedene Incidenzen das Polarisationsazimuth des einfallenden Strahles, bei welchem das ausserordentliche Bild des Analyseurs verschwand. Die Differenz zwischen den gemessenen und den gerechneten Werthen variirte zwischen $-8'$ und $+4{\cdot}5'$.

2. Indem er analoge Messungen bei Auslöschung des ordentlichen Bildes anstellte, fand er Differenzen zwischen $-9'$ und $+5'$. Die beiden Azimuthe bilden keineswegs einen rechten Winkel, die Abweichung von einem rechten Winkel kann $2^0\,5'$ betragen. Doch treten so grosse Abweichungen ein, wenn die Einfallsebene mit dem Hauptschnitte einen beträchtlichen Winkel bildet und der Incidenzwinkel von Null verschieden ist, während bei normaler Incidenz und wenn die Einfallsebene mit dem Hauptschnitte zusammenfällt, die Perpendicularität vollständig ist.

3. — 4. Die dritte und vierte Reihe von Messungen beziehen sich auf die Drehung, welche die Polarisationsebene bei der Reflexion erfährt, wenn der einfallende Strahl in der Einfallsebene oder normal zu der-

selben polarisirt ist und wenn die Einfallsebene nicht mit dem Hauptschnitte zusammenfällt oder auf demselben senkrecht steht.

Die Drehung der Polarisationsebene des reflectirten Strahles ist grösser, wenn das einfallende Licht in der Einfallsebene polarisirt ist, sie konnte hier der Theorie nach im Maximum 12° 45′ betragen. Die Differenzen zwischen den beobachteten und den gerechneten Werthen schwankten zwischen — 5′ und + 19′. War das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, so konnte die Drehung der Polarisationsebene theoretisch im Maximum 4° 8′ betragen, und die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung lagen zwischen — 6′ und + 8′.

5. — 6. Will man umgekehrt, dass der reflectirte Strahl parallel oder normal zur Einfallsebene polarisirt sei, so muss der einfallende Strahl in einer anderen Ebene polarisirt werden. Die Drehung der Polarisationsebene geht, wie im vorhergehenden Falle, bis 12° 45′, wenn der reflectirte Strahl in der Einfallsebene polarisirt ist, die Differenzen zwischen Rechnung und Messung liegen zwischen — 24′ und + 35′; die Drehung geht nur bis 4° 8′, wenn der reflectirte Strahl normal zur Einfallsebene polarisirt ist, und dann variirten die Differenzen zwischen — 5′ und + 8′.

7. Die letzte Reihe von Versuchen beschäftigt sich damit, das Polarisationsazimuth des einfallenden Strahles zu bestimmen, wenn das Azimuth des reflectirten gegeben ist. Die Differenzen zwischen Messung und Rechnung variirten zwischen — 16′ und + 34′.

513. Senarmont's Experiment bei normaler Incidenz.

Bei der normalen Reflexion an einem isotropen Körper bleibt das Polarisationsazimuth ungeändert. Anders verhält es sich bei den doppeltbrechenden Krystallen. Steht die reflectirende Fläche schief gegen die Achse und ist der einfallende Strahl weder parallel noch normal zum Hauptschnitte polarisirt, so wird die Polarisationsebene durch die Reflexion auch bei normaler Incidenz gedreht. Indem nämlich die einfallende Bewegung parallel und normal zum Hauptschnitte zerlegt werden kann, und indem die Intensitäten der beiden Composanten verschiedene Veränderungen erfahren, erfolgt eine Drehung der Polarisationsebene des Strahles bei der Reflexion.

Fig. 82.



Senarmont hat diese Drehung der Polarisationsebene experimentell nachgewiesen. Er bediente sich eines von Fizeau herrührenden Kunstgriffes, welcher gestattet, den normal reflectirten Strahl aufzufangen, ohne den einfallenden Strahl abzuhalten. Ein polarisirter Lichtstrahl AB, Fig. 82, wird von der Glasplatte ST nach einer zweiten Glas-

platte KL reflectirt und von der letzteren normal reflectirt. Der reflectirte Strahl CM fällt auf einen Nicol, welcher auf Auslöschung eingestellt wird. Legt man nun die Krystallplatte auf die Platte KL, so erscheint das früher ausgelöschte Bild wieder und kann durch eine Drehung des Nicols um einige Grade neuerdings ausgelöscht werden. Die Drehung des Nicols misst jedoch nicht die Drehung der Polarisationsebene durch Reflexion am Krystalle, denn der Strahl BM wird bei seinem Durchgang durch die Platte ST modificirt.

514. Weitere Arbeiten über Krystallreflexion.

Die theoretischen Untersuchungen über die Krystallreflexion wurden von mehreren Physikern fortgesetzt, so von Briot[1]), welcher eine Erweiterung des Princips der Continuität in Anwendung brachte, wonach nicht nur die drei Componenten der Schwingungsbewegung in beiden Medien einzeln verglichen gleich sind für jeden Punkt der Grenzfläche, sondern auch noch ihre ersten Ableitungen nach einer Coordinate senkrecht zu dieser Fläche. Er gelangte zu dem Resultate, dass ein aus einem isotropen Medium auf eine Krystallfläche fallender Strahl fünf Strahlen erzeugt: einen reflectirten Strahl mit transversalen Schwingungen, einen reflectirten mit longitudinalen, zwei gebrochene Strahlen mit transversalen Schwingungen und einen gebrochenen mit longitudinalen. Von diesen Strahlen können alle mit Ausnahme der transversalen reflectirten in der Nähe der Grenzfläche verlöschen. Die reflectirte transversale Schwingung ist elliptisch, die vier übrigen geradlinig. Die aufgestellten Gleichungen genügen zur vollständigen Bestimmung der fünf Strahlen.

Cornu[2]) stellte auf Grund der Fresnel'schen Anschauungen eine Theorie der Krystallreflexion auf, indem er sich zugleich gegen die Theorie Neumann's und Mac Cullagh's, welche Theorien die Dichte des Aethers in allen Medien als gleich annehmen, als unvereinbar mit den Experimenten Fizeau's wendete. Bei Fresnel's Theorie ist das Hauptbedenken die Discontinuität der Schwingungscomponenten senkrecht zur Trennungsebene (459). Um diese Schwierigkeit zu beseitigen, führte Cornu statt des geometrischen Princips der Continuität der Amplituden das mechanische Princip der Erhaltung der Quantitäten der Bewegung in die Theorie ein. Er dehnte die so modificirte Fresnel'sche Theorie auf die krystallinischen Medien aus und gelangte zu Gleichungen, welche mit den von Neumann aufgestellten übereinstimmen. Cornu gab auch eine Discussion der Methoden und Apparate zu genaueren Messungen und stellte selbst Messungen an, deren numerische Resultate mit der Rechnung stets auf einige Minuten stimmten.

---

[1]) Liouville J. XII. — [2]) *Ann. d. chim.* (4), XI.

G. Kirchoff[1]) ging von den Theorien Neumann's und Mac Cullagh's, welche beide auf das Zusammenfallen der Schwingungsrichtung mit der Polarisationsebene geführt hatten, aus, zeigte, dass die Grundlagen der beiden Theorien im Wesentlichen identisch seien, in welchen angenommen wird, dass auf ein Aethertheilchen im Inneren eines Körpers keine anderen Kräfte wirken, als die von der Elasticität herrührenden, dass aber auf die Grenzflächen zweier heterogener Medien noch Druckkräfte ausgeübt werden, die anderen Ursprungs sind, und behandelte den Gegenstand beider Theorien in allgemeinerer und übersichtlicherer Form, ausgehend von den allgemeinen Elasticitätsgleichungen. Er gelangte zunächst zu den Fresnel'schen Gesetzen der Doppelbrechung (XIII), modificirt nur durch die andere Bedeutung der Polarisationsebene. Kirchhoff stellte sodann die Grenzbedingungen für die Trennungsfläche zweier krystallinischer Medien auf und nahm hierbei die Dichte des Aethers als constant an. Für jeden Punkt der Grenzfläche nahm er zwar die Gleichheit der Verschiebungen für beide Medien an, aber nicht mehr die Gleichheit des elastischen Druckes. Die von den beiden Medien auf den betrachteten Punkt ausgeübten Druckkräfte sind verschieden, und es wird noch ein fremder, auf die Grenzfläche wirkender, etwa von den wägbaren Theilchen herrührender Druck angenommen. Als Lösung ergab sich ein System von acht ebenen Wellen, vier in jedem Medium. Neben der Amplitude der gegebenen Welle können noch die von drei anderen willkürlich gewählt werden. Haben die entsprechenden Gleichungen nur reelle Wurzeln, so sind in jedem Mittel zwei einfallende Wellen vorhanden, und zwei, die reflectirt oder gebrochen sind. Man kann dann die Amplituden von drei einfallenden Wellen gleich Null setzen. Die Gleichungen können aber auch complexe Wurzeln haben. Die Strahlenrichtung wird in folgender Weise definirt. Man denke sich in dem Mittel, in welchem eine bestimmte ebene Lichtwelle fortschreitet, eine beliebige Ebene; man berechne die auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit des auf die Flächeneinheit bezogenen Druckes, der auf ein Element dieser Ebene von der einen Seite ausgeübt wird. Soll dann die genannte Arbeit verschwinden, so muss die betrachtete Ebene einer gewissen Richtung parallel sein; diese ist die Richtung des Strahles, der zu der betrachteten Lichtwelle gehört.

Eine weitere theoretische Behandlung hat die Theorie der Krystallreflexion in neuester Zeit erfahren durch W. Voigt[2]) und E. Ketteler[3]).

[1]) Abh. d. Berl. Akad. 1876. — [2]) Wied. Ann. XXI, XXIX. — [3]) Theoretische Optik.

XXXI.

Metallreflexion.

515. Reflexion des Lichtes an Metallflächen und an stark brechenden Flächen. Die Experimente Brewster's und Biot's.

Schon Malus hatte erkannt, dass bei der Reflexion an Metallflächen unter keiner Incidenz vollständige Polarisation eintritt. Fresnel's Theorie ist also auf die Metalle nicht auszudehnen, nicht einmal auf die stark brechenden Körper.

Im Jahre 1813 berichtigte Brewster die Ansicht von Malus, nach welcher die Metalle auf das natürliche Licht überhaupt nicht polarisirend wirken sollten. Er wies mittelst eines Polariskopes nach, dass das von einer Metallfläche reflectirte Licht allerdings polarisirt ist. Es ergab sich aus seinen Experimenten, dass das von einer Metallfläche reflectirte Licht zwar unter keiner Incidenz vollständig polarisirt wird, dass sich jedoch das reflectirte Licht wie partiell in der Einfallsebene polarisirtes Licht verhält, und dass es eine Incidenz giebt, bei welcher die Polarisation ein Maximum ist. Steht bei der Incidenz des Polarisationsmaximums der Hauptschnitt des Analyseurs der Einfallsebene parallel, so zeigt das ordentliche Bild ein Maximum der Intensität; beträgt der Winkel zwischen dem Hauptschnitte des Analyseurs und der Einfallsebene 45 Grade, so sind die beiden Bilder gleich hell.

Biot bestätigte diese Beobachtungen Brewster's und fügte die folgende Bemerkung hinzu: „Wenn die Polarisation in Folge einer einzigen Reflexion an einer Metallfläche unvollständig ist, so kann sie vollständig werden durch eine hinreichende Zahl von Reflexionen, welche unter demselben Winkel auf einander folgen.“

Erst im Jahre 1830 erschien wieder eine Arbeit von Brewster[1]) über diesen Gegenstand. Es ergab sich eine Menge interessanter Einzel-

[1]) *Phil. Trans.* 1830, p. 287.

heiten. Die neuen Untersuchungen hatten die Wirkung der Metallflächen auf das polarisirte Licht zum Gegenstande. Er studirte der Reihe nach die Fälle, wo das einfallende Licht in der Einfallsebene polarisirt ist, senkrecht zur Einfallsebene und in einer beliebigen Ebene, und fand, dass, die beiden ersteren Fälle ausgenommen, eine partielle Depolarisation eintritt, welche bei einem gewissen Incidenzwinkel ein Minimum ist.

An diese Arbeit schlossen sich im Jahre 1841 jene Senarmont's und im Jahre 1847 jene Jamin's an, ferner die Arbeiten Neumann's[1]), Quincke's[2]) und Anderer. Die letzteren Arbeiten gingen von theoretischen Gesichtspunkten aus, welche wir zunächst besprechen wollen.

516. Neumann's theoretische Gesichtspunkte.

Neumann[3]) nahm nach den Versuchen Brewster's an, dass das parallel oder normal zur Einfallsebene polarisirte Licht nach der Reflexion an einer Metallfläche in derselben Ebene polarisirt bleibt. In diesen beiden Fällen kann also nur die Amplitude und Phase des Strahles eine Veränderung erfahren. Ein in einer beliebigen Ebene polarisirter einfallender Strahl kann stets in zwei, parallel und normal zur Einfallsebene polarisirte Strahlen zerlegt werden, und es genügt demnach, zu untersuchen, wie diese beiden Strahlen durch die Metallreflexion modificirt werden. Würden nur die Amplituden eine Veränderung erfahren, so müsste die Wirkung der Reflexion in einer Drehung der Polarisationsebene bestehen und der reflectirte Strahl bliebe geradlinig polarisirt, was dem Experimente widerspricht. Man muss daher annehmen, dass bei der Metallreflexion eine Phasendifferenz zwischen den beiden, parallel und normal zur Einfallsebene polarisirten Strahlen entsteht, und es folgt hieraus, dass der reflectirte Strahl im Allgemeinen elliptisch polarisirt sein wird. Demnach müssen sich alle Wirkungen der Metallreflexion aus einer Annahme über die Amplituden- und Phasenveränderungen ergeben, welche die beiden Composanten des einfallenden Strahles bei der Reflexion erfahren. Ist dieser Gesichtspunkt richtig, so kann die von Brewster beobachtete Depolarisation nur eine elliptische Polarisation sein. Wir wollen nun einige Experimente anführen, welche zeigen, dass dem wirklich so ist.

517. Senarmont's und Mac Cullagh's Experimente.

Um die elliptische Polarisation des von Metallflächen reflectirten Lichtes zu erkennen, wandte Senarmont[4]) ein $\frac{\lambda}{4}$-Glimmerblättchen

[1]) Pogg. Ann. XXVI bis XL. — [2]) Ibid. CXXVIII. — [3]) Ibid. XXVI, 89. — [4]) *Ann. de chim. et de phys.* (2), LXXIII, 337.

an, dessen Hauptschnitt mit der Ebene der scheinbaren partiellen Polarisation zur Coincidenz gebracht wurde. In diese Ebene muss eine der Achsen der vermutheten Vibrationsellipse fallen, und der Strahl muss beim Durchgange durch das Glimmerblättchen in einen geradlinig polarisirten Strahl verwandelt werden. Wegen der sehr merklichen Dispersion der Glimmerplatte ist indessen diese Methode bei Anwendung weissen Lichtes unvollkommen und gestattete keine genaue Verification. Präcisere Beobachtungen stellte Mac Cullagh an, welcher die Glimmerplatte durch ein Fresnel'sches Parallelepiped ersetzte (475)[1]. Dieses wirkt auf Strahlen jeder Farbe nahezu in gleicher Weise.

Eine andere Bestätigung der elliptischen Natur der Polarisation der von Metallflächen reflectirten Strahlen liefert eine von Brewster im Jahre 1814 entdeckte und von Senarmont interpretirte Thatsache: wird ein geradlinig polarisirter Strahl zweimal von zwei identischen Metallflächen unter demselben Winkel, aber in zwei einen rechten Winkel bildenden Ebenen reflectirt, so ist derselbe nach den beiden Reflexionen geradlinig polarisirt.

In der That, es sei α der Winkel der Polarisationsebene des einfallenden Strahles mit der Einfallsebene, und es werde die Amplitude des einfallenden Strahles als Einheit genommen; dann kann dieser Strahl in zwei Strahlen zerlegt werden, einen in der Einfallsebene polarisirten von der Amplitude $\cos\alpha$ und einen senkrecht zur Einfallsebene polarisirten von der Amplitude $\sin\alpha$. Werden durch die Reflexion die Amplituden der beiden Composanten in den Verhältnissen $m:1$ und $n:1$ modificirt, und sind $2\pi\frac{\varphi}{\lambda}$ und $2\pi\frac{\psi}{\lambda}$ die Phasenänderungen der beiden Composanten, so sind die Vibrationsbewegungen der beiden Composanten des reflectirten Strahles

$$m\cos\alpha\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{\varphi}{\lambda}\right)$$

und

$$n\sin\alpha\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{\psi}{\lambda}\right).$$

Bei der zweiten Reflexion wird die Amplitude der ersten Composante im Verhältniss $n : 1$ und jene der zweiten Composante im Verhältniss $m : 1$ modificirt, und gleicherweise ist der Phasensprung für die erste Composante $2\pi\frac{\psi}{\lambda}$, und für die zweite $2\pi\frac{\varphi}{\lambda}$. Demnach ist die Vibrationsbewegung der beiden Composanten nach den beiden Reflexionen gegeben durch

$$n\,m\cos\alpha\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{\varphi+\psi}{\lambda}\right)$$

[1]) *Proceed. of the Ir. Acad.* I, 2, 159; II, 375.

und

$$m\,n\,sin\,\alpha\,sin\,2\,\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{\varphi+\psi}{\lambda}\right).$$

Der Strahl ist also nach den beiden Reflexionen geradlinig und in der ursprünglichen Ebene polarisirt.

Wir wollen nun die hauptsächlichsten Methoden angeben, welche zur Messung der mit der Metallreflexion verbundenen Amplituden- und Phasenveränderungen dienen können.

518. Intensitätsveränderung durch Reflexion.

Wir wollen zunächst in Kürze auf einige ältere Experimente über die Reflexion an Metallflächen zurückkommen. Bouguer theilt als Resultat zweier Beobachtungen mit, dass die Metalle das Licht weit kräftiger reflectiren als die durchsichtigen Körper, und dass das Reflexionsvermögen sich wenig mit der Incidenz verändert.

Genauere Versuche wurden im Jahre 1831 von Potter[1]) angestellt. Dieser liess das directe und das reflectirte Licht auf zwei verschiedene Stellen eines Schirmes fallen, und variirte die Lage der Lichtquelle so, dass sich gleiche Helligkeiten ergaben. Das Verhältniss der Intensitäten war dann gleich dem verkehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen. Der Incidenzwinkel liess sich bei diesen Experimenten nicht mit Genauigkeit angeben, doch konnte der mittlere Winkel genommen werden, das ist der Incidenzwinkel der Achse des auf die Metallfläche fallenden Lichtconus. Potter studirte die Reflexion am Spiegelmetall, Kupfer, Silber und Stahl. Er fand, dass das Reflexionsvermögen bei wachsendem Incidenzwinkel abnahm bis zu einem Winkel von ungefähr 60 Graden, dann zunahm und bei streifender Incidenz der Einheit gleich wurde. Es giebt also bei den Metallen einen Incidenzwinkel, für welchen das Reflexionsvermögen ein Minimum ist.

519. Incidenzwinkel des Minimums des Reflexionsvermögens bei stark brechenden Körpern.

Mac Cullagh[2]) bemerkte die Analogie zwischen dem Verhalten der Metalle und den Resultaten, welche sich aus Fresnel's Theorie für stark brechende durchsichtige Körper ergeben. Wir wollen sehen, ob sich bei solchen Körpern unter der Voraussetzung eines hinreichend grossen Brechungsexponenten ein Minimum des Reflexionsvermögens ergiebt.

---

[1]) *Phil. Mag.* (3), I, 56; IV, 6. — [2]) *Ir. Trans.* XXVIII.

Die Intensität eines natürlichen Strahles wird nach der Reflexion an einem durchsichtigen Körper, wenn die ursprüngliche Intensität gleich eins gesetzt wird (462):

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}+\frac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)}\right].$$

Betrachten wir r als Function von i und setzen wir die derivirte Function der Null gleich. Es ergiebt sich zur Bestimmung jenes i, welches einem Maximum oder Minimum der Intensität entspricht:

$$\frac{\sin(i-r)}{\sin^3(i+r)}\left[\cos(i-r)\sin(i+r)\left(1-\frac{dr}{di}\right)-\cos(i+r)\sin(i-r)\left(1+\frac{dr}{di}\right)\right]$$
$$+\frac{\tan(i-r)}{\tan^3(i+r)}\left[\frac{\tan(i+r)}{\cos^2(i-r)}\left(1-\frac{dr}{di}\right)-\frac{\tan(i-r)}{\cos^2(i+r)}\left(1+\frac{dr}{di}\right)\right]=0.$$

Man hat andererseits

$$\sin i = n\sin r$$

und

$$\frac{dr}{di}=\frac{\cos i}{n\cos r}.$$

Substituirt man dies und vereinfacht, so ergiebt sich

$$\cos(i-r)\sin(i+r)(n\cos r-\cos i)-\cos(i+r)\sin(i-r)(n\cos r-\cos i)$$
$$+\frac{\cos^3(i+r)}{\cos(i-r)}\left[\frac{\sin(i+r)}{\cos(i+r)\cos^2(i-r)}(n\cos r-\cos i)\right.$$
$$\left.-\frac{\sin(i-r)}{\cos(i-r)\cos^2(i+r)}(n\cos r+\cos i)\right]=0,$$

und

$$n\cos r\sin 2r-\cos i\sin 2i$$
$$+\frac{\cos(i+r)}{\cos^3(i-r)}(n\cos r\sin 2r\cos 2i-\cos i\sin 2i\cos 2r)=0,$$

oder, wenn man für $\sin 2i$ und $\sin 2r$ ihre Werthe setzt und die Gleichung $\sin i = n\sin r$ beachtet,

$$\sin i\left[\cos^2 r-\cos^2 i+\frac{\cos(i+r)}{\cos^3(i-r)}(\cos^2 r\cos 2i-\cos^2 i\cos 2r)\right]=0.$$

Drückt man $\cos^2 i$ und $\cos^2 r$ durch die entsprechenden Sinus aus, ferner $\cos 2i$ und $\cos 2r$ durch die Functionen der einfachen Winkel, so erhält man schliesslich:

$$\sin i(\sin^2 i-\sin^2 r)\left[1-\frac{\cos(i+r)}{\cos^3(i-r)}\right]=0.$$

Die beiden ersten Factoren annulliren sich nur für $i=0$.

Soll die Intensität bei einem gewissen Incidenzwinkel ein Minimum sein, so muss dieselbe von der normalen Reflexion an abnehmen, es muss für sehr kleine Werthe von i die Derivirte negativ sein. Da nun die Factoren $\sin i$ und $\sin^2 i-\sin^2 r$ stets positiv sind, muss

$$1 - \frac{\cos(i + r)}{\cos^3(i - r)} < 0$$

oder

$$\cos^3(i - r) < \cos(i + r).$$

Nun hat man in Rücksicht auf die Kleinheit von i angenähert

$$i = nr, \cos(i + r) = 1 - \frac{1}{2}(i + r)^2, \cos^3(i - r) = 1 - \frac{3}{2}(i - r)^2.$$

Die obige Bedingungsgleichung wird hierdurch

$$(i + r)^2 < 3(i - r)^2,$$

also

$$(n + 1)^2 < 3(n - 1)^2$$

und

$$n^2 - 4n + 1 > 0.$$

Da die Wurzeln der Gleichung

$$n^2 - 4n + 1 = 0$$

gleich $2 \pm \sqrt{3}$ und beide positiv sind, ist das Trinom positiv, wenn n grösser ist als $2 + \sqrt{3}$ oder kleiner als $2 - \sqrt{3}$. Die letztere Bedingung bleibt ausser Betracht, weil n stets grösser ist als eins. Demnach muss ein durchsichtiger Körper bei einer gewissen Incidenz ein Minimum des Reflexionsvermögens zeigen, sobald sein Brechungsexponent grösser ist als $2 + \sqrt{3}$. Die entsprechende Incidenz ist gegeben durch

$$\cos^3(i - r) = \cos(i + r).$$

520. Die Experimente Brewster's berechnet von Neumann.

Neumann[1]) hat eine Methode angegeben, die Intensitäten der beiden parallel und normal zur Einfallsebene polarisirten Composanten des reflectirten Strahles experimentell zu ermitteln: man misst die Intensität des reflectirten natürlichen Lichtes und das Intensitätsverhältniss der beiden rechtwinkelig polarisirten Composanten desselben.

Brewster hat gefunden, dass bei gewissen Incidenzwinkeln ein polarisirter Strahl, nachdem er unter demselben Winkel an einer Zahl identischer Metallflächen Reflexion erfahren hat, wieder geradlinig polarisirt erscheinen kann, so dass die Phasendifferenz der beiden Composanten des reflectirten Strahles alsdann Null oder gleich einer geraden Zahl halber Wellen ist.

Ist α der Winkel der Polarisationsebene des einfallenden Strahles mit der Einfallsebene, β der Winkel der Polarisationsebene des reflec-

[1]) Pogg. Ann. XXVI, 89.

tirten Strahles, nachdem p Reflexionen erfolgt sind und der Strahl wieder geradlinig polarisirt erscheint, wird ferner die Amplitude der parallel zur Einfallsebene polarisirten Composante bei jeder Reflexion im Verhältniss $m : 1$ reducirt, und die Amplitude der normal zur Einfallsebene polarisirten Composante im Verhältniss $n : 1$, so sind die Amplituden der beiden Composanten des Strahles nach der ersten Reflexion gleich $m \cos \alpha$ und $n \sin \alpha$, und nach p Reflexionen gleich $m^p \cos \alpha$ und $n^p \sin \alpha$.

Man hat demnach

$$\tang \beta = \left(\frac{n}{m}\right)^p \tang \alpha$$

und

$$\frac{n}{m} = \sqrt[p]{\frac{\tang \beta}{\tang \alpha}}.$$

Misst man mittelst der gewöhnlichen photometrischen Methoden das Reflexionsvermögen R der Metallfläche für die angewendete Incidenz, so hat man

$$R^2 = n^2 + m^2.$$

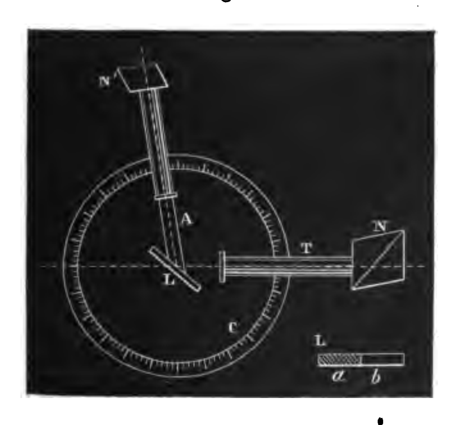
Die beiden so gefundenen Gleichungen bestimmen die Grössen m und n.

Neumann hat mehrere Bestimmungen dieser Art ausgeführt.

521. Die Versuche von Jamin.

Jamin [1]) hat zur Messung der Intensität des von einer Metallfläche reflectirten Lichtes ein indirectes Verfahren angewendet, welches keines hohen Grades der Genauigkeit fähig ist. Er verglich die Intensität des von einer Metallfläche reflectirten Lichtes mit der Intensität des von einer Glasfläche reflectirten. Man bestimmt die Incidenz, bei welcher diese Intensitäten gleich sind, berechnet mittelst der Fresnel'schen Formeln die Intensität des von der Glasfläche reflectirten Lichtes und hat so die Intensität des vom Metalle reflectirten.

Fig. 83.



Jamin's Apparat besteht aus einem horizontalen Theil-

[1]) *Ann. de chim. et de phys.* (3), XIX, 296.

kreise C, Fig. 83 (a. v. S.), in dessen Mitte sich eine Platte L in verticaler Lage befindet. Diese Platte ist zur Hälfte aus Glas und zur Hälfte aus Metall, die Trennungslinie vertical. Mittelst der innen geschwärzten und mit dem Nicol N versehenen Röhre T wird polarisirtes Licht auf die Platte geworfen. Die Alhidade A trägt ein doppeltbrechendes Prisma und ein kleines Galilei'sches Fernrohr. Man erhält im Analyseur zwei Bilder, deren jedes aus zwei im Allgemeinen verschieden gefärbten und verschieden hellen Hälften besteht, entsprechend den Reflexionen am Glase und am Metalle.

Nehmen wir die Intensität des einfallenden Lichtes zur Einheit und setzen wir dieses als in der Einfallsebene polarisirt voraus. Es ist dann die Intensität des am Glase reflectirten Lichtes gleich

$$\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}$$

und die Intensität des am Metalle reflectirten Lichtes kann gleich m^2 gesetzt werden.

Sei ferner α der Winkel des Hauptschnittes des Analyseurs mit der Einfallsebene; es ist dann die Intensität des ordentlichen Bildes in der dem Glase entsprechenden Hälfte gleich

$$\cos^2\alpha\,\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)},$$

und in der dem Metalle entsprechenden Hälfte gleich

$$m^2\cos^2\alpha;$$

die Intensität des ausserordentlichen Bildes ist in der einen Hälfte gleich

$$\sin^2\alpha\,\frac{\sin^2(i-r)}{\cos^2(i+r)}$$

und in der anderen gleich

$$m^2\sin^2\alpha.$$

Sucht man die Incidenz auf, bei welcher die beiden Bildflächen gleich hell erscheinen, so hat man

$$m^2=\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}.$$

Nimmt man andererseits den Incidenzwinkel beliebig und sucht man die Lage des Analyseurs auf, bei welcher die Intensität des ordentlichen Bildes des Glases jener des ausserordentlichen des Metalles gleich wird, so hat man

$$m^2\sin^2\alpha=\cos^2\alpha\,\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}$$

und

$$m^2=\cot^2\alpha\,\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}.$$

Oder sucht man den Winkel α' des Hauptschnittes des Analyseurs mit der Einfallsebene, für welchen die Intensität des ausserordentlichen Bildes des Glases jener des ordentlichen des Metalles gleich wird, so hat man zur Controle

$$m^2 = tang^2 \alpha' \frac{sin^2 (i - r)}{sin^2 (i + r)}.$$

Demnach wären die Winkel α und α' complementär. Da die gemessenen Winkel im Allgemeinen dieser Bedingung nicht mit voller Exactheit entsprechen, nimmt man das Mittel der beiden für m^2 gefundenen Werthe.

Ebenso geht man vor, wenn das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist. Die Exactheit dieser Messungen wird durch die ungleiche Farbe der zu vergleichenden Bilder ziemlich beeinträchtigt. Ueberdies liegen die zu vergleichenden Bilder nicht unmittelbar neben einander

Bei Anwendung des Jamin'schen Verfahrens muss man den Winkel r oder den Brechungsexponenten des Glases kennen. Jamin bestimmte denselben, indem er einen Strahl, dessen Polarisationsebene mit der Einfallsebene einen Winkel von 45 Graden bildete, auf die Platte fallen liess und das Polarisationsazimuth des reflectirten Strahles maass. Die Intensitäten der beiden parallel und normal zur Einfallsebene polarisirten Composanten des reflectirten Strahles sind

$$\frac{sin^2 (i - r)}{sin^2 (i + r)} \text{ und } \frac{tang^2 (i - r)}{tang^2 (i + r)};$$

folglich ist der Winkel β der Polarisationsebene des reflectirten Strahles mit der Einfallsebene

$$tang\, \beta = \frac{cos\, (i + r)}{cos\, (i - r)} = \frac{1 - tang\, i\; tang\, r}{1 + tang\, i\; tang\, r},$$

und es ist

$$tang\, i\; tang\, r = \frac{1 - tang\, \beta}{1 + tang\, \beta} = tang\, (45^0 - \beta)$$

und

$$tang\, r = \frac{tang\, (45^0 - \beta)}{tang\, i}.$$

Diese Gleichung bestimmt den Winkel r und den Brechungsexponenten n.

Die folgende Tafel enthält die Resultate Jamin's.

Stahl.

Incidenz-winkel	Gesammt-Reflexions-vermögen	In der Einfallsebene polarisirtes Licht		Normal zur Einfallsebene polarisirtes Licht		Verhältniss der Intensitäten
		Amplitude	Intensität	Amplitude	Intensität	
20°	0·600	0·780	0·608	0·770	0·593	0·975
30°	0·600	0·790	0·624	0·760	0·577	0·925
40°	0·540	0·780	0·608	0·688	0·473	0·778
50°	0·565	0·828	0·684	0·666	0·444	0·647
60°	0·600	0·897	0·805	0·630	9·397	0·493
70°	0·567	0·905	0·837	0·545	0·297	0·355
80°	0·595	0·945	0·893	0·547	0·298	0·334
85°	0·710	0·951	0·904	0·719	0·517	0·572

Spiegelmetall.

(2 Thle. Kupfer, 1 Thl. Zink, etwas Zinn.)

Incidenz-winkel	Gesammt-Reflexions-vermögen	In der Einfallsebene polarisirtes Licht		Normal zur Einfallsebene polarisirtes Licht		Verhältniss der Intensitäten
		Amplitude	Intensität	Amplitude	Intensität	
20°	—	0·838	0·736	—	—	—
30°	0·705	0·845	0·724	0·828	0·686	0·947
40°	0·660	0·832	0·692	0·793	0·629	0·909
50°	0·722	0·880	0·774	0·819	0·671	0·867
60°	—	0·894	0·779	—	—	—
70°	0·644	0·869	0·755	0·688	0·473	0·627
80°	0·675	0·959	0·921	0·655	0·429	0·466
86°	0·753	0·968	0·937	0·754	0·569	0·607

Diese Zahlen lassen erkennen, dass die Genauigkeit der Messungen keine grosse war. Doch geht so viel hervor, dass das Gesammtreflexionsvermögen zuerst abnimmt bis zu einer Incidenz von 50 bis 60 Graden,

dann zunimmt bis zur streifenden Incidenz, und dass demnach das Reflexionsvermögen durch ein Minimum geht. Das Verhältniss der Intensitäten der beiden parallel und normal zur Einfallsebene polarisirten Composanten des reflectirten Strahles nimmt ab bis zu einer Incidenz von ungefähr 80 Graden und wächst dann bis zur streifenden Incidenz.

522. Die calorimetrischen Versuche von Forbes, Provostaye und Desains.

Die calorimetrischen Messungen sind einer grösseren Genauigkeit fähig als die photometrischen, und haben die Resultate der letzteren bestätigt.

Forbes [1]) hat erkannt, dass das Reflexionsvermögen der Metalle für die Wärmestrahlen von der normalen Incidenz aus bis zu einem Minimum abnimmt, dann bis zur streifenden Incidenz zunimmt.

Provostaye und Desains [2]) haben Zahlen erhalten, welche mit den Zahlen Jamin's in guter Uebereinstimmung stehen. Von den zahlreichen Messungen dieser beiden Physiker sind die für Stahl erhaltenen Zahlen in der folgenden Tafel zusammengestellt.

Wärmestrahlen.

Incidenz-winkel	Polarisirt parallel zur Einfallsebene	Polarisirt normal zur Einfallsebene	Gesammt-Reflexions-vermögen
30⁰	0·640	0·566	0·603
50⁰	0·694	0·468	0·581
76⁰	0·870	0·271	0·570
80⁰	0·900	0·290	0·595

Bei diesen Experimenten diente die Sonne als Wärmequelle.

Jamin hatte für das Reflexionsvermögen des Stahles gefunden:

Incidenz 30⁰ . . . . 0·600
„ 50⁰ . . . . 0·565
„ 80⁰ . . . . 0·595

Die Uebereinstimmung ist demnach eine hinreichend gute. Die Zahlen, welche in der Tafel das Gesammtreflexionsvermögen für die Wärmestrahlen ergeben, wurden als arithmetisches Mittel der Intensitäten der beiden, parallel und normal zur Einfallsebene polarisirten, Compo-

[1]) Phil. Mag. (3), VIII, 246. — [2]) *Ann. de chim. et de phys.* (3), XXX, 276.

santen des reflectirten Strahles erhalten. Eine directe Messung des Gesammtreflexionsvermögens des Stahles für Wärmestrahlen bei einer Incidenz von 30 Graden ergab die Zahl 0·590.

Für das Spiegelmetall erhielten Provostaye und Desains die folgenden Zahlen:

Wärmestrahlen.

Incidenzwinkel	Polarisirt parallel zur Einfallsebene	Polarisirt normal zur Einfallsebene	Gesammt-Reflexionsvermögen
30^0	0·669	0·618	0·643
50^0	0·740	0·579	0·659
$72^0 30'$	0·895	0·415	0·655
80^0	0·938	0·440	0·689

Das Gesetz Potter's ist hier weniger ersichtlich; gleichwohl bemerkt man, dass von der normalen Incidenz an die Variation des Reflexionsvermögens eine geringe ist bis zu einer beträchtlichen Incidenz. Das Gesammtreflexionsvermögen des Spiegelmetalles ergab sich bei directer Messung unter der Incidenz von 30 Graden gleich 0·656.

Was das Verhältniss der Intensitäten der beiden Composanten anlangt, so ergiebt sich aus den von Provostaye und Desains für das Spiegelmetall gefundenen Zahlen:

Incidenzwinkel	30^0	50^0	$72^0 5'$	80^0
Verhältniss der Intensitäten . .	0·921	0·782	0·464	0·469

Diese Zahlen stimmen mit jenen Jamin's nicht sehr gut überein, was von einer verschiedenen Zusammensetzung der benutzten Legirungen herrühren könnte.

Provostaye's und Desains' Resultate mit Platin und Silber sind weniger genau. Die Platinplatte war schlecht polirt und die erhaltenen Zahlen verdienen kein Vertrauen. Bei Silber sind die Variationen des Gesammtreflexionsvermögens bei variirender Incidenz sehr gering. Ist die einfallende Wärme in der Polarisationsebene polarisirt, so ist das Reflexionsvermögen des Silbers bei einer Incidenz von 30 Graden gleich 0,8, und bei einer Incidenz von 80 Graden gleich 0·95. Steht die Polarisationsebene auf der Einfallsebene senkrecht, so sind die Variationen des Reflexionsvermögens kaum merkbar.

Provostaye und Desains haben auch die Abhängigkeit des Reflexionsvermögens von der Wellenlänge nachgewiesen. Gold und Kupfer zeigten für verschiedene Stellen des Wärmespectrums ein ver-

schiedenes Reflexionsvermögen. Ebenso verhält es sich bei Silber, Stahl, Spiegelmetall, Platin und allen weissen Metallen. Bei allen diesen Metallen findet die Abhängigkeit des Reflexionsvermögens von der Wellenlänge im selben Sinne statt.

Bei einer Incidenz von 30 Graden ergaben sich die folgenden Zahlen:

	Gesammtreflexionsvermögen	
	Lampe von Locatelli	Lampe mit einer Glasplatte von 5 mm Dicke
Spiegelmetall	0·835	0·740
Silber	0·955	0·910
Platin	0·790	0·655

Dies Alles zusammengefasst: fällt natürliches Licht ein, so nimmt das Reflexionsvermögen der Metalle von der normalen Incidenz an ab bis zu einer Incidenz zwischen 50 und 60 Graden, um dann bis zur streifenden Incidenz zu wachsen.

Ist das einfallende Licht in der Einfallsebene polarisirt, so wächst das Reflexionsvermögen von der normalen bis zur streifenden Incidenz beständig.

Ist das einfallende Licht normal zur Einfallsebene polarisirt, so nimmt das Reflexionsvermögen von der normalen Incidenz an ab bis zu einem Minimum, und wächst dann bis zur streifenden Incidenz.

Auch Knoblauch beschäftigte sich[1]) mit der Bestimmung der Intensität der unter wachsendem Einfallswinkel zurückgeworfenen Strahlen, und zwar insbesondere der Wärmestrahlen. Die Wärmestrahlen wurden vor der Reflexion in einer zur Reflexionsebene parallelen, oder zu dieser normalen, endlich in einer unter 45° geneigten Ebene polarisirt. Die reflectirten Strahlen fielen auf eine mit einem Multiplicator verbundene Thermosäule, welche sie vollständig auffing. Als Maass der Intensität wurden die Ablenkungen der Multiplicatornadel angesehen.

Die untersuchten Körper waren Stahl, Nickel, Zink, Neusilber, Kupfer, Gold, Silber, Messing. Es ergab sich eine Bestätigung der Sätze, dass die in der Einfallsebene polarisirten Strahlen mit desto grösserer Intensität zurückgeworfen werden, je grösser ihr Einfallswinkel ist, und dass die normal zur Einfallsebene polarisirten Strahlen anfangs mit desto geringerer Intensität reflectirt werden, je grösser der Einfallswinkel wird, bis zu einem, für verschiedene Metalle verschiedenen Incidenzwinkeln entsprechenden, Minimum, worauf wieder eine Intensitätszunahme folgt. Knoblauch's Untersuchungen bestätigten ferner[2]) den Satz, dass bei der Reflexion polarisirter Wärmestrahlen von Metallen die Strahlen ver-

[1]) Pogg. Ann. LXXIV, CI; Wied. Ann. I, X, XIX, XXIV. — [2]) Wied. Ann. X.

schiedener Wellenlänge sich ungleich verhalten, und dass die Polarisationswinkel für die kurzwelligen Strahlen kleiner sind als für die langwelligen, wie Jamin schon früher gefunden hatte.

523. Phasenänderung durch Reflexion.

Senarmont hat[1]), um die Phasenveränderungen zu messen, zwei Methoden angewendet, von welchen die erste in der Ausführung auf Schwierigkeiten stösst.

Die zweite Methode hat ebenfalls keine sehr genauen Resultate ergeben. Er liess das durch die Metallreflexion elliptisch polarisirte Licht durch einen doppeltbrechenden Analyseur treten und brachte den letzteren in solche Lage, dass die beiden Bilder gleich hell erschienen. Alsdann bildete der Hauptschnitt des Analyseurs mit den Achsen der Ellipse Winkel von 45 Graden. Das Achsenverhältniss der Ellipse wurde mittelst eines $\frac{\lambda}{4}$-Glimmerblättchens bestimmt. Der hindurchtretende elliptisch polarisirte Strahl verwandelt sich in einen geradlinig polarisirten, und die Tangente des Winkels der Polarisationsebene des austretenden Strahles mit dem Hauptschnitte der Glimmerplatte giebt das Achsenverhältniss der Vibrationsellipse. Kennt man aber die Richtung der Achsen und ihr Grössenverhältniss, so findet man durch Rechnung die Phasendifferenz und das Intensitätsverhältniss der beiden parallel und normal zur Einfallsebene polarisirten Composanten des reflectirten Strahles.

Auch diese Methode gab wenig genaue Resultate, da das $\frac{\lambda}{4}$-Blättchen auf Strahlen von verschiedener Farbe verschieden einwirkt und die Messungen nicht mit homogenem Lichte angestellt wurden.

524. Die Methode Neumann's.

Neumann hat eine Methode angegeben, welche von dem Intensitätsverhältnisse der Composanten des reflectirten Strahles unabhängig ist. Es handelt sich um eine Modification der Experimente Brewster's, welcher durch eine Anzahl m-Reflexionen in derselben Ebene und unter derselben Incidenz die geradlinige Polarisation des einfallenden Strahles wieder herstellte. Man kann mittelst eines solchen Experimentes die Phasendifferenz ableiten, welche bei einer einzigen Reflexion zwischen den beiden Composanten entsteht.

---

[1]) *Ann. de chim. et de phys.* (3), XX, 397.

In der That, damit nach m-Reflexionen, welche in derselben Ebene und unter derselben Incidenz vor sich gehen, die geradlinige Polarisation wieder hergestellt sei, muss die Phasendifferenz einer ganzen Zahl n halber Wellenlängen gleich geworden sein, und da jede einzelne Reflexion dieselbe Phasendifferenz hervorbringt, ist die einer einzigen Reflexion entsprechende Phasendifferenz gleich $\frac{n}{m}\frac{\lambda}{2}$.

Man weiss, dass die Metalle keinen Winkel der totalen Polarisation haben, und dass die normal zur Einfallsebene polarisirte Composante sich gegen die parallel polarisirte stets in Phasenverzögerung befindet. Variirt man den Incidenzwinkel zwischen 0 und 90 Graden, so ändert sich die Phasendifferenz continuirlich, während sie sich bei den durchsichtigen Körpern sprungweise ändert. Sucht man hierbei jene Incidenzen auf, für welche die geradlinige Polarisation durch die m Reflexionen wieder hergestellt wird, so sind die entsprechenden Phasendifferenzen $\frac{1}{m}\frac{\lambda}{2}, \frac{2}{m}\frac{\lambda}{2}, \frac{3}{m}\frac{\lambda}{2} \cdots$ Man erhält so den Incidenzwinkel, bei welchem die durch die Reflexion hervorgebrachte Phasendifferenz einen gegebenen Bruchtheil von $\frac{\lambda}{2}$ beträgt.

Für $m = 2$, d. i. bei zwei Reflexionen, giebt es eine einzige Incidenz, welche die geradlinige Polarisation wieder herstellt. Diese Incidenz entspricht der Phasendifferenz $\frac{\lambda}{4}$, und das Experiment lehrt, dass dieser Incidenzwinkel mit dem Einfallswinkel der grössten Polarisation zusammenfällt, wo nämlich die senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Composante des reflectirten Strahles die kleinste Intensität zeigt.

525. Die Experimente Jamin's.

Jamin hat zur Messung der Phasendifferenzen, welche bei der Metallreflexion zwischen den beiden Composanten des reflectirten Strahles entstehen, einige Experimente angestellt [1]).

Im Centrum des horizontalen Theilkreises des Jamin'schen Apparates (Fig. 83) ist ein um eine verticale Achse drehbares Tischchen angebracht. Auf diesem befinden sich zwei Platten aus jenem Metalle, mit welchem man experimentiren will, in verticaler Lage einander parallel gegenübergestellt.

Eine der beiden Platten ist fest, die andere lässt sich mittelst einer Mikrometerschraube derart bewegen, dass die gegenseitige Distanz der beiden Platten variirt werden kann. Um die einer gegebenen Phasen-

---

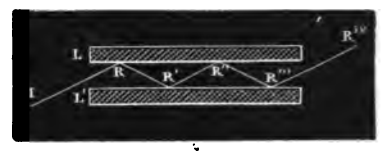
[1]) *Ann. de chim. et de phys.* (3), XIX, 296.

differenz entsprechende Incidenz zu finden, schickt man den einfallenden Strahl durch einen Polariseur und den reflectirten durch einen Analyseur. Man macht ursprünglich die Distanz der Platten hinreichend gross, damit nur zwei Reflexionen stattfinden, Fig. 84, und dreht hier-

Fig. 84.



Fig. 85.



auf das Tischchen, bis das reflectirte Licht als geradlinig polarisirt befunden wird. Der zugehörige Incidenzwinkel entspricht einer Phasendifferenz $\frac{\lambda}{4}$ der beiden Composanten des einmal reflectirten Strahles.

Um vier Reflexionen zu erhalten, Fig. 85, nähert man die beiden Platten einander. Indem man das Tischchen dreht, bestimmt man die Incidenzwinkel, bei welchen die geradlinige Polarisation wieder hergestellt erscheint. Man findet drei Incidenzwinkel, und diesen entsprechen Phasendifferenzen gleich $\frac{3}{4}\frac{\lambda}{2}$, $\frac{2}{4}\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{1}{4}\frac{\lambda}{2}$, oder $\frac{3\lambda}{8}$, $\frac{\lambda}{4}$, $\frac{\lambda}{8}$.

Bei noch grösserer gegenseitiger Annäherung der Platten wurden sechs Reflexionen erhalten und fünf Incidenzwinkel, bei welchen Wiederherstellung der geradlinigen Polarisation stattfand. Diese fünf Incidenzwinkel entsprechen Phasendifferenzen gleich $\frac{5}{6}\frac{\lambda}{2}$, $\frac{4}{6}\frac{\lambda}{2}$, $\frac{3}{6}\frac{\lambda}{2}$, $\frac{2}{6}\frac{\lambda}{2}$, $\frac{1}{6}\frac{\lambda}{2}$ oder $\frac{5\lambda}{12}$, $\frac{\lambda}{3}$, $\frac{\lambda}{4}$, $\frac{\lambda}{6}$, $\frac{\lambda}{12}$.

Bei einer geraden Zahl Reflexionen ist der austretende Strahl allen Incidenzstrahlen parallel und der Analyseur bleibt in derselben Lage. Ist jedoch die Zahl der Reflexionen eine ungerade, so wechselt der austretende Strahl die Richtung bei jeder Drehung des Tischchens. Man kann die hierbei nöthige Bewegung des Analyseurs durch einen Mechanismus hervorbringen, welcher bewirkt, dass der Analyseur sich doppelt so schnell dreht als das Tischchen.

Die folgende Tabelle enthält einen Theil der Messungsresultate Jamin's:

Phasendifferenz in Bruchtheilen von $\frac{\lambda}{2}$	Incidenzwinkel		
	Stahl	plattirtes Silber	Zink
0·9	$45^0 27'$	$37^0 10'$	$43^0 47'$
0·8	$58^0 37'$	$50^0 37'$	$60^0 49'$
0·7	—	$60^0 10'$	$69^0 5'$
0·6	$71^0 50'$	$66^0 29'$	75
0·5	76^0	72^0	$79^0 13'$
0·4	79^0	$76^0 42'$	$82^0 20'$
0·3	—	$80^0 20'$	—
0·2	84^0	$80^0 50'$	$86^0 40'$

Für die Phasendifferenzen 0·9, 0·7, 0·3 wurde nur eine Messung angestellt; für die Phasendifferenzen 0·8, 0·6, 0·4 wurde das Mittel von zwei Bestimmungen genommen, und für die Phasendifferenz 0·5 wurden fünf Reihen von Messungen durchgeführt mit 2, 4, 8 und 10 Reflexionen.

In der obigen Tabelle ist die Phasendifferenz für die normale Incidenz gleich $\frac{\lambda}{2}$ gesetzt.

526. Die Versuche Quincke's.

Quincke analysirte das von Metallen reflectirte Licht mittelst des Babinet'schen Compensators (257). Bildet die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes mit der Einfallsebene den Winkel α, so kann man die Amplitude des einfallenden Lichtes parallel und normal zur Einfallsebene in die Composanten $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ zerlegen. Nach der Reflexion sind diese Composanten $S \sin\alpha$ und $P \cos\alpha$, und überdies ist zwischen denselben ein Gangunterschied entstanden. Compensirt man den letzteren mittelst des Babinet'schen Compensators, so erhält man wieder geradlinig polarisirtes Licht, dessen Polarisationsebene mit der Einfallsebene den Winkel β bilde. Dann ist

$$\tang \beta = \frac{S}{P} \cdot \tang \alpha = k \cdot \tang \alpha$$

und

$$k = \frac{\tang \beta}{\tang \alpha}.$$

Ist $\alpha = 45^0$ und der Einfallswinkel gleich dem Polarisationswinkel oder Haupteinfallswinkel, so hat man $k = \tang \beta$, und β heisst alsdann

das Hauptazimuth, und die Tangente dieses Winkels giebt das Verhältniss k nach der Reflexion unter dem Haupteinfallswinkel, wenn die Composanten vor der Reflexion gleich intensiv waren.

Es ergab sich aus den Versuchen Quincke's wie aus jenen Jamin's, dass die Phasendifferenz der beiden Composanten zwischen den Incidenzen 0^0 und 90^0, zwischen 0 und $\frac{\lambda}{2}$ (oder umgekehrt) variirt, ferner dass dieselbe beim Haupteinfallswinkel gleich $\frac{\lambda}{4}$ ist, und dass der senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Strahl gegen den parallel polarisirten zurückbleibt.

Die folgende Tabelle Quincke's bezieht sich auf Reflexion von Silber. Das einfallende Licht war gegen die Einfallsebene unter einem Winkel von 45^0 polarisirt und das reflectirte Licht wurde mittelst eines rothen Glases nahe homogen gemacht. Die Berechnung geschah mittelst der später zu besprechenden Cauchy'schen Formel. β ist der Winkel der Polarisationsebene des reflectirten Lichtes mit der Einfallsebene, k das Amplitudenverhältniss der beiden reflectirten Composanten, δ die Phasendifferenz ausgedrückt in $\frac{\lambda}{4}$.

Einfalls-winkel	β beobachtet	$k = tang\,\beta$	β berechnet	δ beobachtet	δ berechnet
25^0	$45^0\,59'$	1·023	$44^0\,49'$	0·039	0·070
35^0	$44^0\,45'$	0·991	$44^0\,37'$	0·165	0·143
45^0	$43^0\,44'$	0·957	$44^0\,22'$	0·248	0·249
55^0	$43^0\,12'$	0·939	$44^0\,11'$	0·389	0·404
65^0	$43^0\,45'$	0·957	$43^0\,36'$	0·619	0·633
$74^0\,50'$	$43^0\,20'$	0·943	$43^0\,20'$	1	1
80^0	$44^0\,2'$	0·967	$43^0\,29'$	1·262	1·267
85^0	$45^0\,14'$	1·008	$44^0\,3'$	1·621	1·613

527. Abhängigkeit der Phasendifferenz von der Farbe.

Die bei der Metallreflexion zwischen den beiden Componenten des reflectirten Strahles entstehende Phasendifferenz ist weit mehr von der Farbe abhängig, als es die Intensitätsveränderungen der Composanten sind.

Jamin[1]) bestimmte für eine grosse Zahl von Metallen die Winkel des Polarisationsmaximums der verschiedenen Spectralfarben, indem er

[1]) *Ann. de chim. et de phys.* (3), XXII, 311.

den Incidenzwinkel maass, bei welchem zwei Reflexionen die geradlinige Polarisation wieder herstellten. Er gelangte zu dem Resultate, dass die Winkel des Polarisationsmaximums, von der Normale aus gezählt, bei zunehmender Brechbarkeit abnehmen.

Zu diesem letzteren Gesetze gelangten später auch Knoblauch (522) und Mouton[1]). Die Relation $tang\, i = n$ lehrt, dass bei den durchsichtigen Körpern das Gegentheil stattfindet. Das Brewster'sche Gesetz (472) gilt also für die Metallreflexion nicht mehr.

Die von Jamin gefundenen Variationen sind ziemlich beträchtlich. Bei Wasser und Schwefelkohlenstoff gaben die Strahlen B und H des Spectrums die folgenden Winkel des Polarisationsmaximums.

	Wasser	Schwefelkohlenstoff
Strahl B	53° 5′	58° 17′
Strahl H	53° 21′	59° 34′

Bei den Metallen sind die Differenzen weit grösser, wie die folgende Tabelle zeigt, welche die Winkel des Polarisationsmaximums verschiedener Metalle enthält.

Farbe	Silber	Glocken-metall	Stahl	Zink	Spiegel-Metall	Kupfer	Messing
Aeusserstes Roth	75° 45′	75° 16′	77° 52′	75° 45′	76° 45′	—	—
Roth	75°	74° 15′	77° 4′	75°	76° 14′	71° 21′	71° 31′
Gelb	72° 15′	73° 22′	76° 26′	73° 43′	73° 36′	69° 3′	69° 38′
Blau	68° 11′	70° 47′	75° 23′	71° 45′	72°	67° 44′	66° 11′
Violett	—	70° 11′	74° 3′	70° 49′	71° 22′	66° 56′	64° 16′
Aeusserstes Violett . . .	65°	69° 31′	73° 19′	70° 4′	70° 42′	—	—

Noch genauere Versuche wurden von Quincke[2]) angestellt, welcher Haupteinfallswinkel und Hauptazimuth einer Reihe von Metallen nach einem dem Jamin'schen ähnlichen Verfahren bestimmte. Beispielsweise ergab sich für den Haupteinfallswinkel:

---

1) *C. R.* LXXXVI. — 2) Pogg. Jubelb.

Farbe	Silber unpolirt	Silber polirt	Stahl	Kupfer	Messing
C	72° 30′	74° 5′	76° 20′	71° 21′	74° 19′
D	70° 42′	72° 16′	75° 28′	69° 9′	71° 41′
E	68° 40′	70° 22′	74° 46′	66° 3′	68° 59′
F	67° 18′	68° 44′	73° 56′	63° 19′	66° 50′
G	64° 13′	66° 14′	72° 29′	62° 20′	63° 11′

Mouton[1]) verfuhr calorimetrisch mittelst einer Thermosäule. Es wurden auf die Reflexion der Wärmestrahlen untersucht: polirter Stahl, Spiegelmetall und Spiegel aus platinirtem Glase. Es ergab sich beispielsweise für das Amplitudenverhältniss k und den Gangunterschied nach der Reflexion:

Einfallswinkel	Spiegelmetall			
	λ_1		λ_2	
	δ	k	δ	k
60°	0·08	0·88	—	—
65°	0·11	0·80	0·06	0·84
70°	0·15	0·70	0·10	0·78
75°	0·20	0·61	0·16	0·70
80°	0·30	0·65	0·26	0·62

In dieser Tabelle ist das Amplitudenverhältniss vor der Reflexion gleich 1 angenommen und der Gangunterschied der parallel und normal zur Einfallsebene polarisirten Composanten für die normale Reflexion gleich 0 gesetzt und für die übrigen Incidenzen in Bruchtheilen einer Welle angegeben. Die Messungen beziehen sich auf Wärmestrahlen, deren Wellenlängen zu $\lambda_1 = 0·0010$ und $\lambda_2 = 0·0014$ mm bestimmt worden waren.

Die allgemeinen Resultate sind dieselben, wie bei den leuchtenden Strahlen. Die Gangunterschiede wachsen von Null bei senkrechter Incidenz bis $\frac{\lambda}{2}$ bei streifender. Das Verhältniss der Intensitäten der parallel und normal zur Einfallsebene polarisirten Strahlen ist 1 bei senkrechter Incidenz, nimmt bis zu einem Minimum ab, welches mit $\delta = \frac{\lambda}{4}$ zusammenfällt, um dann wieder bis 1 zuzunehmen.

[1]) *C. R.* LXXXIV, LXXXVI.

Die folgende Tabelle Mouton's bezieht sich auf die Gangunterschiede δ bei Stahl.

Einfalls-winkel	Thallium $\lambda = 0\cdot000534$	Natrium $\lambda = 0\cdot000588$	$\lambda_1 =$ 0·0010	$\lambda_2 =$ 0·0014	$\lambda_3 =$ 0·0018
40⁰	0·040	0·030	0·00	0·00	0·00
45⁰	0·060	0·045	0·00	0·00	0·00
50⁰	0·080	0·065	0·02	0·00	0·00
55⁰	0·100	0·085	0·03	0·01	0·00
60⁰	0·115	0·105	0·05	0·03	0·01
65⁰	0·155	0·145	0·09	0·06	—
70⁰	0·200	0·185	0·15	0·10	—
75⁰	0·250	0 240	0·19	0·15	0·12
76⁰	—	0·250	—	—	—
79⁰	—	—	0·25	—	—
80⁰	0·320	0·310	0·26	0·20	0·18
82⁰	—	—	0·31	0·25	0·22
83½⁰	—	—	—	—	0·25

Die Bestimmungen für die Thallium- und Natriumlinie wurden mit dem Babinet'schen Compensator ausgeführt. Die Haupteinfallswinkel, welche dem Gangunterschiede 0·25 entsprechen, nehmen, wie aus der Tabelle ersichtlich ist, mit zunehmender Wellenlänge zu. Es ergiebt sich auch das bemerkenswerthe Resultat: je grösser die Wellenlänge des einfallenden Lichtes ist, um so grösser ist das Intervall, in dem sich die Metalle wie Glas verhalten, indem der Gangunterschied Null oder sehr klein ist.

Versuche über Reflexion an Metallen in verschiedenen Flüssigkeiten sind angestellt von Quincke und Conroy [1]). Beispielsweise ergab sich der Haupteinfallswinkel für Gold zu 76⁰ in Luft, 72·46⁰ in Wasser und 70·03⁰ in Schwefelkohlenstoff.

Es giebt Körper, welche in Bezug auf die Reflexion zwischen den durchsichtigen und den metallischen Körpern stehen, so chrysaminsaures Kali. Brewster [2]) fing das von pulverisirtem chrysaminsaurem Kali reflectirte Licht mittelst eines doppeltbrechenden Prismas auf, und fand, dass das in der Einfallsebene polarisirte Licht ungefärbt, hingegen das normal zur Einfallsebene polarisirte lebhaft gefärbt war. Dieses Experiment blieb vereinzelt, bis Haidinger [3]) zeigte, dass eine grosse Zahl von

[1]) *Proc. Roy. Soc.* XXVIII. — [2]) *Phil. Trans.* 1829. — [3]) Wien. Ber. XXXVI.

Körpern sich ebenso verhalten: das reflectirte, normal zur Einfallsebene polarisirte Licht ist gefärbt und verschwindet bei keiner Incidenz; das parallel zur Einfallsebene polarisirte Licht erscheint bei allen Incidenzen farblos.

Stokes[1]) hat zuerst diese Versuche mit homogenem Lichte angestellt. Es zeigte sich, dass die in Rede stehenden Körper sich bei der Reflexion gegen gewisse Farben wie Metalle verhalten und dieselben elliptisch polarisiren; gegen Strahlen von anderer Farbe hingegen wie durchsichtige Körper, indem sie unter dem Polarisationswinkel natürliches Licht von solcher Farbe vollständig polarisiren. So verhält sich Carthamin wie ein durchsichtiger Körper gegen die rothen Strahlen und wie ein Metall gegen die grünen und blauen Strahlen.

Stokes erkannte, dass eine grosse Zahl von Substanzen derart für Strahlen von gewissen Farben durchsichtig sind und Strahlen von anderen Farben wie Metalle reflectiren, so dass eine Färbung durch Reflexion hervorgebracht wird. Eisenglanz ertheilt den rothen Strahlen, für welche er einigermaassen durchsichtig ist, einen geringen Grad elliptischer Polarisation, hingegen den Strahlen von anderer Farbe um so beträchtlichere elliptische Polarisation, je brechbarer dieselben sind. Es erklärt sich hieraus, warum Eisenglanz blau erscheint, wenn er normal zur Einfallsebene polarisirtes Licht unter dem Polarisationswinkel reflectirt, indem unter diesen Umständen die rothen Strahlen fast vollständig fehlen.

Studien über die Reflexion des Lichtes an übermangansaurem Kali sind gemacht von Stokes[2]), E. Wiedemann[3]) und J. Conroy[4]).

E. Wiedemann[5]) hat ferner zahlreiche Messungen der elliptischen Polarisation bei der Reflexion an Fuchsin und Anilinviolett für eine Reihe von Einfallswinkeln und für verschiedene Fraunhofer'sche Linien ausgeführt. Diese Körper verhielten sich in Bezug auf den Gang ihrer Verzögerungen in ihren durchsichtigen Theilen analog den durchsichtigen Körpern, in den undurchsichtigen analog den Metallen. Ebensolche Messungen an salzsaurem Rosanilin (Fuchsin) sind von O. Glan[6]) durchgeführt.

528. Erklärung einiger Experimente Brewster's.

Das Vorstehende giebt den Schlüssel zur Erklärung mehrerer, von Brewster angestellter Experimente.

Ist α der Winkel der Polarisationsebene des auf die Metallfläche fallenden Strahles mit der Einfallsebene, so sind die Amplituden der

---

[1]) *Phil. Mag.* (4), VI, 393; *Ann. de chim. et de phys.* (3), XLVI, 504. — [2]) Pogg. Ann. XCI. — [3]) Ibid. CLI. — [4]) *Phil. Mag.* (5), VI. — [5]) Pogg. Ann. CLI. — [6]) Wied. Ann. VII.

parallel und normal zur Einfallsebene polarisirten Composanten des einfallenden Strahles gleich $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$, und es sind die Composanten des reflectirten Strahles gleich $m \cos\alpha$ und $n \sin\alpha$. Andererseits führt die dem Polarisationsmaximum entsprechende Incidenz zwischen den beiden Composanten eine Phasendifferenz gleich $\frac{\lambda}{4}$ ein, und man kann je zwei Incidenzen, i, i', von welchen die eine grösser, die andere kleiner ist, als die Incidenz des Polarisationsmaximums, so paaren, dass die Summe der den beiden Incidenzen entsprechenden Phasendifferenzen gleich $\frac{\lambda}{2}$ ist.

Wird der unter dem Polarisationsazimuthe α polarisirte Strahl zuerst unter der Incidenz i und sodann unter der Incidenz i' reflectirt, so ist die gesammte Phasendifferenz gleich $\frac{\lambda}{2}$ und der Strahl ist bei seinem Austritte geradlinig polarisirt. Ist β der Winkel der Polarisationsebene des zweimal reflectirten Strahles mit der Einfallsebene, so hat man

$$tang\,\beta = -\frac{n n' \sin\alpha}{m m' \cos\alpha} = -\frac{n n'}{m m'}\,tang\,\alpha,$$

wo m' und n' sich auf die zweite Reflexion beziehen. Hat man

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'},$$

so ergiebt sich

$$tang\,\beta = -\left(\frac{n}{m}\right)^2 tang\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Diese letztere Gleichung wurde experimentell verificirt, und man kann hieraus schliessen, dass, wenn ein Strahl nach zwei Reflexionen geradlinig polarisirt erscheint, das Intensitätsverhältniss der beiden Composanten des reflectirten Strahles für beide Incidenzen dasselbe ist.

Jamin hat durch Messungen nachgewiesen, dass die beiden Incidenzen, welche die geradlinige Polarisation wieder herstellen, Phasendifferenzen entsprechen, deren Summe $\frac{\lambda}{2}$ ist.

Brewster hat empirisch eine Relation zwischen der Phasendifferenz und dem Incidenzwinkel gesucht; er wurde hierbei darauf geführt, in diese Relation den Radiusvector einer Ellipse einzuführen, und es ist merkwürdig genug, dass daher die Bezeichnung „elliptische Polarisation“ bei der Metallreflexion rührt, welche Bezeichnung sich erst später als völlig zutreffend erwiesen hat.

Jamin untersuchte, bei welchem Azimuthe der Polarisationsebene des einfallenden Strahles die Achsen der Vibrationsellipse des reflectirten Strahles mit der Einfallsebene Winkel von 45 Graden bilden; er liess zu

diesem Zwecke den reflectirten Strahl durch ein doppeltbrechendes Prisma treten und variirte das Azimuth der Polarisationsebene des einfallenden Strahles, bis die beiden Bilder des Analyseurs gleich hell erschienen. Man hat dann

$$m \cos\alpha = n \sin\alpha$$

und

$$\frac{m}{n} = tang\,\alpha.$$

Es ist dies eine gute Methode, um das Intensitätsverhältniss der beiden Composanten des reflectirten Strahles bei einer gegebenen Incidenz zu finden, und um die Formel (1) Brewster's zu verificiren.

Es ist auch leicht, die folgende Beobachtung Brewster's zu erklären. Stellen p Reflexionen die geradlinige Polarisation wieder her, und lässt man den Strahl eine ganze Zahl mal p Reflexionen erfahren, so nähert sich die Polarisationsebene des reflectirten Strahles um so mehr der Einfallsebene, je grösser die Zahl ist, mit welcher p multiplicirt erscheint.

In der That, nach p Reflexionen hat man für den Winkel der Polarisationsebene des reflectirten Strahles mit der Einfallsebene

$$tang\,\beta = \pm \left(\frac{n}{m}\right)^2 tang\,\alpha,$$

nach $2p$ Reflexionen hat man

$$tang\,\beta' = \pm \left(\frac{n}{m}\right)^{2p} tang\,\alpha,$$

u. s. w. Da man nun weiss, dass $\frac{n}{m}$ stets ein echter Bruch ist, so nähert sich die Polarisationsebene immer mehr der Einfallsebene. Diese Annäherung ist um so merkbarer, je kleiner $\frac{n}{m}$ ist, d. i. je mehr sich der Einfallswinkel dem Winkel des Polarisationsmaximums nähert.

Weitere Versuche über die bei der Reflexion auftretenden Phasenveränderungen wurden von G. Quincke[1]) und Wernicke[2]) angestellt.

529. Die Versuche Wernicke's.

Wernicke hat mittelst der Interferenzen Versuche über die Phasenveränderungen angestellt, welche homogenes Licht bei normaler Reflexion an halbmetallischen und metallischen Körpern erfährt.

Die Strahlen traten durch eine Seitenöffnung in das Collimatorrohr eines Spectrometers und wurden von einer Glasplatte nach der Collimator-

[1]) Optische Experimentaluntersuchungen, Pogg. Ann. CXLII. — [2]) Berl. Monatsber. 1875.

spalte geworfen. Nach dem Durchgange durch dieselbe trafen die Strahlen senkrecht auf ein durchsichtiges dünnes Glasblättchen L, wurden an beiden Grenzflächen desselben zurückgeworfen und nahmen sodann den Weg durch den Spalt, die Glasplatte, die Collimatorlinse, das Prisma und das Beobachtungsfernrohr. Das Spectrum zeigte ein System dunkler Streifen, welche von der Interferenz der an den beiden Flächen der Lamelle L reflectirten Strahlen herrührten, indem das Resultat der Interferenz eine Function der Farbe ist. Brachte man die obere Hälfte der vom Spalte abgekehrten Fläche der Lamelle L mit einem Medium A, die untere mit einem anderen Medium B in Berührung, so beobachtete man zwei Streifensysteme dicht über einander. Die Verschiebungen derselben gegen einander gaben die relative Phasenänderung an, welche das Licht erleidet bei Reflexion in der Lamelle einerseits am Körper A, andererseits am Körper B. Es liessen sich selbst geringe Phasenänderungen erkennen, und zwar für so viel verschiedene Strahlen, als Streifen im Spectrum vorhanden waren.

Zunächst ergab sich für durchsichtige Medien: Bei senkrechter Incidenz ist die relative Phasenänderung (Differenz der Phasenänderungen bei Reflexion an A und B) Null, wenn A und B entweder beide kleinere oder beide grössere Brechungsexponenten haben als die Lamelle L; hingegen ist die relative Phasendifferenz 180^0, wenn der Brechungsexponent von L zwischen den Brechungsexponenten von A und B liegt. Dies stimmt mit den Fresnel'schen Formeln überein.

Sodann wurden Versuche angestellt, bei welchen der Körper A Luft war und der Körper B eine Fuchsinschicht, die nur den Strahlen des äussersten Roth Durchtritt gestattete. Das Streifensystem B erschien verschoben gegen das Streifensystem A. Für rothe Strahlen betrug die Verschiebung fast eine halbe Fransenbreite und nahm stetig ab bis zur Mitte zwischen G und H. Die beobachtete Verschiebung giebt zunächst die relative Phasenänderung. Da aber die absolute Phasenänderung A gleich Null ist, so hat man die absolute Phasenänderung B, oder man erhält aus der beobachteten Verschiebung der Streifen sofort die absolute Phasenänderung für die Reflexion an Fuchsin in Glas.

Ist e die Dicke der Lamelle L, so hat man für den $m$ten dunklen Interferenzstreifen von A:

$$2e = ml,$$

wenn l die der Lage des Interferenzstreifens entsprechende Wellenlänge in Glas ist. Ebenso hat man für den $m$ten dunklen Interferenzstreifen von B:

$$2e = ml' + \delta,$$

wo δ der Phasenänderung bei der Reflexion am Fuchsin entspricht. Aus den beiden Gleichungen ergiebt sich

$$\delta = m(l - l')$$

und

$$\frac{\delta}{l} = m\left(1 - \frac{\lambda' n}{\lambda n'}\right),$$

wo

$$l = \frac{\lambda}{n},\ l' = \frac{\lambda'}{n'},$$

und λ, λ', n, n' die Wellenlängen in Luft und die Brechungsexponenten bedeuten.

Die folgende Tabelle giebt in der ersten Spalte die λ für die von Reflexion in Glas an Luft herrührenden Interferenzstreifen, die zweite die Werthe λ' für die Reflexion in Glas an Fuchsin; die dritte die berechnete absolute Phasendifferenz $\frac{\delta}{\lambda}$, die vierte endlich die Phasendifferenz, welche beobachtet werden müsste, wenn das Fuchsin das Gesetz der durchsichtigen Substanzen befolgte. Es ist hierbei zu bemerken, dass von $\lambda = 485$ bis 438 Milliontel Millimeter der Brechungsexponent des Fuchsin kleiner, sonst aber grösser als der des Glases ist.

λ	λ'	$\frac{\delta}{\lambda}$	$\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)$
637·5	628·7	0·48	0·5
619·9	611·2	0·46	0·5
602·1	594·4	0·45	0·5
585·5	579·9	0·42	0·5
572·2	566·8	0·37	0·5
556·8	551·6	0·35	0·5
541·7	537·2	0·30	0·5
526·3	521·8	0·33	0·5
512·6	509·3	0·28	0·5
500·2	496·7	0·30	0·5
487·5	485·2	0·23	0·5
478·2	476·2	0·20	0
468·4	466·8	0·16	0
458·5	457·0	0·15	0
448·6	447·5	0·11	0
439·4	438·7	0·08	0
430·5	429·6	0·10	0
421·9	—	—	—

Ganz ähnlich waren die Erscheinungen bei Versuchen mit Triphenyl-Diphenyl-Monophenyl-Rosanilin, Anilinviolett und Anilingrau.

Es ergiebt sich, dass die Absorption den plötzlichen Uebergang von der Phasenänderung Null zur Phasenänderung 180°, die wir bei durchsichtigen Medien beobachten, je nachdem ihr relatives Brechungsverhältniss kleiner oder grösser als Eins ist, zu einem stetigen macht.

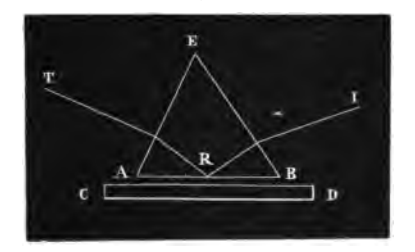
Bei weiteren Versuchen mit Metallen trug die Glaslamelle statt der Schicht des Farbstoffes eine undurchsichtige Silberschicht. Sämmtliche

Streifen des am Silber in Glas reflectirten Lichtes waren gegen die an Luft in Silber reflectirten annähernd um eine Viertelfransenbreite nach dem Violett hin verschoben. Die Richtung der Verschiebung wurde dadurch ermittelt, dass nach einander Glasblättchen angewendet wurden, die mit durchsichtigen Silberschichten von wachsender Dicke belegt waren. Die Absorption des Lichtes im Silber bewirkt also eine Phasenverzögerung von nahezu 90° für alle Farben des sichtbaren Spectrums, wenn das Licht an Silber in Glas reflectirt wird. Die anderen untersuchten Metalle verhalten sich ähnlich wie Silber.

530. Theorie der Metallreflexion.

Versuche einer Theorie der Metallreflexion sind zuerst von Mac Cullagh und Cauchy unternommen worden, ohne dass einer derselben seine Rechnungen vollständig veröffentlicht hätte. Mac Cullagh hat seine Resultate als Ergebnisse der Induction und Analogie hingestellt, namentlich der Analogie zwischen Metallreflexion und totaler Reflexion. Bei der Metallreflexion wie bei der totalen Reflexion fehlt der gebrochene Strahl, oder vielmehr er pflanzt sich nur auf excessiv kurze Distanz im zweiten Mittel fort. Dass bei der totalen Reflexion das Licht in das dünnere Mittel eindringt, hat schon Newton[1]) constatirt, später Fresnel[2]). Dieser liess einen Lichtstrahl an einer Fläche AB eines Prismas, Fig. 86, totale Reflexion erfahren und näherte eine, der Seite AB parallele Glasplatte, CD dem Prisma mittelst einer Mikrometerschraube. Er sah alsdann auf der Fläche AB, welche bei Abwesenheit der Platte CD hell erschien, dunkle Flecken entstehen. Man könnte glauben, dass diese letzteren durch Berührungen der nicht vollständig ebenen Flächen entstehen. Dies ist jedoch nicht der Fall, denn vermindert man die Neigung der einfallenden Strahlen, so entstehen an Stelle der dunklen Flecken gefärbte Flecken entsprechend der Dicke der Luftschichte zwischen den Gläsern. Fresnel schloss hieraus, dass eine Vibrationsbewegung in der Luftschichte vorhanden sei, dass es also einen gebrochenen Strahl gebe.

Fig. 86.



Dieses Eindringen des Lichtes in das optisch dünnere Medium bei der totalen Reflexion wurde experimentell weiter verfolgt von Stokes[3]) und Quincke[4]). Die Tiefe, bis zu welcher das Licht in das neue

[1]) *Optice lib.* II. — [2]) *OEuvres complètes*, I, 447, 767. *Ann. de chim. et de phys.* (2), XLVI, 225. — [3]) *Cambr. Phil. Trans.* 1848. — [4]) Pogg. Ann. CXXVII.

Mittel eindringt, hängt von der Polarisation des einfallenden Lichtes ab. Beim Beginn der totalen Reflexion dringt das normal zur Einfallsebene polarisirte Licht tiefer ein, später das parallel zur Einfallsebene polarisirte. Die Tiefe des Eindringens ist ferner grösser bei langwelligem Lichte und bei geringerem Unterschiede der Brechungsexponenten der beiden Medien. Bei der Reflexion an Luft in Glas fand Quincke, dass zwischen der Nähe des Grenzwinkels der totalen Reflexion und einem Incidenzwinkel von $68^0\ 26'$ die Tiefe des Eindringens des normal zur Einfallsebene polarisirten Strahles zwischen 3·38 und 0·129 Wellenlängen variirte, und die des parallel zur Einfallsebene polarisirten zwischen 2·49 und 0·166. Fand die Reflexion in Glas an Wasser statt, so steigerte sich die Tiefe des Eindringens bis 5·61 Wellenlängen.

Aehnlich verhält es sich bei den Metallen, welche in sehr dünnen Schichten das Licht merklich hindurchlassen, so dass eine Analogie zwischen der Metallreflexion und der totalen Reflexion besteht. Den Einfluss der Dicke der Metallschichten auf die Reflexion hat Quincke[1]) näher studirt. So ergab sich, dass bei wachsender Dicke einer Silberschichte sich das Hauptazimuth des reflectirten Lichtes, d. i. der Winkel, dessen Tangente dem Verhältniss der parallel und normal zur Einfallsebene polarisirten Composanten des reflectirten Lichtes beim Haupteinfallswinkel gleich ist, beträchtlich veränderte. Dieser Winkel variirte zwischen $21^0\ 1'$ und $45^0\ 30'$, während die Dicke der Silberschichte von 0mm000014 bis 0mm000075 wuchs; geringer war die Variation des Haupteinfallswinkels von $72^0\ 4'$ bis $71^0\ 47'$.

531. Die ersten Formeln Mac Cullagh's.

Fresnel hat den Fall der totalen Reflexion bei durchsichtigen Körpern mittelst einer Interpretation der erhaltenen imaginären Ausdrücke behandelt.

Ergiebt sich für die Amplitude des reflectirten Strahles ein Ausdruck von der Form $a + b\sqrt{-1}$, so nimmt Fresnel an, dass die Amplitude des reflectirten Strahles $\sqrt{a^2 + b^2}$ ist, und dass die Phasendifferenz $2\pi\frac{\varphi}{\lambda}$ zwischen dem einfallenden und dem reflectirten Strahle im Einfallspunkte durch

$$tang\, 2\pi\frac{\varphi}{\lambda} = \frac{b}{a}$$

gegeben ist.

Mac Cullagh[2]) ging an der Hand dieser Art der Interpretation weiter.

---

[1]) Pogg. Ann. CXXIX. — [2]) *Ir. Trans.* XXVIII, part. 1.

Er nahm für die Metallreflexion die Gleichungen

$$\sin r = \frac{\sin i}{m} (\cos \chi + \sqrt{-1} \sin \chi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\cos r = \frac{\cos i}{m'} (\cos \chi' + \sqrt{-1} \sin \chi') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

an, wo m, m', χ, χ' unbestimmte Grössen sind, während man für die durchsichtigen Mittel

$$\sin r = \frac{\sin i}{n}$$

oder

$$\sin r = \frac{\sin i}{n} (\cos^2 \chi + \sin^2 \chi)$$

hat. Ist das einfallende Licht in der Einfallsebene polarisirt, so giebt Fresnel's Theorie für die Amplitude des reflectirten Strahles den Ausdruck

$$v = -\frac{\sin (i - r)}{\sin (i + r)}$$

oder

$$v = -\frac{\sin i \cos r - \sin r \cos i}{\sin i \cos r + \sin r \cos i}$$

oder auch

$$v = -\frac{\frac{\cos r}{\cos i} - \frac{\sin r}{\sin i}}{\frac{\cos r}{\cos i} + \frac{\sin r}{\sin i}}.$$

Lässt man diese Gleichung auch für die Metallreflexion gelten, und setzt man in dieser Gleichung für $\frac{\sin r}{\sin i}$ und $\frac{\cos r}{\cos i}$ die imaginären Ausdrücke (1) und (2), so erhält man

$$v = -\frac{\frac{1}{m'} (\cos \chi' + \sqrt{-1} \sin \chi') - \frac{1}{m} (\cos \chi + \sqrt{-1} \sin \chi')}{\frac{1}{m'} (\cos \chi' + \sqrt{-1} \sin \chi') + \frac{1}{m} (\cos \chi + \sqrt{-1} \sin \chi)}$$

oder

$$v = \frac{(m' \cos \chi - m \cos \chi') + \sqrt{-1} (m' \sin \chi - m \sin \chi')}{(m' \cos \chi + m \cos \chi') + \sqrt{-1} (m' \sin \chi + m \sin \chi')}.$$

Macht man den Nenner rational, so ergiebt sich weiter

$$v = \frac{m'^2 - m^2 + 2 m m' \sin (\chi - \chi') \sqrt{-1}}{m^2 + m'^2 + 2 m m' \cos (\chi - \chi')}.$$

Dieser Ausdruck ist von der Form $a + b \sqrt{-1}$. Interpretirt man denselben nach Fresnel's Vorgang und bezeichnet mit R die Inten-

sität des reflectirten Strahles, ferner mit $2\pi\frac{\delta}{\lambda}$ die Phasendifferenz zwischen dem reflectirten und dem einfallenden Strahle, so erhält man

$$R = \frac{(m'^2 - m^2)^2 + 4\,m^2 m'^2 \sin^2(\chi - \chi')}{[m^2 + m'^2 + 2\,m\,m' \cos(\chi - \chi')]^2}$$

und

$$\tang 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = \frac{2\,m\,m' \sin(\chi - \chi')}{m'^2 - m^2}.$$

Durch Vereinfachung des für R gefundenen Ausdruckes ergiebt sich weiter

$$R = \frac{m'^4 + m^4 + 2\,m^2 m'^2 - 4\,m^2 m'^2 \cos^2(\chi - \chi')}{[m^2 + m'^2 + 2\,m\,m' \cos(\chi - \chi')]^2}$$

$$= \frac{(m^2 + m'^2)^2 - 4\,m^2 m'^2 \cos^2(\chi - \chi')}{[m^2 + m'^2 + 2\,m\,m' \cos(\chi - \chi')]^2}$$

$$= \frac{[m^2 + m'^2 + 2\,m\,m' \cos(\chi - \chi')]\,[m^2 + m'^2 - 2\,mm' \cos(\chi - \chi')]}{[m^2 + m'^2 + 2\,m\,m' \cos(\chi - \chi')]^2}$$

und schliesslich

$$R = \frac{m^2 + m'^2 - 2\,m\,m' \cos(\chi - \chi')}{m^2 + m'^2 + 2\,m\,m' \cos(\chi - \chi')}.$$

Wir wollen nun die Grössen m, m', χ, χ' näher betrachten. Dieselben sind in Folge der Relation

$$\sin^2 r + \cos^2 r = 1$$

nicht unabhängig von einander. Quadriren und addiren wir die für $\sin r$ und $\cos r$ aufgestellten Ausdrücke, so erhalten wir

$$\frac{\sin^2 i}{m^2}\cos 2\chi + \frac{\cos^2 i}{m'^2}\cos 2\chi' + \left(\frac{\sin^2 i}{m^2}\sin 2\chi' + \frac{\cos^2 i}{m'^2}\sin 2\chi'\right)\sqrt{-1} = 1,$$

woraus die beiden Gleichungen

$$\frac{\sin^2 i}{m^2}\cos 2\chi + \frac{\cos^2 i}{m'^2}\cos 2\chi' = 1$$

$$\frac{\sin^2 i}{m^2}\sin 2\chi + \frac{\cos^2 i}{m'^2}\sin 2\chi' = 0$$

folgen, oder

$$m'^2 \sin^2 i \cos 2\chi + m^2 \cos^2 i \cos 2\chi' = m^2 m'^2$$
$$m'^2 \sin^2 i \sin 2\chi + m^2 \cos^2 i \sin 2\chi' = 0.$$

Man kann demnach m' und χ' als Function von m, χ und i darstellen. Man erhält

$$\sin 2\chi' = -\frac{m'^2}{m^2}\tang^2 i \sin 2\chi$$

und

$$\cos 2\chi' = \frac{m'^2(m^2 - \sin^2 i \cos 2\chi)}{m^2 \cos^2 i}$$

und folglich

$$tang\,2\chi' = -\frac{sin^2 i\, sin\, 2\chi}{m^2 - sin^2 i\, cos\, 2\chi}.$$

Wenn man bemerkt, dass

$$sin^2 2\chi' + cos^2 2\chi' = 1,$$

so erhält man gleicherweise

$$1 = \frac{m'^4}{m^4 cos^4 i}(m^4 + sin^4 i - 2\, m^2 sin^2 i\, cos\, 2\chi)$$

und

$$m'^2 = \frac{m^2 cos^2 i}{\sqrt{m^4 + sin^4 i - 2\, m^2 sin^2 i\, cos\, 2\chi}}.$$

Setzt man weiter

$$D^4 = m^4 + sin^4 i - 2\, m^2 sin^2 i\, cos\, 2\chi,$$

so ergiebt sich

$$m'^2 = \frac{m^2 cos^2 i}{D^2}.$$

Andererseits enthält der Ausdruck von $tang\,2\pi\frac{\delta}{\lambda}$ den Factor $sin(\chi - \chi')$, und man muss daher $sin(\chi - \chi')$ als Function von χ darstellen. Man hat

$$tang\,2(\chi - \chi') = \frac{tang\,2\chi - tang\,2\chi'}{1 + tang\,2\chi\, tang\,2\chi'} = \frac{tang\,2\chi + \dfrac{sin^2 i\, sin\,2\chi}{m^2 - sin^2 i\, cos\,2\chi}}{1 - tang\,2\chi\dfrac{sin^2 i\, sin\,2\chi}{m^2 - sin^2 i\, cos\,2\chi}},$$

und folglich

$$tang\,2(\chi - \chi') = \frac{sin\,2\chi(m^2 - sin^2 i\, cos\,2\chi) + sin^2 i\, sin\,2\chi\, cos\,2\chi}{cos\,2\chi(m^2 - sin^2 i\, cos\,2\chi) - sin^2 i\, sin^2 2\chi},$$

$$tang\,2(\chi - \chi') = \frac{m^2 sin\,2\chi}{m^2 cos\,2\chi - sin^2 i}$$

und

$$sin\,2(\chi - \chi') = \frac{m^2 sin\,2\chi}{\sqrt{m^4 + sin^4 i - 2\, m^2 sin^2 i\, cos\,2\chi}} = \frac{m^2 sin\,2\chi}{D^2}.$$

Ersetzt man in dem für die Intensität R gefundenen Ausdrucke m' durch seinen Werth, so erhält man

$$R = \frac{m^2 + m^2\dfrac{cos^2 i}{D^2} - 2\, m^2\dfrac{cos\, i\, cos(\chi - \chi')}{D}}{m^2 + m^2\dfrac{cos^2 i}{D^2} + 2\, m^2\dfrac{cos\, i\, cos(\chi - \chi')}{D}}$$

und schliesslich

$$R = \frac{D^2 + cos^2 i - 2\, D\, cos\, i\, cos(\chi - \chi')}{D^2 + cos^2 i + 2\, D\, cos\, i\, cos(\chi - \chi')}$$

und

$$tang\, 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2 D \cos i \sin(\chi - \chi')}{\cos^2 i - D^2},$$

wo D und $\chi - \chi'$ bekannte Functionen von m, χ und i sind.

Für den Fall, wo die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes auf der Einfallsebene senkrecht steht, ergiebt sich eine analoge Rechnung. Bezeichnen wir mit v' die Amplitude des reflectirten Strahles, so giebt Fresnel's Theorie

$$v' = -\frac{tang(i - r)}{tang(i + r)},$$

woraus man findet

$$v' = -\frac{\sin 2i - \sin 2r}{\sin 2i + \sin 2r} = -\frac{1 - \frac{\sin r \cos r}{\sin i \cos i}}{1 + \frac{\sin r \cos r}{\sin i \cos i}},$$

und, wenn für $\sin r$ und $\cos r$ die imaginären Ausdrücke eingeführt werden,

$$v' = -\frac{1 - \frac{1}{m m'}[\cos(\chi + \chi') + \sqrt{-1} \sin(\chi + \chi')]}{1 + \frac{1}{m m'}[\cos(\chi + \chi') + \sqrt{-1} \sin(\chi + \chi')]},$$

und

$$v' = -\frac{m m' - \cos(\chi + \chi') - \sqrt{-1} \sin(\chi + \chi')}{m m' + \cos(\chi + \chi') + \sqrt{-1} \sin(\chi + \chi')}.$$

Macht man den Nenner rational, so erhält man

$$v' = -\frac{m^2 m'^2 - 1 - 2 m m' \sin(\chi + \chi') \sqrt{-1}}{m^2 m'^2 + 1 + 2 m m' \cos(\chi + \chi')}.$$

Man erhält hieraus, wenn man mit R' die Intensität des reflectirten Strahles bezeichnet,

$$R' = \frac{(m^2 m'^2 - 1)^2 + 4 m^2 m'^2 \sin^2(\chi + \chi')}{[m^2 m'^2 + 1 + 2 m m' \cos(\chi + \chi')]^2}$$

$$= \frac{m^2 m'^2 + 1 - 2 m m' \cos(\chi + \chi')}{m^2 m'^2 + 1 + 2 m m' \cos(\chi + \chi')},$$

und für die Phasendifferenz

$$tang\, 2\pi \frac{\delta'}{\lambda} = -\frac{2 m m' \sin(\chi + \chi')}{m^2 m'^2 - 1}.$$

Ersetzt man m' durch seinen Werth und führt wieder die Grösse D ein, so hat man

$$R' = \frac{\frac{m^4 \cos^2 i}{D^2} + 1 - \frac{2 m^2 \cos i}{D} \cos(\chi + \chi')}{\frac{m^4 \cos^2 i}{D^2} + 1 + \frac{2 m^2 \cos i}{D} \cos(\chi + \chi')},$$

und hieraus

$$R' = \frac{m^4 \cos^2 i + D^2 - 2 D m^2 \cos i \cos(\chi + \chi')}{m^4 \cos^2 i + D^2 + 2 D m^2 \cos i \cos(\chi + \chi')}.$$

Die Phasendifferenz aber ist

$$tang\, 2\pi \frac{\delta'}{\lambda} = - \frac{2 D m^2 \cos i \sin(\chi + \chi')}{m^2 \cos^2 i - D^2}.$$

Es ergiebt sich demnach schliesslich für das parallel zur Einfallsebene polarisirte Licht

$$R = \frac{D^2 + \cos^2 i - 2 D \cos i \cos(\chi - \chi')}{D^2 + \cos^2 i + 2 D \cos i \cos(\chi - \chi')},$$

$$tang\, 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2 D \cos i \sin(\chi - \chi')}{\cos^2 i - D^2},$$

und für das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Licht

$$R' = \frac{m^4 \cos^2 i + D^2 - 2 D m^2 \cos i \cos(\chi + \chi')}{m^4 \cos^2 i + D^2 + 2 D m^2 \cos i \cos(\chi + \chi')}$$

$$tang\, 2\pi \frac{\delta'}{\lambda} = - \frac{2 D m^2 \cos i \sin(\chi + \chi')}{m^4 \cos^2 i - D^2}.$$

In diesen Ausdrücken sind D und χ' gegebene Functionen von m, χ und i, nämlich

$$D^4 = m^4 + \sin^4 i - 2 m^2 \sin^2 i \cos 2\chi$$

$$\sin 2(\chi - \chi') = \frac{m^2 \sin 2\chi}{D^2}.$$

Dies sind die ersten Formeln Mac Cullagh's.

532. Vereinfachung der Formeln.

Die Formeln Mac Cullagh's vereinfachen sich beträchtlich, wenn man auf die Umstände der Metallreflexion Rücksicht nimmt. Man kann leicht zeigen, dass m sehr gross sein muss.

Es ist nämlich für $i = 0$

$$D^2 = m^2$$

und folglich

$$\sin 2(\chi - \chi') = \sin 2\chi,$$

also

$$\chi' = 0.$$

Hierdurch wird

$$R = R' = \frac{m^2 + 1 - 2 m \cos\chi}{m^2 + 1 + 2 m \cos\chi}.$$

Andererseits lehrt das Experiment, dass bei der normalen Reflexion an Metallflächen die Intensität des reflectirten Strahles nahe gleich 1 ist;

es muss demnach $2\,m\cos\chi$ klein sein im Vergleiche mit $m^2 + 1$ oder m klein im Vergleiche mit m^2, d. i. es muss m sehr gross sein.

Es folgt hieraus und in Rücksicht auf die früher gefundenen Gleichungen

$$\frac{\sin^2 i}{m^2}\cos 2\chi + \frac{\cos^2 i}{m'^2}\cos 2\chi' = 1$$

$$\frac{\sin^2 i}{m^2}\sin 2\chi + \frac{\cos^2 i}{m'^2}\sin 2\chi' = 0,$$

dass χ' sehr klein sein muss. Da nämlich m sehr gross ist, sind $\frac{\sin^2 i}{m^2}\cos 2\chi$ und $\frac{\sin^2 i}{m^2}\sin 2\chi$ sehr klein, und folglich nahezu $\frac{\cos^2 i}{m'^2}\cos 2\chi' = 1$ und $\frac{\cos^2 i}{m'^2}\sin 2\chi' = 0$, welche Bedingungen nur erfüllt sind, wenn χ' sehr klein ist.

Vernachlässigt man χ', so erhält man aus der für $\cos r$ aufgestellten Formel

$$\cos r = \frac{\cos i}{m'} \quad \text{und} \quad m' = \frac{\cos i}{\cos r}.$$

Hierdurch werden die Ausdrücke für das parallel zur Einfallsebene polarisirte Licht:

$$R = \frac{m^2 + \frac{\cos^2 i}{\cos^2 r} - 2\,m\frac{\cos i}{\cos r}\cos\chi}{m^2 + \frac{\cos^2 i}{\cos^2 r} + 2\,m\frac{\cos i}{\cos r}\cos\chi}$$

$$\tang 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = \frac{2\,m\frac{\cos i}{\cos r}\sin\chi}{\frac{\cos^2 i}{\cos^2 r} - m^2},$$

und die Ausdrücke für das normal zur Einfallsebene polarisirte Licht:

$$R' = \frac{m^2\frac{\cos^2 i}{\cos^2 r} + 1 - 2\,m\frac{\cos i}{\cos r}\cos\chi}{m^2\frac{\cos^2 i}{\cos^2 r} + 1 + 2\,m\frac{\cos i}{\cos r}\cos\chi},$$

$$\tang 2\pi\frac{\delta'}{\lambda} = -\frac{2\,m\frac{\cos i}{\cos r}\sin\chi}{m^2\frac{\cos^2 i}{\cos^2 r} - 1}.$$

Diese Formeln wurden von Mac Cullagh an zweiter Stelle gegeben, und diese gefielen ihm am besten.

Man kann schliesslich mit Mac Cullagh dieselben Formeln noch auf einem anderen inductiven Wege ableiten, welcher indessen nicht ver-

lässlicher ist, als der erste. Man sucht die für die durchsichtigen Körper gefundenen Formeln in möglichst einfacher Weise so zu modificiren, dass dieselben durch eine Erweiterung der Bedeutung ihrer Coefficienten zur Erklärung der Erscheinungen der Metallreflexion geeignet werden.

Wenn der Körper durchsichtig ist und wenn das einfallende Licht in der Polarisationsebene polarisirt ist, hat man für die Intensität R des reflectirten Strahles

$$R = \frac{(\sin i \cos r - \cos i \sin r)^2}{(\sin i \cos r + \cos i \sin r)^2},$$

oder

$$R = \frac{\frac{\sin^2 i}{\sin^2 r} + \frac{\cos^2 i}{\cos^2 r} - 2\frac{\sin i \cos i}{\sin r \cos r}}{\frac{\sin^2 i}{\sin^2 r} + \frac{\cos^2 i}{\cos^2 r} + 2\frac{\sin i \cos i}{\sin r \cos r}}.$$

In diesen Formeln ist

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n,$$

und setzt man

$$\frac{\cos i}{\cos r} = \varphi,$$

so ergiebt sich

$$R = \frac{n^2 + \varphi^2 - 2n\varphi}{n^2 + \varphi^2 + 2n\varphi}.$$

Ebenso findet man, wenn das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist,

$$R' = \frac{n^2\varphi^2 + 1 - 2n\varphi}{n^2\varphi^2 + 1 + 2n\varphi}.$$

Mac Cullagh nimmt nun an, dass bei der Metallreflexion die Coefficienten von φ^2 und φ nicht mehr gleich n^2 und n sind, dass aber ihr Verhältniss immer noch gleich n ist. Sind also M^2 und N die neuen Coefficienten, so hat man

$$\frac{M^2}{N} = n.$$

Nach diesen Annahmen erscheint der Fall durchsichtiger Körper als ein specieller, aus der Annahme $M = N$ hervorgehender Fall. Die Intensitäten R und R' nehmen die folgende Form an:

$$R = \frac{M^2 + \varphi^2 - 2N\varphi}{M^2 + \varphi^2 + 2N\varphi}$$

$$R' = \frac{M^2\varphi^2 + 1 - 2N\varphi}{M^2\varphi^2 + 1 - 2N\varphi}.$$

Der Ausdruck von R kann auf die Form

$$R = \frac{(M^2 + \varphi^2)^2 - 4 N^2 \varphi^2}{(M^2 + \varphi^2 + 2 N \varphi)^2}$$

gebracht werden, und weiter auf die Form

$$R = \frac{(M^2 - \varphi^2)^2 + 4 (M^2 - N^2) \varphi^2}{(M^2 + \varphi^2 + 2 N \varphi)^2}.$$

Setzt man $M^2 > N^2$ voraus, so erscheint R als Summe zweier Quadrate und kann mittelst der Interpretation Fresnel's auf die Form $a + b\sqrt{-1}$ gebracht werden, wo dann die Intensität gleich $a^2 + b^2$ ist, und die Phasendifferenz

$$tang\, 2 \pi \frac{\delta}{\lambda} = \frac{b}{a}.$$

Andererseits kann man, da $M^2 > N^2$ angenommen ist, setzen

$$N = M \cos \chi.$$

Hierdurch ergeben sich die Ausdrücke

$$R = \frac{M^2 + \varphi^2 - 2 M \varphi \cos \chi}{M^2 + \varphi^2 + 2 M \varphi \cos \chi}$$

und

$$tang\, 2 \pi \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2 M \varphi \sin \chi}{M^2 - \varphi^2}.$$

Ebenso findet man für das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Licht

$$R' = \frac{M^2 \varphi^2 + 1 - 2 M \varphi \cos \chi}{M^2 \varphi^2 + 1 + 2 M \varphi \cos \chi}$$

$$tang\, 2 \pi \frac{\delta'}{\lambda} = \frac{2 M \varphi \sin \chi}{M^2 \varphi^2 - 1}.$$

Diese Formeln sind identisch mit den früher gefundenen.

Man kann aus diesen Formeln die Phasendifferenz ableiten, welche zwischen den beiden, parallel und normal zur Einfallsebene polarisirten Composanten des reflectirten Strahles entsteht.

Man hat nämlich

$$tang\, 2 \pi \frac{\delta - \delta'}{\lambda} = \frac{\frac{2 M \varphi \sin \chi}{M^2 - \varphi^2} - \frac{2 M \varphi \sin \chi}{M^2 \varphi^2 - 1}}{1 + \frac{4 M^2 \varphi^2 \sin^2 \chi}{(M^2 - \varphi^2)(M^2 \varphi^2 - 1)}},$$

und hieraus

$$tang\, 2 \pi \frac{\delta - \delta'}{\lambda} = \frac{2 M \varphi \sin \chi (M^2 + 1)(\varphi^2 - 1)}{(M^2 - \varphi^2)(M^2 \varphi^2 - 1) + 4 M^2 \varphi^2 \sin^2 \chi}.$$

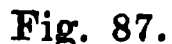
Diese Formeln hatten sich als Resultate einer Theorie ergeben, welche Mac Cullagh nicht veröffentlicht hat. Indessen gestatten einige erhaltene Andeutungen des Autors einen Einblick in diese Theorie. Mac Cullagh nahm an, dass an der Oberfläche der Metalle eine Brechung

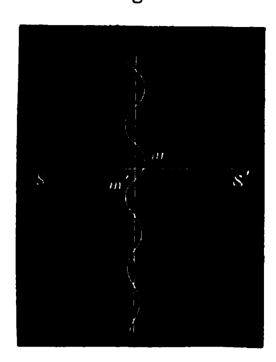
stattfinde, und dass das sich fortpflanzende gebrochene Licht sehr rasch absorbirt werde. Er drückte die gebrochene Vibrationsbewegung durch ein Product von $\sin 2\pi \frac{t}{T}$ in eine Exponentielle mit sehr grossem, negativem und der Entfernung von der brechenden Fläche proportionalem Exponenten aus. Er verwendete auch das Princip der lebendigen Kräfte und das Princip der Continuität, beschränkte aber letzteres auf die der Trennungsfläche parallelen Composanten der Bewegung, im Widerspruche mit seiner Theorie der durchsichtigen Körper. Was ihn zur Unterdrückung seiner Theorie der Metallreflexion veranlasste, waren hauptsächlich die Schwierigkeiten, auf welche seine Theorie stiess, wenn es sich um die Erklärung der Eigenschaften des Diamanten handelte; um das den Metallen analoge Verhalten dieses Körpers zu erklären, hätte er demselben ein grosses Absorptionsvermögen zuschreiben müssen.

533. Die Theorie Cauchy's. Erweiterung des Continuitätsprincipes.

Cauchy[1]) hat seinerseits Formeln gegeben, welche grösstentheils mit jenen Mac Cullagh's übereinstimmen. Er hat seine Theorie nicht veröffentlicht, doch die Hypothesen, von welchen er ausgegangen ist.

Cauchy's Theorie beruht auf dem erweiterten Continuitätsprincipe. Fresnel und Mac Cullagh definirten die Continuität durch die Annahme, nach welcher zwei unendlich nahe an einander liegende Molecüle diesseits und jenseits der Trennungsfläche Bewegungen ausführen, welche unendlich wenig von einander verschieden sind. Cauchy hingegen hat dem Principe die folgende Form gegeben: betrachten wir, Fig. 87, in einem gegebenen Augenblicke eine Molecülreihe längs einer Normale der Trennungsfläche SS', und tragen wir senkrecht zu dieser Normale Ordinaten auf, proportional den Bewegungen parallel der Normale; die so construirte Curve ist eine Sinusoide. Zwei Molecüle, welche sich in unendlich kleiner gegenseitiger Entfernung befinden, können nach Cauchy nicht Geschwindigkeiten besitzen, deren Composanten parallel der Normale um Grössen von derselben Ordnung differiren wie die Geschwindigkeiten selbst; andererseits können diese Composanten auch nicht völlig gleich sein. Die Geschwindigkeitscomposanten benachbarter


Fig. 87.



[1]) *C. R.* II, 427; VIII, 553, 658; IX, 727; XXVI, 86. — *Journ. de Liouville* VII, 338.

Molecüle sind also ungleich, unterscheiden sich jedoch um Grössen, welche unendlich klein sind gegen die Geschwindigkeitscomposanten selbst. Dieselbe Annahme gilt auch für zwei benachbarte Molecüle m und m' zu beiden Seiten der Trennungsfläche, d. h. die Curve der Wellenbewegung darf keine Discontinuität in ihrem Durchschnitte mit der Trennungsfläche zeigen.

Doch ist nach Cauchy nicht nur die Differenz der Geschwindigkeitscomposanten benachbarter Molecüle unendlich klein, sondern auch die Differenz der Derivirten dieser Composanten.

Man hat also zwei Gleichungen, um die Continuität der Bewegungen längs der Normale auszudrücken, und hat die analogen Gleichungen für zwei weitere rechtwinkelige Achsen hinzuzufügen, welche in der Trennungsfläche liegen.

534. Anwendung auf die durchsichtigen Körper.

Ist das einfallende Licht parallel zur Einfallsebene polarisirt, so hat man nur diejenigen Gleichungen in Betracht zu ziehen, welche sich auf die Bewegung senkrecht zur Einfallsebene beziehen.

Fig. 88.

Betrachten wir, Fig. 88, zwei Punkte m, m', welche auf derselben Normale in gleicher Entfernung z von der Trennungsfläche liegen. Die Vibrationsgeschwindigkeit in jenem Punkte, er heisse J, in welchem die Normale die Trennungsebene scheidet, sei in Folge der einfallenden Bewegung zur Zeit t gleich $2\pi \frac{t}{T}$. Dann ist die Vibrationsgeschwindigkeit des Punktes m in Folge der einfallenden Bewegung gleich der Vibrationsgeschwindigkeit des Punktes p. Man hat aber

$$Jp = z \cos i,$$

und demnach ist die Vibrationsgeschwindigkeit des Punktes m gleich

$$\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{z \cos i}{\lambda}\right).$$

Die Vibrationsgeschwindigkeit des Punktes m in Folge der reflectirten Bewegung ist zur Zeit t gleich

$$v \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z \cos i}{\lambda}\right).$$

Die Vibrationsgeschwindigkeit des Punktes m' ist gleich jener des Punktes p'. Man hat aber

$$Jp' = - z \cos r;$$

folglich ist die Vibrationsgeschwindigkeit des Punktes m' in Folge der gebrochenen Bewegung gleich

$$u \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{z \cos r}{\lambda'}\right).$$

Für $z = 0$ wird die Summe der beiden ersteren Vibrationsgeschwindigkeiten gleich der letzteren, d. h. es wird

$$1 + v = u.$$

Diese Gleichung finden wir auch bei Fresnel aus dem Continuitätsprincipe abgeleitet.

Um die zweite Gleichung zu erhalten, muss die Summe der in Bezug auf z genommenen Differentialquotienten der beiden ersteren Geschwindigkeiten für $z = 0$ dem Differentialquotienten der letzteren Geschwindigkeit gleichgesetzt werden. Das giebt

$$\frac{2\pi \cos i}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T} - v \frac{2\pi \cos i}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T} = u \frac{2\pi \cos r}{\lambda'} \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

und

$$\frac{\cos i}{\lambda}(1 - v) = \frac{u \cos r}{\lambda'},$$

oder, wenn $\frac{\lambda}{\lambda'}$ durch $\frac{\sin i}{\sin r}$ ersetzt wird,

$$(1 - v) \sin r \cos i = u \sin i \cos r.$$

Es ist dies dieselbe Gleichung, welche in Fresnel's Theorie aus dem Principe der lebendigen Kräfte erhalten wird.

Der zweite Fall, in welchem das einfallende Licht normal zur Einfallsebene polarisirt ist, bietet Schwierigkeiten. In diesem Falle müssen die Schwingungen nach zwei Achsen zerlegt werden und man erhält vier unvereinbare Gleichungen. Cauchy nahm deshalb an, dass die Veränderung der Schwingungsrichtung an der Trennungsfläche nicht plötzlich, sondern allmälig aber doch so rasch vor sich geht, dass sich dieselbe in einer sehr kleinen Entfernung von der Trennungsfläche schon vollzogen hat und führte diese Vorstellung auch in die Theorie in Gestalt zweier neuer Constanten ein, ohne jedoch näher auf den Gegenstand einzugehen.

535. Anwendung auf die Metalle.

Die Anwendung der Theorie Cauchy's auf die Metalle bietet keine neuen Schwierigkeiten. Betrachten wir zunächst den Fall, wo das einfallende Licht in der Einfallsebene polarisirt ist. Die Gleichungen werden aufgestellt wie bei den durchsichtigen Körpern. Die Geschwindigkeit des Punktes m, Fig. 88, in Folge der einfallenden Bewegung ist gleich

$\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{z\cos i}{\lambda}\right)$. In Bezug auf den reflectirten Strahl nehmen wir eine durch die Reflexion hervorgerufene Phasendifferenz an, deren Vorhandensein durch das Experiment gegeben ist. Die Vibrationsgeschwindigkeit des reflectirten Strahles im Punkte m und zur Zeit t ist demnach

$$v \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{\varphi - z\cos i}{\lambda}\right).$$

Was den gebrochenen Strahl anlangt, so zeigt das Experiment, dass seine Intensität so rasch abnimmt, dass dieselbe schon in einer sehr geringen Entfernung von der Trennungsfläche verschwindet. Es ist wahrscheinlich, dass sich die Bewegung des Aethers den Körpermolecülen mittheilt und in Wärme verwandelt. Man weiss, dass in einem absorbirenden Körper die Intensität des Strahles in geometrischer Progression abnimmt, wenn die Weglänge in arithmetischer Progression zunimmt. Der Ausdruck für die Vibrationsgeschwindigkeit des gebrochenen Strahles ist also mit einem Factor von der Form $e^{-h\cdot m'k}$ zu versehen, wo $m'k$ der im Metalle zurückgelegte Weg ist. Man hat, Fig. 88,

$$m'k = -\frac{z}{\cos r}$$

und folglich nimmt jener Factor die Form $e^{\frac{hz}{\cos r}}$ an. Nimmt man überdies das Entstehen einer Phasendifferenz ψ an, so wird der Ausdruck für die Vibrationsgeschwindigkeit des gebrochenen Strahles im Punkte m' zur Zeit t

$$u e^{\frac{hz}{\cos r}} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{\psi + z\cos r}{\lambda'}\right).$$

Nach dem Continuitätsprincipe ist nun für $z=0$ die Summe der beiden ersteren Geschwindigkeiten gleich der letzteren. Das giebt

$$\sin 2\pi\frac{t}{T} + v\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{\varphi}{\lambda}\right) = u\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{\psi}{\lambda'}\right).$$

Nach Cauchy's Fassung des Continuitätsprincipes hat man aber weiter auch die nach z genommenen Derivirten der beiden ersteren Geschwindigkeiten den Derivirten der letzteren, für $z=0$, gleichzusetzen. Man erhält hierdurch als zweite Gleichung

$$\frac{2\pi\cos i}{\lambda}\cos 2\pi\frac{t}{T} - \frac{2\pi v\cos i}{\lambda}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{\varphi}{\lambda}\right)$$
$$= \frac{uh}{\cos r}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{\psi}{\lambda'}\right) + \frac{2\pi u\cos r}{\lambda'}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{\psi}{\lambda'}\right).$$

Diese Gleichungen gelten für jeden Zeitmoment.

Entwickelt man die erste der beiden Gleichungen, so findet man

$$\sin 2\pi \frac{t}{T}\left(1 + v \cos 2\pi \frac{\varphi}{\lambda} - u \cos 2\pi \frac{\psi}{\lambda'}\right)$$
$$+ \cos 2\pi \frac{t}{T}\left(v \sin 2\pi \frac{\varphi}{\lambda} - u \sin 2\pi \frac{\psi}{\lambda'}\right) = 0.$$

Die beiden Coëfficienten von $\sin 2\pi \frac{t}{T}$ und $\cos 2\pi \frac{t}{T}$ müssen jeder für sich der Null gleich sein; man erhält hierdurch an Stelle der einen Gleichung die beiden Gleichungen:

$$1 + v \cos 2\pi \frac{\varphi}{\lambda} - u \cos 2\pi \frac{\psi}{\lambda'} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$v \sin 2\pi \frac{\varphi}{\lambda} - u \sin 2\pi \frac{\psi}{\lambda'} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ebenso verwandelt sich die zweite der obigen Gleichungen in die beiden Gleichungen

$$1 - v \cos 2\pi \frac{\varphi}{\lambda} - \frac{u\,h}{\cos r} \frac{\lambda}{2\pi \cos i} \sin 2\pi \frac{\psi}{\lambda'} \frac{u \cos r}{\cos i} \frac{\lambda}{\lambda'} \cos 2\pi \frac{\psi}{\lambda'} = 0$$

$$v \sin 2\pi \frac{\varphi}{\lambda} - \frac{u\,h\,\lambda}{2\pi \cos r \cos i} \cos 2\pi \frac{\psi}{\lambda'} + \frac{u \cos r}{\cos i} \frac{\lambda}{\lambda'} \sin 2\pi \frac{\psi}{\lambda'} = 0,$$

oder, wenn

$$\gamma = \frac{h\,\lambda}{2\pi \cos r}$$

gesetzt und beachtet wird, dass

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\sin i}{\sin r},$$

in die beiden Gleichungen

$$1 - v \cos 2\pi \frac{\varphi}{\lambda} - \frac{u\gamma}{\cos i} \sin 2\pi \frac{\psi}{\lambda'} - u \frac{\sin i \cos r}{\sin r \cos i} \cos 2\pi \frac{\psi}{\lambda'} = 0 \quad . \quad (3)$$

$$v \sin 2\pi \frac{\varphi}{\lambda} - \frac{u\gamma}{\cos i} \cos 2\pi \frac{\psi}{\lambda'} + u \frac{\sin i \cos r}{\sin r \cos i} \sin 2\pi \frac{\psi}{\lambda'} = 0 \quad . \quad (4)$$

Die Gleichungen (1), (2), (3), (4) gestatten, v, u, φ und ψ zu berechnen. Wir wollen die Grössen u und ψ, welche dem Experimente nicht zugänglich sind, bei Seite lassen und uns darauf beschränken, die Werthe von v und φ zu ermitteln.

Wir lösen (1) und (2) nach $u \cos 2\pi \frac{\psi}{\lambda'}$ und $u \sin 2\pi \frac{\psi}{\lambda'}$ auf und setzen die erhaltenen Ausdrücke nach (3) und (4). Es ergiebt sich:

$$1 - v \cos 2\pi \frac{\varphi}{\lambda} = \frac{\gamma v}{\cos i} \sin 2\pi \frac{\varphi}{\lambda} + \frac{\sin i \cos r}{\sin r \cos i}\left(1 + v \cos 2\pi \frac{\varphi}{\lambda}\right),$$

$$v \sin 2\pi \frac{\varphi}{\lambda} = \frac{\gamma}{\cos i}\left(1 + v \cos 2\pi \frac{\varphi}{\lambda}\right) - \frac{\sin i \cos r}{\sin r \cos i}\, v \sin 2\pi \frac{\varphi}{\lambda}.$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich auf die Form

$$\left(1+\frac{\sin i\cos r}{\cos i\sin r}\right)v\cos 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}+\frac{\gamma v}{\cos i}\sin 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}=1-\frac{\sin i\cos r}{\sin r\cos i}$$

$$\left(1+\frac{\sin i\cos r}{\sin r\cos i}\right)v\sin 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}-\frac{\gamma v}{\cos i}\cos 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}=\frac{\gamma}{\cos i}$$

bringen.

Löst man dieselben nach $v\sin 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}$ und $v\cos 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}$ auf, so findet man

$$v\sin 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}\left[\left(1+\frac{\sin i\cos r}{\cos i\sin r}\right)^2+\frac{\gamma^2}{\cos^2 i}\right]=\frac{2\gamma}{\cos i},$$

$$v\cos 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}\left[\left(1+\frac{\sin i\cos r}{\sin r\cos i}\right)^2+\frac{\gamma^2}{\cos^2 i}\right]=1-\frac{\sin^2 i\cos^2 r}{\sin^2 r\cos^3 i}-\frac{\gamma^2}{\cos^2 i}.$$

Dividirt man die erste dieser Gleichungen durch die zweite, so erhält man

$$\tang 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}=\frac{\frac{2\gamma}{\cos i}}{1-\frac{\sin^2 i\cos^2 r}{\sin^2 r\cos^2 i}-\frac{\gamma^2}{\cos^2 i}},$$

woraus folgt

$$\tang 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}=\frac{2\gamma\sin^2 r\cos i}{\sin^2 r\cos^2 i-\sin^2 i\cos^2 r-\gamma^2\sin^2 r}$$

und

$$\tang 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}=-\frac{2\gamma\cos i\sin^2 r}{\sin(i-r)\sin(i+r)+\gamma^2\sin^2 r}.$$

Bildet man die Quadratsumme von $v\sin 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}$ und $v\cos 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}$, so findet man

$$v^2=\frac{\frac{4\gamma^2}{\cos^2 i}+\left(1-\frac{\sin^2 i\cos^2 r}{\sin^2 r\cos^2 i}-\frac{\gamma^2}{\cos^2 i}\right)^2}{\left[\left(1+\frac{\sin i\cos r}{\sin r\cos i}\right)^2+\frac{\gamma^2}{\cos^2 i}\right]^2}.$$

Setzt man

$$\frac{\sin^2 i\cos^2 i}{\sin^2 r\cos^2 i}=x^2,\quad\frac{\gamma^2}{\cos^2 i}=y^2,$$

so wird dieser Ausdruck gleich

$$\frac{(1-x^2-y^2)^2+4y^2}{[(1+x)^2+y^2]^2},$$

und schliesslich gleich

$$\frac{(1-x)^2+y^2}{(1+x)^2+y^2}.$$

Ersetzt man x und y durch ihre Werthe, so wird der Ausdruck von v^2

$$v^2 = \frac{\left(1 - \frac{\sin i \cos r}{\sin r \cos i}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{\cos^2 i}}{\left(1 + \frac{\sin i \cos r}{\sin r \cos i}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{\cos^2 i}},$$

oder schliesslich

$$v^2 = \frac{\sin^2(i - r) + \gamma^2 \sin^2 r}{\sin^2(i + r) + \gamma^2 \sin^2 r}.$$

536. Vergleichung der Formeln Cauchy's und Mac Cullagh's.

Man nehme an, dass der gebrochene Strahl sich im Metalle wie in einem durchsichtigen Körper verhält oder dass das Verhältniss $\frac{\sin i}{\sin r}$ constant ist, und nehme ferner an, dass es auch $\frac{\gamma}{\cos r}$ ist, und setze:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = M \cos \psi, \quad \frac{\gamma}{\cos r} = M \sin \psi,$$

wo

$$M^2 = \frac{\sin^2 i}{\sin^2 r} + \frac{\gamma^2}{\cos^2 r},$$

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{\gamma \sin r}{\sin i \cos r}.$$

Multiplicirt man in Cauchy's Gleichung für die Intensität des in der Einfallsebene polarisirten reflectirten Lichtes beide Seiten mit $\frac{\cos i}{\cos r}$, ersetzt $\frac{\sin i}{\sin r}$, $\frac{\gamma}{\cos r}$ durch ihre Werthe und setzt überdies

$$\frac{\cos i}{\cos r} = \mu,$$

so erhält man

$$v^2 = \frac{(\mu - M \cos \psi)^2 + M^2 \sin^2 \psi}{(\mu + M \cos \psi)^2 + M^2 \sin^2 \psi} = \frac{M^2 + \mu^2 - 2 \mu M \cos \psi}{M^2 + \mu^2 + 2 \mu M \cos \psi}.$$

Man gelangt so zu der Formel Mac Cullagh's:

$$R = \frac{M^2 + \varphi^2 - 2 M \varphi \cos \chi}{M^2 + \varphi^2 + 2 M \varphi \cos \chi}.$$

Man kann auch die früheren Formeln Mac Cullagh's unter gewissen Annahmen wieder erhalten. Die erste Formel Mac Cullagh's

für die Intensität des parallel der Einfallsebene polarisirten reflectirten Lichtes ist

$$R = \frac{D^2 + \cos^2 i - 2 D \cos i \cos(\chi - \chi')}{D^2 + \cos^2 i + 2 D \cos i \cos(\chi - \chi')},$$

und Cauchy's Formel für dieselbe Intensität kann geschrieben werden:

$$v^2 = \frac{\cos^2 i + \frac{\sin^2 i}{\sin^2 r} \cos^2 r - 2 \frac{\sin i \cos i \cos r}{\sin r} + \gamma^2}{\cos^2 i + \frac{\sin^2 i}{\sin^2 r} \cos^2 r + 2 \frac{\sin i \cos i \cos r}{\sin r} + \gamma^2}.$$

Um die beiden Formeln zur Coincidenz zu bringen, muss man setzen:

$$D^2 = \frac{\sin^2 i}{\sin^2 r} \cos^2 r + \gamma^2,$$

$$D \cos(\chi - \chi') = \frac{\sin i}{\sin r} \cos r.$$

Man hat andererseits (531)

$$D^2 = \frac{m^2 \sin 2\chi}{\sin 2(\chi - \chi')}$$

und

$$\operatorname{tang} 2(\chi - \chi') = \frac{m^2 \sin 2\chi}{m^2 \cos 2\chi - \sin^2 i}.$$

Die Formeln lassen sich also zur Coincidenz bringen, doch nur mittelst einer Hypothese, deren physikalische Bedeutung unbekannt ist.

Man kann gleicherweise die für die Phasendifferenzen aufgestellten Formeln zur Coincidenz bringen.

Die Formel Cauchy's für den Fall, wo das Licht in der Einfallsebene polarisirt ist, war

$$\operatorname{tang} 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = - \frac{2 \gamma \cos i \sin^2 r}{\sin(i + r) \sin(i - r) + \gamma^2 \sin^2 r},$$

und jene Mac Cullagh's

$$\operatorname{tang} 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2 D \cos i \sin(\chi - \chi')}{\cos^2 i - D^2}.$$

Nun hat man

$$D \sin(\chi - \chi') = \sqrt{D^2 - \frac{\sin^2 i}{\sin^2 r} \cos^2 r} = \sqrt{\gamma^2} = \gamma,$$

$$D^2 = \frac{\sin^2 i}{\sin^2 r} \cos^2 r + \gamma^2.$$

Substituirt man dies in die Formel Mac Cullagh's, so wird dieselbe

$$tang\ 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = \frac{2\gamma\cos i}{\cos^2 i - \frac{\sin^2 i}{\sin^2 r}\cos^2 r - \gamma^2}$$

$$= \frac{2\gamma\cos i\sin^2 r}{\cos^2 i\sin^2 r - \sin^2 i\cos^2 r - \gamma^2\sin^2 r}$$

$$= -\frac{2\gamma\cos i\sin^2 r}{\sin(i+r)\sin(i-r) + \gamma^2\sin^2 r},$$

wie bei Cauchy.

Die Bestimmung von $\frac{\sin i}{\sin r}$ und γ bei den Metallen stösst auf Schwierigkeiten.

Im Falle der normalen Incidenz hat man

$$\cos r = 1,\quad \gamma = \frac{hl}{2\pi};$$

bezeichnen wir diesen Werth von γ mit g, so dass

$$g = \frac{hl}{2\pi},$$

so erhalten wir durch Substitution in jenen beiden Gleichungen, welche die Formeln Cauchy's und Mac Cullagh's zur Coincidenz bringen:

$$D^2 = n^2 + g^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$D\cos\chi = n;$$

dann für die normale Incidenz ist χ' gleich null und $\chi - \chi' = \chi$ (532). Aus der Relation

$$D^2 = \frac{m^2\sin 2\chi}{\sin 2(\chi - \chi')}$$

erhält man für die normale Incidenz

$$D^2 = m^2$$

und folglich unter Anwendung der Gleichungen (1) und (2)

$$m\cos\chi = n$$
$$m\sin\chi = g.$$

Dies führt darauf, für die normale Incidenz den Absorptionscoëfficienten gleich $m\sin\chi$ und den Brechungsexponenten gleich $m\cos\chi$ zu setzen.

In jenem Falle, wo das einfallende Licht normal zur Einfallsebene polarisirt ist, machen sich die Schwierigkeiten der Anwendung des Continuitätsprincipes geltend. Andererseits stimmt die von Cauchy für die Intensität des reflectirten Lichtes gegebene Formel mit der ersten Formel Mac Cullagh's überein:

$$R' = \frac{m^4\cos^2 i + D^2 - 2Dm^2\cos i\cos(\chi + \chi')}{m^4\cos^2 i + D^2 + 2Dm^2\cos i\cos(\chi + \chi')}.$$

Cauchy hat weder für das parallel zur Einfallsebene polarisirte Licht noch für das normal zu derselben polarisirte die Werthe der durch die Reflexion eingeführten Phasendifferenzen gegeben; allein er hat eine Formel veröffentlicht, welche die Phasendifferenz zwischen den beiden, parallel und normal zur Einfallsebene polarisirten Composanten des reflectirten Lichtes giebt.

Diese Formel ist

$$tang\, 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = tang\, 2\omega \sin(\chi - \chi'),$$

wo der Winkel ω durch die Gleichung

$$tang\, \omega = \frac{D \cos i}{\sin^2 i}$$

gegeben ist.

Man schliesst hieraus:

$$tang\, 2\omega = \frac{2 D \cos i \sin^2 i}{\sin^4 i - D^2 \cos^2 i}$$

und

$$tang\, 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2 D \cos i \sin^2 i \sin(\chi - \chi')}{\sin^4 i - D^2 \cos^2 i}.$$

Diese Formel coincidirt nicht mit jener, welche man aus den ersten Formeln Mac Cullagh's ableitet, nämlich aus

$$tang\, 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = - \frac{2 D \cos i \sin(\chi - \chi')}{D^2 - \cos^2 i}$$

und

$$tang\, 2\pi \frac{\delta'}{\lambda} = - \frac{2 D m^2 \cos i \sin(\chi + \chi')}{m^4 \cos^2 i - D^2}.$$

Ist jedoch der Coëfficient m sehr gross, wie bei den Metallen (532), so coindicirt die Formel Cauchy's angenähert mit jener, welche sich aus den Formeln Mac Cullagh's ergiebt. Man hat nämlich in diesem Falle

$$D^2 = \sqrt{m^4 + \sin^4 i - 2 m^2 \sin i \cos \chi},$$

und kann, wenn m sehr gross ist, näherungsweise $D^2 = m^2$ setzen.

Ebenso ersieht man aus der Formel

$$tang\, 2(\chi - \chi') = \frac{m^2 \sin 2\chi}{m^2 \cos 2\chi - \sin^2 i},$$

dass, wenn m sehr gross ist, $\chi - \chi'$ nahe gleich χ, und χ' nahe gleich null wird.

Mit einem gewissen Grade der Annäherung wird also Cauchy's Formel

$$tang\, 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = - \frac{2 \sin^2 i \sin \chi}{m \cos i} = - \frac{2 \sin i\, tang\, i \sin \chi}{m}.$$

Die Formeln Mac Cullagh's werden

$$tang\ 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = -\frac{2 \cos i \sin \chi}{m}, \quad tang\ 2\pi \frac{\delta'}{\lambda} = -\frac{2 \sin \chi}{m \cos i},$$

woraus sich ergiebt

$$tang\ 2\pi \frac{\delta - \delta'}{\lambda} = \frac{\frac{2 \sin \chi}{m \cos i} - \frac{2 \cos i \sin \chi}{m}}{1 + \frac{4 \sin^2 \chi}{m^2}} = \frac{2 m \sin^2 i \sin \chi}{(m^2 + 4 \sin^2 \chi) \cos i}$$

oder näherungsweise

$$tang\ 2\pi \frac{\delta - \delta'}{\lambda} = -\frac{2 \sin i\ tang\, i \sin \chi}{m},$$

wie bei Cauchy.

537. Experimentelle Verification der Formeln der Metallreflexion.

Die ersten Experimente zur Verification der Resultate der Theorie wurden von Mac Cullagh angestellt. Ein Strahl wird durch einen Nicol geradlinig polarisirt, sodann durch Reflexion an einer Metallfläche elliptisch polarisirt und tritt schliesslich durch ein Fresnel'sches Parallelepiped; ist das einfallende Licht unter 45 Graden gegen die Einfallsebene polarisirt, so kann man die Lage und das Grössenverhältniss der Achsen der Vibrationsellipse bestimmen.

Die folgende Tabelle enthält die von Mac Cullagh für Spiegelmetall gefundenen Zahlen.

Einfallswinkel	Winkel einer der Achsen der Vibrationsellipse mit der Einfallsebene		Winkel, deren Tangenten dem Achsenverhältnisse gleich sind	
	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet
65°	27° 55′	27° 59′	28° 6′	28°
70°	15° 41′	15° 46′	37° 7′	33° 1′
75°	— 8° 45′	— 9° 16′	34° 10′	34° 6′
80°	— 30° 15′	— 29° 25′	27°	26° 53′
86°	— 37° 22′	— 37° 25′	16° 47′	17° 17′

Zwei Messungen dienten zur Bestimmung der in Mac Cullagh's Formeln erscheinenden beiden Constanten m und χ; mittelst der so bestimmten Constanten wurden hierauf die übrigen Zahlen gerechnet und die erhaltenen Resultate mit den Messungen verglichen. Mac Cullagh fand $m = 2{\cdot}94$, $\chi = 64^0 25'$.

Nach Cauchy's Annahmen ergiebt sich aus diesen Zahlen ein Brechungsexponent, welcher ein wenig grösser als eins ist, nach Mac Cullagh's Annahmen ein sehr grosser Brechungsexponent.

Jamin hat bei seinen Versuchen über die Metallreflexion (525) einen Vergleich seiner Zahlen mit jenen Zahlen angestellt, welche sich aus Cauchy's Formeln ergeben; die Uebereinstimmung ist eine hinreichende in Bezug auf die Phasenveränderungen, nicht aber in Bezug auf die Intensitäten.

Die calorimetrischen Messungen Provostaye's und Desain's (522) haben ebenfalls Resultate geliefert, welche mit Cauchy's Formeln übereinstimmen.

Neumann, Cauchy[1]), Beer[2]), Eisenlohr[3]) und Quincke haben die Formeln der Metallreflexion auf eine Form gebracht, in welcher das Amplitudenverhältniss und die Phasendifferenz der beiden reflectirten Composanten als Functionen des Haupteinfallswinkels und des Hauptazimuthes erscheinen; der letztere Winkel definirt sich dadurch, dass seine Tangente dem Verhältnisse der beiden reflectirten Amplitudencomposanten gleich ist, wenn geradlinig polarisirtes Licht unter dem Haupteinfallswinkel (Polarisationswinkel) und unter dem Azimuthe 45° einfällt. In der oben gegebenen Tabelle Quincke's (526) wurde die Rechnung nach der Formel

$$tang \frac{\delta}{\lambda} . 2\pi = sin\, 2B . tang \left(2\, arc. tang = \frac{sin\, i\; tang\, i}{sin\, H . tang\, H}\right)$$

$$cos\; 2\beta = cos\; 2\,B . sin \left(2\, arc. tang = \frac{sin\, i\; tang\, i}{sin\, H\; tang\, H}\right)$$

ausgeführt. In diesen Formeln ist δ die Phasendifferenz, β das Azimuth der wieder hergestellten Polarisation, d. i. das Azimuth des reflectirten Strahles, welches erhalten wird, wenn man die Phasendifferenz durch Einschaltung eines Babinet'schen Compensators aufhebt, B das Hauptazimuth, H der Haupteinfallswinkel, und ist das Azimuth des einfallenden geradlinig polarisirten Strahles gleich 45° vorausgesetzt. Auch hier ergab sich, wie die Tabelle zeigt, eine hinreichende Uebereinstimmung mit der Theorie.

Diese Uebereinstimmung ergab sich auch dann, wenn die Reflexion nicht in Luft, sondern in verschiedenen durchsichtigen Medien stattfand.

Ebenso gut wie Cauchy's Gleichungen stimmen auch die von Neumann gegebenen mit Quincke's Versuchen überein[4]).

---

[1]) *C. R.* VIII. — [2]) Pogg. Ann. XCI, XCII. — [3]) Ibid. CIV. — [4]) Jochmann, Pogg. Ann. CXXXVI.

538. Die Farben der Metalle.

Jamin[1]) hat eine andere Verification in der Abhängigkeit der Metallreflexion von der Farbe des einfallenden Lichtes gesucht. Er bestimmte für verschiedene Metalle und verschiedene Farben des Spectrums die Winkel des Polarisationsmaximums, d. i. die Einfallswinkel, bei welchen die zwischen den beiden Composanten des einfallenden Lichtes entstehende Phasendifferenz gleich $\frac{\lambda}{4}$ ist. Bei diesen Einfallswinkeln wird, wie wir gesehen haben, nach zwei Reflexionen die geradlinige Polarisation wieder hergestellt. Auch maass Jamin den Winkel der Polarisationsebene des reflectirten Strahles mit der Einfallsebene. Um die erhaltenen Resultate mit der Theorie zu vergleichen, benutzte er die Formeln Cauchy's. Diese Formeln liefern zwei Gleichungen mit den zwei Constanten m und χ, welche zunächst durch Messung experimentell bestimmt werden mussten. Sodann wurden mittelst der Formeln die übrigen Fälle gerechnet und die theoretischen Resultate mit den experimentell gefundenen verglichen.

Auch berechnete Jamin das Reflexionsvermögen verschiedener Metalle bei normaler Incidenz für die verschiedenen Farben des Spectrums; die erhaltenen Resultate bilden eine Erklärung der Farben der Metalle. Er bestätigte die Resultate älterer Versuche von Bénédict Prevost, welcher gefunden hatte, dass die Farbe der Metalle bei mehrfacher Reflexion sich verändert. Er berechnete die Intensitäten der Strahlen verschiedener Farbe nach zehn Reflexionen und fand Zahlen, welche mit den experimentell gefundenen übereinstimmten.

Jamin hat die Reflexion an sieben Metallen studirt, und die letzteren in drei Kategorien getheilt. Silber, Glockenmetall, Messing, Kupfer und Spiegelmetall ergaben ein von Roth gegen Violett abnehmendes Reflexionsvermögen. Diese Abnahme ist schwach für Silber, stark für Glockenmetall, Kupfer und Messing. Der zweiten Kategorie gehört Stahl an, welcher weiss ist und eine sehr geringe Variation des Reflexionsvermögens zeigt, der dritten Kategorie Zink, bei welchem das Reflexionsvermögen von Roth gegen Violett wächst. Die folgende Tabelle bezieht sich auf das Reflexionsvermögen bei einer einzigen, normalen Reflexion.

---

[1]) *Ann. de chim et de phys.* (3), XXII, 311.

Farbe	Silber	Glockenmetall	Messing	Kupfer	Spiegelmetall	Stahl	Zink
Roth . . .	0·929	0·747	0·720	0·682	0·692	0·609	0·576
Orange . .	0·909	0·724	0·682	0·623	0·654	0·600	0·594
Gelb . . .	0·905	0·705	0·662	0·540	0·632	0·599	0·602
Grün . . .	0·902	0·630	0·619	0·470	0·625	0·593	0·616
Blau . . .	0·878	0·591	0·528	0·434	0·606	0·608	0·628
Indigo . .	0·875	0·578	0·456	0·423	0·599	0·604	0·635
Violett . .	0·867	0·566	0·498	0·405	0·599	0·599	0·636

Die Resultate nach zehn auf einander folgenden Reflexionen zeigen die Verhältnisse noch deutlicher. Die Zahlen sind:

Farbe	Silber	Glockenmetall	Messing	Kupfer	Spiegelmetall	Stahl	Zink
Roth . . .	0·478	0·054	0·037	0·022	0·035	0·007	0·004
Orange . .	0·388	0·039	0·022	0·009	0·014	0·006	0·005
Gelb . . .	0·369	0·030	0·016	0·002	0·010	0·006	0·006
Grün . . .	0·357	0·010	0·008	0·000	0·009	0·007	0·008
Blau . . .	0·273	0·005	0·001	0·000	0·006	0·007	0·009
Indigo . .	0·264	0·004	0·000	0·000	0·005	0·006	0·010
Violett . .	0·242	0·003	0·000	0·000	0·006	0·006	0·011

Man sieht, dass bei Silber das Roth vorherrscht; die Farbe des reflectirten Lichtes ist orangegelb.

Bei Glockenmetall verhält es sich ebenso, doch erscheint dasselbe noch röthlicher.

Auch Messing erscheint orangegelb.

Bei Kupfer fehlen die grünen, blauen und violetten Strahlen vollständig, dasselbe erscheint fast rein roth. Bei Spiegelmetall bemerkt man einen raschen Abfall von Roth zu Orange und einen langsamen von Orange bis Violett; das Metall zeigt ein wenig gesättigtes Roth. Stahl erscheint weiss und Zink wenig gesättigt blauviolett.

Zur Berechnung des Reflexionsvermögens bediente sich Jamin der Cauchy'schen Formeln.

539. Brechungsexponenten und Extinctionscoëfficienten.

Beer[1]) hat die Jamin'schen Resultate zur Bestimmung der Constanten m und χ und zur Berechnung der Brechungsexponenten und der Extinctionscoëfficienten der Metalle bei normaler Incidenz benutzt. Der Extinctionscoëfficient γ ist allgemein gleich $\frac{h\lambda}{2\pi \cos r}$, und wird für die normale Incidenz

$$g = \frac{H\lambda}{2\pi}.$$

H ist so beschaffen, dass e^{-Hz} die Amplitude der Vibrationsbewegung in einer Entfernung z von der Trennungsfläche darstellt; H muss folglich sehr gross sein, woraus aber nicht das Gleiche für g folgt, da λ sehr klein ist.

Beer erhielt die folgenden Zahlen:

Brechungsexponenten.

Farbe	Silber	Glockenmetall	Messing	Kupfer	Spiegelmetall	Stahl	Zink
Roth . . .	0·2623	1·0332	0·8216	0·8865	1·2006	2·3679	1·9985
Orange . .	0·2615	1·0305	0·8062	0·9478	1·1631	2·2783	1·8683
Gelb . . .	0·2581	1·0189	0·8000	1·1140	1·1290	2·2194	1·7735
Grün . . .	0·2452	1·0855	0·8194	1·3057	1·1597	2·0391	1·4262
Blau . . .	0·2229	1·1359	0·9235	1·3052	0·9876	1·8574	1.1901
Indigo . .	0·2154	1·0942	1·0340	1·3151	0·9117	1·7520	1·0938
Violett . .	0·2059	1·1507	1·0797	1·3090	0·9117	1·6001	1·0006

Extinctionscoëfficienten.

Farbe	Silber	Glockenmetall	Messing	Kupfer	Spiegelmetall	Stahl	Zink
Roth . . .	3·4668	3·1349	2·5760	2·5265	3·6753	3·4684	2·9944
Orange . .	2·9285	3·0925	2·3828	2·2631	3·1901	3·3393	2·9780
Gelb . . .	2·8133	2·9197	2·2437	2·0456	2·9415	3·3033	2·7830
Grün . . .	2·6667	2·5034	2·0356	1·9675	2·8948	3·1370	2·7400
Blau . . .	2·1269	2·3373	1·7097	1·7323	2·6297	3·1362	2·5057
Indigo . .	2·0321	2·2150	1·5905	1·7123	2·5225	3·0240	2·4707
Violett . .	1·8651	2·2223	1·4134	1·6336	2·5225	2·8700	2·3914

[1]) Pogg. Ann. XCII.

Man sieht, dass der Brechungsexponent des Silbers beträchtlich kleiner als eins erscheint und dass er von Roth gegen Violett abnimmt. Bei Glockenmetall nimmt der Brechungsexponent von Roth gegen Violett erst ab, dann zu, und ist für Violett grösser als für Roth. Bei Messing findet dasselbe statt, überdies ist der Brechungsexponent für Roth kleiner und für Violett grösser als eins. Dieses letztere Resultat ergiebt sich auch für Kupfer, dessen Exponent von Roth gegen Violett continuirlich wächst. Bei Stahl und Zink ist der Exponent grösser als eins und nimmt von Roth gegen Violett ab.

Die Extinctionscoëfficienten sind für alle Metalle grösser als eins und nehmen von Roth gegen Violett ab. Multiplicirt man diese Coëfficienten mit $\frac{2\pi}{\lambda}$, so hat man H, welches sehr gross ist. Dieses Resultat stimmt mit der raschen Abnahme der Amplitude der Vibrationsbewegung in den Metallen überein.

Die Zahlen, welche sich für die Brechungsexponenten ergeben, haben etwas Unwahrscheinliches an sich und können Zweifel an der Richtigkeit der Theorie erwecken; es befremdet, dass die Brechungsexponenten der Metalle zum Theil kleiner als eins sein sollen, oder dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in den Metallen grösser als im leeren Raume sein soll. Zwar wurde dieses unwahrscheinliche theoretische Resultat durch Messungen Quincke's bestätigt [1]), welcher in eins der beiden interferirenden Bündel des Jamin'schen Interferenzrefractors (46) eine unversilberte und in das andere eine identische, durchsichtig versilberte Glasplatte brachte, und fand, dass sich die Interferenzstreifen nach der dem Metalle abgewandten Seite verschoben, woraus sich allerdings das Resultat ergiebt, dass die Phase des Lichtstrahles beim Durchgange durch das Metall beschleunigt wird; doch fand Quincke selbst nach einer anderen Methode für das Silber Brechungsexponenten zwischen 6·7 und 12·5, und Wernicke [2]) fand nach einer noch anderen Methode für Silber den Brechungsexponenten 3·2 bis 4·8.

540. Brechungsexponenten und Dispersion undurchsichtiger Körper.

Bestimmungen der Brechungsexponenten solcher Körper, welche den Metallen an Undurchsichtigkeit nahe stehen, wurden von W. Wernicke mittelst der Newton'schen Interferenzen durchgeführt.

Die Substanzen wurden in dünnen, noch durchsichtigen Schichten auf metallener Unterlage niedergeschlagen und das von der Lamelle senkrecht reflectirte Licht spectral zerlegt. Das Spectrum zeigt Inter-

[1]) Pogg. Ann. CXIX, CXX. — [2]) Ibid. 1875.

ferenzstreifen (44), welche von der gegenseitigen Einwirkung der an der Vorderfläche und Hinterfläche der Lamelle reflectirten Strahlen herrühren. Die Beobachtung findet bei zunehmender Dicke der Lamelle statt. Ist dieselbe noch sehr dünn, so erscheint das Spectrum unverändert. Bei einer gewissen Dicke erscheint am violetten Ende des Spectrums ein dunkler Streifen, und dieser wandert bei zunehmender Dicke gegen das rothe Ende des Spectrums, um am violetten Ende neuerdings aufzutreten. Bei weiter zunehmender Dicke hat man zwei, drei und mehr dunkle Streifen. Fällt einer derselben mit einer Fraunhofer'schen Linie zusammen, und vergrössert man die Dicke der Lamelle, bis der nächste Streifen auf dieselbe Fraunhofer'sche Linie fällt, so hat die Dicke der Lamelle um eine Wellenlänge l des Lichtes in der betreffenden Substanz zugenommen. Die Zunahme der Dicke der Lamelle wird durch Abwägung bestimmt. Das eben beschriebene Verfahren eliminirt den Einfluss der mit der Reflexion verbundenen Phasenveränderungen. Ist ε die der Wellenlänge l entsprechende Zunahme der Lamellendicke und m die Nummer des Streifens, so hat man

$$l = \frac{2\varepsilon}{m}$$

und man hat für den Brechungsexponenten:

$$n = \frac{m s o \lambda}{2p},$$

wenn s das specifische Gewicht der Substanz ist, o die Fläche der Lamelle, p die Gewichtszunahme und λ die Wellenlänge in Luft.

Es ergab sich:

n für	B	C	D	E	F
Kupferoxydul	2·534	2·558	2·705	2·816	2·963
Bleisuperoxydhydrat . .	1·802	2·010	2·229	—	—
Mangansuperoxydhydrat	—	1·801	1·862	1·944	—

541. Polarisation des gebrochenen Lichtes.

Mac Cullagh hat bemerkt, dass bei den Metallen nicht nur das reflectirte, sondern auch das gebrochene Licht eine von der Lage der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes abhängige Phasendifferenz zeigen müsse, woraus folgt, dass ein einfallender geradlinig polarisirter Strahl durch die Brechung sich in einen elliptisch polarisirten verwandeln muss.

Faraday konnte an sehr dünnen Gold- und Platinblättchen partielle Depolarisation nachweisen, was auf das Vorhandensein der elliptischen Polarisation hindeutet [1]).

In der That fand Quincke [2]), welcher das durch dünne Silber-, Gold- und Platinschichten gehende Licht mittelst des Babinet'schen Compensators untersuchte, dass die normal zur Einfallsebene polarisirte Composante gegen die parallel zur Einfallsebene polarisirte stets verzögert ist, wie bei der Reflexion, und dass die Phasendifferenz und das Amplitudenverhältniss der beiden Composanten mit wachsender Incidenz zunimmt.

542. Newton's Farbenringe, hervorgebracht durch Metallreflexion.

Nach dem Vorhergehenden kann man die Veränderungen vorhersehen, welche die Newton'schen Farbenringe erleiden müssen, wenn bei dem Versuche nicht zwei Gläser verwendet, sondern eine Glaslinse auf eine Metallplatte gelegt wird.

Bei Anwendung natürlichen oder in der Einfallsebene polarisirten Lichtes erscheinen die Ringe wenig verändert, doch im Centrum mehr grau als schwarz.

Ist das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, so erleiden die Ringe sehr merkliche Veränderungen. In der Nähe der normalen Incidenz ist die Abweichung gering, entfernt man sich aber von derselben, so verschwindet der centrale dunkle Fleck: im Centrum bildet sich ein farbiger Fleck, umgeben von einem dunklen Ringe. Die Breite dieses dunklen Ringes verringert sich bei zunehmendem Incidenzwinkel zu einem Minimum und nimmt dann wieder zu, so dass bei der streifenden Incidenz der dunkle centrale Fleck restaurirt ist. Der centrale farbige Fleck erreicht das Maximum seiner Grösse und der dunkle Ring das Minimum seiner Breite, wenn der Einfallswinkel dem Winkel des Polarisationsmaximums gleichkommt, d. i. wenn die Phasendifferenz zwischen den beiden Composanten des reflectirten Lichtes gleich $\frac{\lambda}{4}$ ist.

Ueber die Newton'schen Farbenringe zwischen Glas- und Metallflächen wurden mannigfache Versuche angestellt von G. Quincke [3]) und Glan [4]). Schon Jamin und Senarmont hatten den Versuch gemacht, mittelst der Ringe die absoluten Phasenveränderungen der beiden Composanten des reflectirten Lichtes zu bestimmen.

---

[1]) *Phil. Trans.* 1857, p. 145. — [2]) Pogg. Ann. CXIX. — [3]) Optische Experimentaluntersuchungen. Pogg. Ann. CXLII. — [4]) Wied. Ann. VII.

543. Die Versuche Airy's mit Diamant und Blende.

Airy[1]) hat zuerst die nun zu beschreibenden Erscheinungen beobachtet, mit welchen er die elliptische Polarisation durch Reflexion an stark brechenden durchsichtigen Medien entdeckte. Er stellte seine Versuche mit Diamant und Blende an, deren Brechungsexponenten sehr gross sind. Er fand bei diesen Körpern ähnliche Erscheinungen wie bei den Metallen. Man kann einen Diamanten von kleinen Dimensionen benutzen, setzt auf eine seiner Flächen eine Convexlinse aus Glas, und betrachtet die Ringe mittelst eines schwach vergrössernden Mikroskops. Der schwarze centrale Fleck öffnet sich 3 oder 4 Grade vor dem Winkel des Polarisationsmaximums, der entstandene centrale farbige Fleck erreicht seine grösste Ausdehnung, wenn die Incidenz dem Winkel des Polarisationsmaximums gleich geworden ist, und verschwindet wieder 5 oder 6 Grade hinter dem Polarisationsmaximum. Beim Diamanten erscheint also ein Phänomen auf einen Spielraum von 8 bis 10 Graden beschränkt, welches bei den Metallen innerhalb eines Spielraumes von 40 bis 50 Graden wahrgenommen wird. Zinkblende zeigt dieselben Erscheinungen.

Man sieht, dass bei diesen Körpern die senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Composante keinen Phasensprung erfährt, wenn der Einfallswinkel dem Polarisationswinkel gleich wird, sondern eine allmälige Phasenänderung, welche das Entstehen der elliptischen Polarisation verursacht. Das gebrochene Licht muss ebenfalls elliptisch polarisirt sein, und es würden sich diese Körper besser als die Metalle zum Studium der elliptischen Polarisation des gebrochenen Lichtes eignen.

544. Die Versuche Jamin's.

Wir haben gesehen, dass nichtmetallische, durchsichtige und starkbrechende Körper die Erscheinungen der elliptischen Polarisation durch Reflexion hervorbringen. Jamin untersuchte nun, ob nicht alle, auch die schwachbrechenden durchsichtigen Körper in der Nähe des Polarisationswinkels dieselben Eigenschaften zeigen. Der experimentelle Nachweis der elliptischen Polarisation durch Reflexion ist weit schwieriger bei den durchsichtigen Körpern, als bei den Metallen. Die beiden Composanten des reflectirten Lichtes haben bei den Metallen beträchtliche Intensitäten, bei den durchsichtigen Körpern hingegen, und insbeson-

[1]) *Camb. Trans.* IV, 219.

dere in der Nähe des Polarisationswinkels, ist die Intensität der senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Composante nahe gleich Null.

Jamin[1]) ist diesem letzten Uebelstande in der folgenden Weise begegnet. Er liess nahezu senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht auf die reflectirende Platte fallen, so dass die einfallende senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Composante verhältnissmässig sehr intensiv, die andere sehr wenig intensiv war. Da nun die senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Composante weit schwächer reflectirt wird, werden nach der Reflexion die beiden Composanten in der Nähe des Polarisationswinkels der Grösse nach vergleichbar, und es werden die Erscheinungen der elliptischen Polarisation wahrgenommen werden können, wenn durch die Reflexion eine Phasendifferenz der beiden Composanten entsteht. Um die Erscheinungen hinreichend intensiv zu erhalten, benutzte Jamin Sonnenlicht. Der reflectirte Strahl wurde mittelst eines Babinet'schen Compensators (257) untersucht.

Ein Strahl MN, Fig. 26 (S. 123), welcher durch die Mitte des Compensators geht, erfährt keine Aenderung des Polarisationszustandes. Anders verhält es sich mit einem Strahle PQ, welcher das erste Quarzprisma unter einer Dicke e durchsetzt und das zweite unter einer Dicke e'. Der eintretende Strahl zerlegt sich nach den beiden Hauptschnitten des Compensators in zwei Composanten, zwischen welchen durch den Compensator eine Phasendifferenz eingeführt wird, entsprechend einer gewissen Quarzdicke $e - e'$.

Nehmen wir an, es falle ein Bündel paralleler polarisirter Strahlen normal auf die Fläche AB des Compensators, so dass die Polarisationsebene der einfallenden Strahlen mit den Hauptschnitten des Compensators Winkel von 45 Graden bildet. Jeder austretende Strahl setzt sich sodann zusammen aus zwei rechtwinkelig polarisirten Strahlen von gleicher Intensität und einer gewissen Phasendifferenz. Diese letztere ist Null für den Strahl MN und wächst proportional der Entfernung der Strahlen von dem Strahle MN.

Alle Strahlen, welche durch die Dickendifferenz der Prismen eine Phasendifferenz gleich einer ungeraden Zahl halber Wellenlängen erfahren, treten senkrecht zur ursprünglichen Ebene polarisirt aus; alle Strahlen, für welche diese Phasendifferenz eine gerade Zahl halber Wellen beträgt, treten parallel zur ursprünglichen Ebene polarisirt aus. Lässt man demnach das vom Compensator kommende Licht durch einen Analyseur treten, dessen Hauptschnitt der ursprünglichen Polarisationsebene parallel ist, so zeigt das ausserordentliche Bild dem Strahle MN entsprechend einen schwarzen Streifen; zu beiden Seiten desselben treten zwei weisse Streifen auf, hierauf folgen beiderseits farbige Streifen bei Anwendung weissen Lichtes, hingegen abwechselnd helle und dunkle Streifen bei Anwendung homogenen Lichtes. Das ordentliche Bild zeigt

[1]) *Ann. de chim. et de phys.* (3), XXIX, 263.

im Gegentheile eine centrale helle Franse, welche von zwei schwarzen Fransen begrenzt ist, u. s. w.

Jamin benutzte den Babinet'schen Compensator zum Studium der elliptischen Polarisation und zur Messung der Constanten, welche einen elliptisch polarisirten Strahl charakterisiren. Ein solcher kann stets in zwei rechtwinkelig polarisirte Strahlen von gewisser Phasendifferenz zerlegt gedacht werden. Lässt man also einen elliptisch polarisirten Strahl auf den Compensator fallen, so bringen die beiden, parallel den Hauptschnitten genommenen Composanten des einfallenden Lichtes schon eine gewisse Phasendifferenz mit, und es folgt, dass die Fransen in den Bildern des Analyseurs eine Verschiebung erfahren und nicht mehr symmetrisch in Bezug auf den Strahl MN liegen.

Man kann den Apparat so einrichten, dass die Phasendifferenz der beiden Composanten gemessen werden kann. Zu diesem Zwecke wird in einem Gehäuse eines der beiden Prismen fest gemacht, während das andere mittelst einer Mikrometerschraube bewegt werden kann. Ein feiner Faden gestattet die Lage der Streifen zu bestimmen. Man beginnt mit einem geradlinig polarisirten Strahlenbündel, dessen Polarisationsebene mit den Hauptschnitten des Compensators Winkel von 45 Graden bildet und lässt die Strahlen durch einen Analyseur treten, dessen Hauptschnitt der ursprünglichen Polarisationsebene parallel ist. Die centrale schwarze Franse des ausserordentlichen Bildes entspricht dann dem Strahle MN; man bringt den Faden zur Coincidenz mit dieser Franse, und dreht hierauf die Mikrometerschraube, bis die Franse von der Wegdifferenz $\frac{\lambda}{2}$ unter den Faden kommt. Es sei L die entsprechende Verschiebung des beweglichen Prismas; es entspricht dann die Verschiebung L einer Phasendifferenz $\frac{\lambda}{2}$, und eine beliebige Verschiebung l einer Phasendifferenz $\frac{l}{L}\,\frac{\lambda}{2}$.

Dies vorausgesetzt, sieht man, wie der Compensator zum Studium der elliptischen Polarisation benutzt werden kann. Man bringt den Analyseur in solche Lage, dass die centrale schwarze Franse so schwarz als möglich erscheint. Sei OC die entsprechende Lage des Hauptschnittes des Analyseurs: der Strahl, welcher der centralen schwarzen Franse entspricht, wird durch den Compensator parallel seinen Hauptschnitten in zwei rechtwinkelig polarisirte Strahlen von einer gewissen Phasendifferenz δ zerlegt; diese Phasendifferenz wird durch den Compensator aufgehoben und die geradlinige Polarisation derart hergestellt, dass die Schwingungen parallel OC vor sich gehen. Um die Phasendifferenz der beiden Composanten des elliptisch polarisirten Strahles zu bestimmen, genügt es, die Phasendifferenz zu messen, welche der Compensator an der Stelle der centralen schwarzen Franse hervorbringt, denn diese Phasendifferenz ist der zu bestimmenden gleich und entgegengesetzt.

Zu diesem Zwecke bringt man die schwarze Franse mittelst der Mikrometerschraube unter den Faden: ist die hierzu nöthige Verschiebung gleich l, so ist die gesuchte Phasendifferenz $\frac{l}{L} \frac{\lambda}{2}$.

Was das Amplitudenverhältniss der beiden Composanten des elliptisch polarisirten Strahles anlangt, so ist dasselbe gleich der Tangente des Winkels des Hauptschnittes des Analyseurs mit einem der Hauptschnitte des Compensators. Der Compensator gestattet also, die Phasendifferenz der nach zwei beliebigen rechtwinkeligen Richtungen genommenen Composanten eines elliptisch polarisirten Strahles und das Verhältniss der Amplituden dieser Composanten zu bestimmen.

Sind die Hauptschnitte des Compensators den Achsen der Vibrationsellipse parallel, so ist die Phasendifferenz der beiden diesen Hauptschnitten parallelen Composanten gleich $\frac{\lambda}{4}$. Verschiebt man also das bewegliche Prisma des Compensators um $\frac{L}{2}$, so dass am Faden ein Gangunterschied $\frac{\lambda}{4}$ hervorgebracht wird, so kann man die Achsenrichtungen der Vibrationsellipse dadurch finden, dass man den Compensator dreht, bis die dunkle Centralfranse des ausserordentlichen Bildes auf den Faden fällt. Die Hauptschnitte des Compensators sind dann den Achsen der Vibrationsellipse parallel. Um das Achsenverhältniss zu bestimmen, dreht man sodann den Analyseur, bis die Franse unter dem Faden so schwarz als möglich erscheint. Die Tangente des Winkels des Hauptschnittes des Analyseurs mit einem der Hauptschnitte des Compensators giebt das Achsenverhältniss.

Indem Jamin mittelst des eben beschriebenen Verfahrens die durch Reflexion an durchsichtigen Körpern entstehende elliptische Polarisation studirte, bediente er sich desselben Apparates, mit welchem er seine Messungen über Metallreflexion ausführte (519).

Die reflectirende Platte ist in verticaler Lage auf dem Tischchen im Centrum des Theilkreises befestigt. Ein festes Fernrohr mit Nicol sendet polarisirtes Licht nach der reflectirenden Platte. Ein zweites, am getheilten Kreise bewegliches Fernrohr mit Nicol nimmt das reflectirte Licht auf. Der Compensator wird vor dem Beobachtungsfernrohre so angebracht, dass die reflectirten Strahlen den Compensator durchsetzen, ehe sie an den Analyseur gelangen. Will man eine Beobachtung anstellen, so wählt man eine Incidenz nahe dem Polarisationswinkel, und stellt den Polariseur so, dass die Polarisationsebene nahe normal zur Einfallsebene liegt: die beiden Composanten des reflectirten Lichtes haben dann vergleichbare Intensitäten, und man kann mittelst des Compensators in der angegebenen Weise die Richtungen und das Grössenverhältniss der Achsen der Vibrationsellipse bestimmen.

Das reflectirte Licht kann so vollständig bestimmt werden bis auf die absolute Intensität; allein man weiss, dass diese letztere durch die Fresnel'schen Formeln mit einem hinreichenden Grade der Genauigkeit gegeben sind.

545. Positive und negative Substanzen.

Es ist noch übrig, von dem Zeichen der Phasendifferenz der Composanten des reflectirten Strahles zu sprechen.

Wird bei der Reflexion die normal zur Einfallsebene polarisirte Composante des reflectirten Strahles gegen die andere Composante verzögert, so nennt Jamin die Reflexion eine positive Reflexion. Ist hingegen die parallel zur Einfallsebene polarisirte Composante verzögert, eine negative Reflexion.

Bei der positiven Reflexion ist der reflectirte Strahl von rechts nach links oder von links nach rechts elliptisch polarisirt, je nachdem die Polarisationsebene des einfallenden Strahles links oder rechts von der Einfallsebene liegt. Bei der negativen Reflexion verhält es sich umgekehrt.

Die meisten Substanzen erweisen sich als positiv: fast alle festen Körper, deren Brechungsexponent grösser als 1·4, die Metalle, viele Flüssigkeiten, auch schwachbrechende. Die Körper mit negativer Reflexion haben meist einen Brechungsexponenten kleiner als 1·4. Zu denselben gehören Flussspath, Hyalith und eine grosse Zahl Flüssigkeiten, auch Wasser. Als neutral erweist sich eine geringe Zahl Substanzen, darunter Alaun senkrecht zur Octaederachse, Menilit und Glycerin. Die neutralen Substanzen bringen in der Nähe des Polarisationswinkels keine elliptische Polarisation hervor, polarisiren das natürliche Licht unter dem Polarisationswinkel vollständig, und ihre Brechungsexponenten sind nahe gleich 1·4.

Für die positiven Substanzen ist der Ellipticitätscoefficient positiv, für die negativen negativ, und für die neutralen gleich Null.

Bei den Substanzen mit positiver oder negativer Reflexion, ausgenommen die Metalle, den Diamanten und einige andere stark brechende Körper, ist die elliptische Polarisation durch Reflexion geradlinig polarisirten Lichtes nur bei Incidenzen merkbar, welche vom Polarisationswinkel um nicht mehr als 2 oder 3 Grade differiren: ausserhalb dieses Intervalles ist das reflectirte Licht, wie das einfallende, geradlinig polarisirt.

Man sieht schliesslich, dass, mit Ausnahme der wenigen neutralen Substanzen, sämmtliche Körper selbst unter dem Polarisationswinkel das Licht nicht vollständig polarisiren, und dass sie in der Nähe des Polarisationswinkels geradlinig polarisirtes Licht in elliptisch polarisirtes verwandeln.

Es muss jedoch hinzugefügt werden, dass das unter dem Polarisationswinkel reflectirte elliptisch polarisirte Licht sich wenig von geradlinig polarisirtem Lichte unterscheidet, indem die Amplitude der normal zur Einfallsebene polarisirten Composante des reflectirten Lichtes sehr klein ist im Vergleiche mit der Amplitude der parallel zur Einfallsebene polarisirten; die erstere Amplitude kann 50- oder 100 mal kleiner sein als die zweite, woraus folgt, dass die diesen Amplituden entsprechenden Intensitäten sich wie 1 : 2500 oder 1 : 10 000 verhalten. Man kann daher sagen, dass Fresnel's Theorie für durchsichtige Körper, welche keinen sehr grossen Brechungsexponenten haben, exacte Resultate giebt.

Die besprochenen Verhältnisse ändern sich, wenn die Reflexion nicht in Luft, sondern in anderen durchsichtigen Substanzen stattfindet, so dass derselbe Körper in einem Mittel positive und im anderen negative Reflexion zeigen kann. Und zwar haben die Untersuchungen Quincke's[1]) insbesondere Folgendes ergeben.

Entsteht bei der Reflexion in einem Mittel beim Einfallswinkel i eine gewisse Phasendifferenz und ein gewisses Amplitudenverhältniss, so entsteht in einem anderen Mittel dieselbe Phasendifferenz und dasselbe Amplitudenverhältniss bei einem Einfallswinkel i', wenn

$$\sin i = n \sin i',$$

wo n der Brechungsexponent beim Uebergange aus dem ersten Mittel in das zweite Mittel ist.

546. Die Versuche W. Wernicke's[2]).

Wird Licht von einem dünnen, durchsichtigen isotropen Plättchen reflectirt, so findet eine Interferenz der an den beiden Flächen des Blättchens reflectirten Lichtmengen statt, und die Intensität des von dem Blättchen reflectirten Lichtes wird ein Minimum für

$$2d = \frac{1}{2} \frac{q \lambda_1}{\cos \alpha_1}.$$

Es bedeutet hier d die Dicke des Blättchens, λ_1 die Wellenlänge des Lichtes im Blättchen, α_1 den Winkel zwischen dem Lichtstrahle im Blättchen und dem Einfallslothe und q eine beliebige ganze Zahl, welche gerade ist, wenn der Brechungsindex der Schicht grösser oder kleiner als jeder der beiden Grenzmedien ist, ungerade, wenn er zwischen den beiden letzteren liegt; überdies ist vorausgesetzt, dass ausser dem Verluste einer halben Welle bei den Reflexionen und Brechungen keine Phasenänderungen eintreten.

---

[1]) Pogg. Ann. CXXVIII. — [2]) Wied. Ann. 1885.

Indessen haben wir schon gesehen, dass in der Nähe des Polarisationswinkels solche Phasendifferenzen vorhanden sind, und Wernicke hat die letztere Formel experimentell geprüft, um die Phasenveränderungen für das parallel und das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Licht gesondert nachzuweisen, wo dieselben vorhanden sind.

Durch den Spalt des Collimators eines Spectrometers mit horizontalem Kreise trat Sonnenlicht ein und fiel auf die in der Mitte des drehbaren Tischchens vertical aufgestellte zu untersuchende Platte. Dieselbe reflectirte die parallelen Strahlen in das Beobachtungsfernrohr, welches um die verticale Achse des Instrumentes drehbar war. Es konnte so der Einfallswinkel bestimmt werden. Ist dieser abgelesen, so wird der Tisch mit der Platte festgeklemmt und vor das Objectiv des Beobachtungsfernrohres ein Prismensystem mit gerader Durchsicht gesetzt. Es entsteht ein Spectrum, welches mit den von der Interferenz an der dünnen Schicht herrührenden dunkeln Streifen durchzogen ist. Im Brennpunkte des Objectivs befindet sich eine Spitze, welche durch eine Mikrometerschraube in der Focalebene verschiebbar ist. Mittelst dieser Vorrichtung konnten die den Interferenzstreifen entsprechenden Wellenlängen unter Benutzung der bekannten Wellenlängen der Fraunhofer'schen Linien und eines Interpolationsverfahrens bestimmt werden. Ueberdies war zwischen Ocular und Auge ein Nicol angebracht, welches gestattete, parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht zu studiren.

Die von Wernicke untersuchten Substanzen waren: Luft zwischen Glas, Luft zwischen Glas und Flussspath, Jodsilber zwischen Glas und Luft, Kupferoxydul zwischen Luft und Gelatine, Kupferoxydul zwischen Gelatine und Canadabalsam, Bleisesquihydroxyd zwischen Luft und Gelatine und Bleisesquihydroxyd zwischen Gelatine und Canadabalsam. Zur Berechnung der obigen Formel mussten in den einzelnen Fällen die Brechungsexponenten für die Fraunhofer'schen Linien bestimmt werden.

Die folgenden Tabellen geben die bei verschiedenen Einfallswinkeln α gemessenen Wellenlängen λ der Interferenzstreifen nebst ihrer Ordnungszahl m, und darunter die aus der obigen Formel, d. h. unter der Voraussetzung, dass keine Phasenänderung stattfinde, berechnete Dicke d der Luftschicht an, und zwar für parallel zur Einfallsebene polarisirtes und für senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht. Die Winkel sind bis auf 20 Secunden genau, die Temperatur betrug 20° C. Die Einheit von λ und d ist 0·000 001 mm.

Luftschicht zwischen planparallelen Glasplatten bei parallel der Einfallsebene polarisirtem Lichte.

$\alpha = 13^0\ 51'$

λ (m)	639 (8)	569 (9)	510 (10)	464 (11)
d	2632	2637	2627	2629

$\alpha = 30^0$

λ (m)	569 (8)	504 (9)	455 (10)
d	2628	2619	2627

$\alpha = 50^0$

λ (m)	565 (6)	483 (7)
d	2636	2630

$\alpha = 52^0$

λ (m)	647 (5)	540 (6)
d	3627	2636

$\alpha = 52^0\ 30'$

λ (m)	640 (5)	533 (6)
d	2628	2627

$\alpha = 55^0$

λ (m)	640 (5)	5026 (6)	482 (7)
d	2632	2626	2636

$\alpha = 55^0\ 30'$

λ (m)	594 (5)	496 (6)	427 (7)
d	2622	2627	2638

$\alpha = 56^0$

λ (m)	587 (5)	490 (6)	420 (7)
d	2624	2629	2629

$\alpha = 56^0\ 30'$

λ (m)	579 (5)	483 (6)
d	2623	2625

$\alpha = 57^0$

λ (m)	573 (5)	477 (6)
d	2630	2626

$\alpha = 57^0\ 30'$

λ (m)	565 (5)	470 (6)
d	2629	2624

$\alpha = 58^0$

λ (m)	557 (5)	465 (6)
d	2627	2632

$\alpha = 59^0$

λ (m)	540 (5)	450 (6)
d	2621	2627

$\alpha = 60^0$

λ (m)	525 (5)	438 (6)
d	2625	2628

Luftschicht zwischen den planparallelen Glasplatten bei senkrecht zur Einfallsebene polarisirtem Licht.

$\alpha = 52^0$

λ' (m)	650·5 (5)	545 (6)
d'	2642	2655

$\alpha = 52^0\ 30'$

λ' (m)	645 (5)	538·5 (6)
d'	2651	2654

$\alpha = 55^0$

λ' (m)	622 (5)	520 (6)
d'	2711	2719

$\alpha = 56^0\ 30'$

λ' (m)	552 (6)	469 (7)
d'	3000	2981

$\alpha = 57^0$

λ' (m)	553 (6)	466 (7)
d'	3046	2995

$\alpha = 57^0\ 30'$

λ' (m)	550 (6)	463 (7)
d'	3071	3016

$\alpha = 55^0\ 30'$

$\lambda'(m)$	629 (5)	530 (6)
d'	2777	2818

$\alpha = 55^0\ 40'$

$\lambda'(m)$	—	531 (6)
d'	—	2831

$\alpha = 55^0\ 45'$

$\lambda'(m)$	—	534 (6)
d'	—	2846

$\alpha = 56^0$

$\lambda'(m)$	536 (6)	468 (7)
d'	2892	2929

$\alpha = 58^0$

$\lambda'(m)$	546 (6)	458 (7)
d'	3079	3025

$\alpha = 59^0$

$\lambda'(m)$	533 (6)	447 (7)
d'	3105	3041

$\alpha = 60^0$

$\lambda'(m)$	521 (6)	436 (7)
d'	3126	3052

Schon früher hatte ein anderes Plattenpaar bei parallel zur Einfallsebene polarisirtem Lichte für die Dicke d der Luftschicht einen constanten Werth ergeben, und bei senkrecht zur Einfallsebene polarisirtem Lichte für Einfallswinkel kleiner als 55^0 und grösser als 60^0 keine erhebliche Veränderung in der Lage der Streifen, hingegen in der 6^0 umfassenden Umgebung des Polarisationswinkels sehr erhebliche Unterschiede, so dass geschlossen werden konnte, dass die Phasenänderung ganz vorzugsweise für senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht eintritt, während sie für parallel polarisirtes entweder Null oder sehr gering ist. Das Plattenpaar, auf welches sich die obigen Tabellen beziehen, war vollkommener als das erste. Man ersieht aus den erhaltenen Zahlen, dass bei parallel zur Einfallsebene polarisirtem Licht für die Dicke d der Luftschicht sich stets derselbe Werth ergiebt, welchen Werth auch der Einfallswinkel haben möge; die kleinen Verschiedenheiten liegen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler. Dagegen zeigt die zweite Tabelle, dass die Zahlen d' zwischen 52^0 und 60^0 die erheblichsten Unterschiede aufweisen. Wir müssen hieraus schliessen, dass nur die Reflexion des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes unter Phasenänderung stattfindet, die des parallelen dagegen nicht.

Dasselbe Resultat ergab sich bei einer Luftschicht zwischen Glas- und Flussspathplatte. Wurde das Ocularnicol in solche Lage gebracht, dass senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht beobachtet wurde, so rückten bei Einfallswinkeln zwischen 54^0 und 57^0 die Interferenzstreifen nach dem violetten Ende des Spectrums, anstatt wie beim Glase nach dem rothen, ein Beweis, dass die Flussspathplatte negative Reflexion hatte.

Dieselben Resultate ergaben sich bei den übrigen Substanzen, so dass Wernicke die folgenden allgemeinen Sätze aussprechen konnte:

1. Isotrope Körper von geringem Absorptionsvermögen reflectiren das parallel zur Einfallsebene polarisirte Licht unter allen Einfallswinkeln

ohne merkliche Aenderung der Phase, die Reflexion mag eine äussere oder innere sein.

2. Die Phase des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes wird allein geändert.

547. Cauchy's Theorie.

Cauchy[1]) hat den Versuch einer Theorie der beschriebenen Erscheinungen gemacht, indem er von denselben Gesichtspunkten ausging, wie bei der Metallreflexion. Es treten zwei neue Coefficienten auf, deren Differenz ε in die Gleichungen eingeht. ε heisst nach Jamin der Ellipticitätscoefficient, da von demselben das Verhältniss der Achsen der Vibrationsellipse abhängt.

Ist R die Intensität der parallel zur Einfallsebene polarisirten Composante des reflectirten Strahles, R' die Intensität der normal zur Einfallsebene polarisirten Composante, und bildet die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes mit der Einfallsebene einen Winkel von 45 Graden, so ergiebt sich in der Theorie Cauchy's

$$\frac{R'}{R} = \frac{\cos^2(i+r) + \varepsilon \sin^2(i+r) \sin^2 i}{\cos^2(i-r) + \varepsilon \sin^2(i-r) \sin^2 i}.$$

Diese Formel unterscheidet sich wenig von der Fresnel'schen.

Die Phasendifferenz der beiden Composanten ist in Cauchy's Theorie gegeben durch

$$\operatorname{tang} 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{\varepsilon \sin i\,[\operatorname{tang}(i+r) + \operatorname{tang}(i-r)]}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i \operatorname{tang}^2(i+r) \operatorname{tang}^2(i-r)}.$$

Man sieht, dass die Phasendifferenz Δ das Zeichen wechselt, wenn $i + r = 90^0$, d. i. unter dem Polarisationswinkel. Man sieht auch, dass das Zeichen von Δ mit jenem von ε wechselt.

Die von Jamin gefundenen Zahlen stimmen mit Cauchy's Formeln überein. Allein es ist zu bemerken, dass diese Uebereinstimmung nicht viel zu sagen hat: bei der sich auf die Intensität beziehenden Formel wegen der Kleinheit der Correctionsglieder, und bei der sich auf die Phasendifferenz beziehenden Formel wegen der engen Grenzen, innerhalb deren die Erscheinungen der elliptischen Polarisation bei den durchsichtigen Körpern auftreten.

Ueberdies stimmen Jamin's Messungen in Bezug auf die Reflexion an der Grenze von Glas und Wasser mit Cauchy's Formeln nicht überein.

Ableitungen der obigen Formeln Cauchy's wurden gegeben von

---

[1]) *C. R.* XXX, 465; XXXI, 60, 255, 766. — *Mém. de l'Acad. des sc.* XXII, 29.

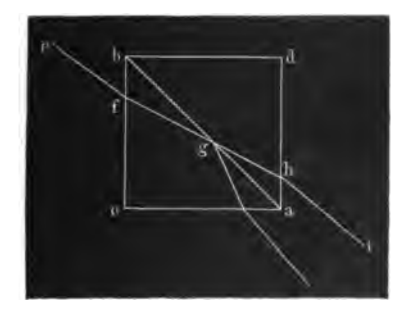
Beer[1]), Ettingshausen[2]), Eisenlohr[3]) und v. Lang[4]). Man erhält dieselben aus der Annahme, dass die in der Einfallsebene schwingende Composante des einfallenden Lichtes im reflectirten und im gebrochenen Strahle auch longitudinale Schwingungen erregt, welche bei ihrer Fortpflanzung an Intensität äusserst rasch abnehmen und schon in unmessbarer Entfernung von der Trennungsfläche verschwinden. Immerhin sind die Grundvorstellungen, auf welchen die Rechnung beruht, nicht vollständig exact, da sich die Brechung und Reflexion nicht in einer Ebene, sondern in einer Schichte von messbarer Dicke vollziehen (529); doch ist ein Versuch, auch den allmäligen Uebergang der Aetherdichten von einem Medium zum anderen in Rechnung zu ziehen, nicht gelungen [5]).

548. Jamin's Experimente über Totalreflexion.

Für die Totalreflexion unterscheiden sich die Formeln Cauchy's nur durch ein sehr kleines Glied, welches der Beobachtung entgehen kann, von den Formeln Fresnel's.

Zum genaueren experimentellen Studium der durch Totalreflexion hervorgebrachten elliptischen Polarisation eignet sich der Babinet'sche Compensator [6]). Benutzt man jedoch zur Hervorbringung der Totalreflexion ein gewöhnliches Glasprisma, so gelangt man zu unzulässigen Resultaten in Folge der Veränderungen, welche das Glas durch das Poliren erfährt. Die Dichte der obersten Schichten des Glases wird nämlich in verschiedenen Richtungen verschieden verändert, und das Glas bringt Phasendifferenzen hervor, welche mit keiner Theorie stimmen.

Fig. 89.



Jamin [7]) hat diese Fehlerquelle durch den folgenden Kunstgriff beseitigt. Ein langes Glasprisma von gleichschenkelig rechtwinkeliger Basis wurde parallel den Grundflächen in zwei gleiche Prismen zerschnitten. An einem derselben, *abc*, Fig. 89, wurden die Messungen angestellt. Hierauf wurde das zweite Prisma *abd* mittelst Canadabalsam an das erste geklebt, so dass ein Prisma mit quadratischer Basis entstand. Der Strahl *efg* wurde nun nicht mehr bei *g* total reflectirt, sondern nahm den Weg *ghi*. Es wurden nun die Phasendifferenzen der

[1]) Pogg. Ann. XCI u. XCII. — [2]) Wiener Akademieber. 1855. — [3]) Pogg. Ann. CIV. — [4]) Einleitung in die theoretische Physik, S. 264. — [5]) Lorenz, Pogg. Ann. CXI und Christoffel, Berl. Ber. über d. Fortschr. d. Phys. 1860. — [6]) Ueber diesen Apparat siehe Jamin, Pogg. Ann., Erg.-Bd. III. — [7]) *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXX, 257.

Composanten des durch das Doppelprisma unter verschiedenen Incidenzen tretenden Strahles studirt. Es ist klar, dass bei der totalen Reflexion in einem der Prismen die in Folge des Mangels der Homogenität des Glases hervorgebrachten Phasendifferenzen dieselben sind wie die beim Durchgange des Strahles durch das Doppelprisma hervorgebrachten. Um daher die durch die Totalreflexion eingeführten Phasendifferenzen zu bestimmen, hat man die durch die zweite Versuchsreihe erhaltenen Phasendifferenzen von den durch die erste Versuchsreihe erhaltenen abzuziehen. Gebraucht man diese Vorsicht, so gelangt man zu Resultaten, welche sehr gut mit den Fresnel'schen Formeln (468) übereinstimmen.

Weitere experimentelle Studien in dieser Richtung, namentlich für die Nähe der Berührungsstelle des Farbenglases, hat Quincke[1]) veröffentlicht.

Bibliographie.

1. Polarisation durch Reflexion und Brechung an isotropen Körpern. — Reflexion und Brechung des polarisirten Lichtes an diesen Körpern. — Experimentelle Gesetze und Fresnel's Theorie.

1808. **Malus**, Sur une propriété de la lumière réfléchie par les corps diaphanes, *Bulletin de la Société Philomathique*, I, No. 16. — *Mémoires d'Arcueil*, II, 113.

1809. **Malus**, Sur les phénomènes qui dépendent des forces des molécules de la lumière, *Bulletin de la Société Philomathique*, I, No. 20 et No. 21.

1809. **Malus**, Sur une propriété des forces répulsives qui agissent sur la lumière, *Mémoires d'Arcueil*, II, 254.

1810. **Malus**, Mémoire sur les phénomènes qui accompagnent la réflexion et la réfraction, de la lumière, *Mém. de l'Acad. des sc.*, XI, 112. — *Bulletin de la Société Philomathique*, II, No. 47.

1810. **Malus**, Mémoire sur divers phénomènes d'optique, *Mém. de l'Acad. des sc.*, XI, 105.

1811. **Malus**, Mémoire sur la lumière, *Bulletin de la Société Philomathique*, II, No. 42.

1813. **Brewster**, *A Treatise on New Philosophical Instruments*, Edinburgh.

1813. **Tobie Meyer**, De polaritate luminis, *Commentaires de Goettingue* pour 1813, p. 1.

---

[1]) Pogg. Ann. CXXVII.

1814. Biot, Propriétés polarisantes de la tourmaline, *Bulletin de la Société Philomathique*, 1815, p. 26. — *Ann. de chim. et de phys.*, (1), XCII, 191.

1814. Biot, Sur un mode particulier de polarisation qui s'observe dans la tourmaline, *Ann. de chim. et de phys.*, (1), XCIV, 191.

1814. Brewster, On the Polarization of Light by Oblique Transmission trough all Bodies Crystallized or Uncrystallized, *Phil. Trans.*, 1814, p. 219.

1814. Arago, Sur l'emploi des piles de glaces pur l'étude des lois de la polarisation, *OEuvres complètes*, X, 529.

1815. Brewster, On the Laws which Regulate the Polarization of Light by Reflection from Transparent Bodies, *Phil. Trans.*, 1815, p. 125. (Brewster's Gesetz.)

1815. Arago, Sur le rapport qui existe entre la lumière qui se polarise par réflexion et celle qui au même instant subit la polarisation contraire, *OEuvres complètes*, X, 468.

1816. Biot, Appareil à glaces, *Traité de physique*, IV, 355.

1817. Young, Article *Chromatics* dans *l'Encyclopédie britannique*.

1817. Fresnel, Mémoire sur les modifications que la réflexion imprime à la lumière polarisée, *OEuvres complètes*, I, 441.

1817. Brewster, Description of a New Darkening Glass for Solar Observations which as also the Property of Polarising the Whole of Transmitted Light, *Edinb. Trans.*, VIII, 25.

1819. Fresnel, Mémoire sur la réflexion de la lumière, *Mém. de l'Acad. des sc.*, XX, 195.

1821. Fresnel, Considérations mécaniques sur la polarisation de la lumière, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XVII, 190, 312. — *OEuvres complètes*, I, 640.

1823. Fresnel, Mémoire sur les lois des modifications que la réflexion imprime à la lumière polarisée, *Mém. de l'Acad. des sc.*, XI, 393. — *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XLVI, 225. — *OEuvres complètes*, I, 767.

1823. Poisson, Sur le mouvement de deux fluides élastiques superposés, *Mém. de l'Acad. des sc.*, X, 317.

1824. Arago, Note sur la polarisation de la lumière, *OEuvres complètes*, VII, 291.

1826. Mark, Ueber eine neue optische Eigenschaft des Dichroits, *Pogg. Ann.*, VIII, 248. — *Schweigger's Journ.*, XLVII, 368.

1830. Brewster, On the Laws of Partial Polarization of Light by Reflection, *Phil. Trans.*, 1830, p. 69.

1830. Brewster, On the Laws of Polarization of Light by Refraction, *Phil. Trans.*, 1830, p. 133.

1830. Brewster, On the Action of the Second Surface of Transparent Plates upon Light, *Phil. Trans.*, 1830, p. 145.

1830. Aug. Seebeck, Ueber den Zusammenhang zwischen Brechungsvermögen und Polarisationswinkel an Körpern von einfacher Strahlenbrechung, *Pogg. Ann.*, XX, 27.

1831. Potter, An Account of Experiments to Determine the Reflective Power of Crown Plate and Flint Glass at Different Angles of Incidence and an Investigation towards Determining the Laws by which the Reflective Power Varies in Transparent Bodies Possessing the Property of Single Refraction, *Edinb. Journ. of Sc.* (2), IV, 53.

1833. Arago, Mémoire sur les moyens de résoudre la plupart des questions de photométrie que la découverte de la polarisation fait naître, *OEuvres complètes*, X, 150. — *Inst.* I, 106.

1834. Potter, On the Power of Glass of Antimony to Reflect Light, *Phil. Mag.*, (3), IV, 6.

1835. Neumann, Theoretische Untersuchung der Gesetze, nach welchen das Licht an der Grenze zweier vollkommener durchsichtigen Medien reflectirt und gebrochen wird, *Abhandl. Berl. Akad.*, 1835.

1836. Arago, Sur la visibilité des écueils, *OEuvres complètes*, IX, 77. — *Annuaire du bureau des longitudes pour* 1836.

1838. Forbes, Researches on Heat, *Edinb. Trans.*, XIII, XIV. — *Phil. Mag.*, (3), VIII, 246. — *Inst.*, VI, 177, 376, 399.

1839. Babinet, Sur la perte d'un demi-Intervalle d'interférence qui a lieu dans la réflexion à la seconde surface d'un milieu réfringent, *C. R.*, VIII, 708. — *Inst.*, VII, 159.

1839. Cauchy, Sur la polarisation des rayons réfléchis ou réfractés par la surface de séparation de deux corps isophanes et transparents, *C. R.*, IX, 676.

1839. Forbes, On the Intensity of Reflexion of Heat and of Light, *Edinb. Trans.*, XIV. — *Inst.*, VIII, 120.

1839. Green, On the Laws of Reflection and Refraction of Light at the Common Surface of two not Crystallized Media, *Cambr. Trans.*, VII, part. I, p. 1.

1841. Arago, Sur un nouveau polarimètre, *C. R.*, XIII, 84, 967.

1845. Arago, Sur un nouveau photomètre, *C. R.*, XXI, 348.

1847. Knoblauch, Ueber die Polarisation der strahlenden Wärme durch Reflexion, durch einfache Brechung und Doppelbrechung, *Pogg. Ann.*, LXXIV, 161, 170, 177.

1849. De la Provostaye et P. Desains, Mémoire sur la réflexion de la chaleur, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXX, 272. — *C. R.*, XXXI, 512. — *Inst.*, XVIII, 512.

1850. Arago, Premier mémoire sur la photométrie: Démonstration expérimentale de la loi du carré du cosinus, *OEuvres complètes*, X, 168. — *C. R.*, XXX, 309. — *Inst.*, XVIII, 305.

1850. Arago, Deuxième mémoire sur la photométrie: Construction de la table des quantités de lumière réfléchie et des quantités de lumière transmise par une lame de verre à faces parallèles, *OEuvres complètes*, X, 185. — *C. R.*, XXX, 365. *Inst.*, XVIII, 105.

1850. Arago, Troisième mémoire sur la photométrie: Évaluation des quantités de lumière réfléchie et de lumière transmise par une lame de verre sous les plus grands angles, *OEuvres complètes*, X, 217. — *C. R.*, XXX, 425. — *Inst.*, XVIII, 132.

1850. Arago, Quatrième mémoire sur la photométrie: Constitution physique du soleil, *C. R.*, XXX, 449. — *OEuvres complètes*, X, 231. — *Inst.*, XVIII, 137.

1850. Arago, Cinquième mémoire sur la photométrie: Intensité de la lumière atmosphérique dans le voisinage du soleil, *OEuvres complètes*, X, 251. — *C. R.*, XXX, 617. — *Inst.*, XVIII, 161.

1850. Arago, Sixième mémoire sur la photométrie: Application de la photométrie à la solution de différentes questions d'astronomie et de météorologie, *OEuvres complètes*, X, 270. — *C. R.*, XXXI, 665. — *Inst.*, XVIII, 361.

1850. Arago, Septième mémoire sur la photométrie: Graduation du polarimètre, *OEuvres complètes*, X, 270. — *C. R.*, XXXI, 665. — *Inst.*, XVIII, 361.

1850. Arago, Sur les intensités comparatives de diverses sources lumineuses, *OEuvres complètes*, X, 494.

1850. Ed. Desains, Mémoire sur la polarisation de la lumière réfléchie par le verre, *C. R.*, XXXI, 676. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXI, 286.

1851. De la Provostaye et P. Desains, Mémoire sur la polarimétrie de la chaleur, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXII, 112. — *C. R.*, XXXII, 86. — *Inst.*, XIX, 26.

1853. Herapath, On the Optical Properties of a Newly Discovered Salt of Quinine, *Phil. Mag.*, (4), III, 161.

1853. Arago, Méthode pour comparer entre elles des sources de lumière différemment colorées, *Cosmos*, II, 555.

1856. B. Powell, On the Démonstration of Fresnel's Formulas for Reflected and Refracted Light and their Applications, *Phil. Mag.*, (4), I, 104, 266. — 26th *Rep. of Brit. Assoc.*, part 2, p. 15.

1860. Lorenz, Ueber die Reflexion des Lichts an der Gränzfläche zweier isotroper durchsichtiger Mittel, *Pogg. Ann.*, CXI, 460.

1860. Zech, Brechung und Zurückwerfung des Lichtes unter der Voraussetzung, dass das Licht in der Polarisationsebene schwinge, *Pogg. Ann.*, CIX, 60.

1861. Pfaff, Ueber die Gesetze der Polarisation durch einfache Brechung, *Pogg. Ann.*, CXIV, 173.

1862. Boher, Zur Polarisation des Lichtes durch einfallende Brechung, *Pogg. Ann.*, CXVII, 117.

1862. Stokes, On the Intensity of Light Reflected from or Transmitted, trough a Pile of Glaces, *Proceed. of R. S.*, XI, 545. — *Phil. Mag.*, (4), XXIV, 480.

1863. Wild, Photometrische Untersuchungen, *Pogg. Ann.*, CXVIII, 193. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXIX, 238.

1863. Cornu, Théorème sur la relation entre la position du plan de polarisation des rayons incident, réfléchi et réfracté dans les milieux isotropes, *C. R.*, LVI, 87. — *Inst.*, XXXI, 19.

1867. Dove, Ueber Polarisation des Lichtes durch wiederholte Spiegelung, *Berl. Monatsber.*

1867. Brewster, Additional observations on the polarization of the atmosphere made at St. Andrews in 1841, 1842, 1843, 1844 and 1845, *Phil. Mag.*, (4), XXXIII.

1867. P. E. Chase, On Brewster's neutral point, *Phil. Mag.*, (4), XXXIV.

1868. Tyndall, Sur la couleur du ciel, la polarisation de l'atmosphère et la polarisation de la lumière par les substances nuageuses en général, *Ann. d. Chim.*, (4), XVI.

1869. Tyndall, On the blue colours of the sky, the polarization of skylight and on the polarization of light by cloudy matter generally, *Phil. Mag.* (4), XXXVII.

1869. Haidinger, On the polarization of light by air mixed with aqueous rapour, *Phil. Mag.*, (4), XXXVIII.

1869. Soret, Sur la polarisation de la lumière bleue de l'eau, *Ann. de chim.*, (4), XVII.

1869. Soret, Sur l'illumination des corps transparents, *C. R.*, LXIX.

1869. Lallemand, Recherches sur l'illumination des liquides par un faisceau de lumière neutre ou polarisée, *C. R.*, LXIX.

1869. Lallemand, Étude des phénomènes qui accompagnent l'illumination d'un liquide non fluorescent, *C. R.*, LXIX.

1869. Lallemand, Sur l'illumination des corps transparents par la lumière, *C. R.*, LXIX.

1869. Lallemand, Observations sur la communication de Mr. Soret relative à l'illumination des corps transparents, *C. R.*, LXIX.

1870. Soret. Beleuchtung durchsichtiger Körper, *Ann. de chim.*, (4), XX.

1870. E. Hagenbach. Polarisation und blaue Farbe des Wassers und der Luft, *Ann. de chim.*, (4), XX.

1870. Soret, Bemerkungen hierzu, *ibid.*
1870. A. Lallemand, Beleuchtung durchsichtiger Körper, *Ann. de chim.*, (4), XXII.
1870. Tyndall, Farbe des Wassers, *Dingl. Journ.*, CXCIX.
1870. A. Hayes, Ueber die blaue Farbe des Genfer Sees, *Inst.*
1871. J. W. Strutt, Reflexion des Lichtes an durchsichtigen Materien, *Phil. Mag.*, (4), XLII (historisch).
1871. J. W. Strutt, Ueber die Zerstreuung des Lichtes durch kleine Theilchen, *Phil. Mag.*, (4), XLI.
1871. G. Quincke, Optische Experimentaluntersuchungen, *Pogg. Ann.*, CXLII.
1871. G. Adams, Methode, den Grad der Polarisation an einer Schicht paralleler Platten zu bestimmen, *Phil. Mag.*, (4), XLI.
1871. J. W. Strutt, Ueber das Licht des Himmels, seine Polarisation und Farbe, *Phil. Mag.*, (4), XLI.
1872. K. v. d. Mühll, Ueber die Reflexion und Brechung an der Grenze undurchsichtiger Medien, *Clebsch's Ann.*, V.
1872. Lallemand, Ueber die Polarisation und Fluorescenz der Atmosphäre, *C. R.*, LXXV.
1872. Collas, Ursache der blauen Farbe des Himmels, *Mondes*, (2), XXIX.
1873. E. Hagenbach, Ueber die Polarisation und Farbe des von der Atmosphäre reflectirten Lichtes, *Pogg. Ann.*, CXLVIII.
1874. Glan, Ueber die Intensität des vom Glase reflectirten Lichtes, *Berl. Monatsber.*
1875. Wernicke, Ueber die absoluten Phasenänderungen bei der Reflexion des Lichtes und über die Theorie der Reflexion, *Berl. Monatsber.*
1875. P. Glan, Ueber die Phasenveränderung des Lichtes bei der Reflexion an Glas, *Pogg. Ann.*, CLV.
1875. Bosanquet, Ueber die Polarisation des Himmelslichtes, *Phil. Mag.* (4), L.
1876. A. Lallemand, Ueber die Erleuchtung durchsichtiger Körper, *Ann. de chim.*, (5), VIII.
1880. M. Réthy, Theorie der Reflexion und Brechung an der Grenze von homogenen, isotropen, durchsichtigen Körpern mit Verallgemeinerung der Grundlagen der Neumann'schen Methode, *Wied. Ann.*, XI.
1881. Th. Erhard, Zur Kenntniss der Glasplattensäule, *Wied. Ann.*, XII.
1881. R. T. Glazebrook, Ueber Reflexion und Brechung des Lichtes, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, III.
1883. G. A. Maggi, Ueber den Uebergang von Schwingungsbewegungen, insbesondere von Lichtschwingungen aus einem isotropen Mittel in ein anderes, *Rend. del R. Ist. Lomb.*, (2), XVI.
1883. W. Spring, Die Farbe des Wassers, *Bull. Ac. Belg.*, (3), V.
1883. W. Voigt, Theorie des Lichtes für vollkommen durchsichtige Medien, *Wied. Ann.*, XIX.
1884. W. Voigt, Ueber die Verzögerung, welche beim Durchgange des Lichtes durch eine Platte eintritt, und über einige darauf gegründete Apparate, *Wied. Ann.*, XXII.
1885. W. Wernicke, Ueber die Phasenänderung bei der Reflexion und über die Schwingungsebene des polarisirten Lichtes, *Wied. Ann.*, XXV.

2. Totalreflexion.

1818. Fresnel, Mémoire sur les modifications imprimées à la lumière polarisée par sa réflexion totale dans l'intérieur des corps transparents, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXIX.

1832. **Cauchy**, Mémoire sur la théorie de la lumière, *Mém. de l'Acad. des sc.*, X, 293.
1832. **Potter**, On Experiments to Determin the Reflection of the Surface of Flint Glass at Incidences at which no Portion of the Rays passes trough the Surface, *Phil. Mag.*, (3), I, 56.
1836. **Cauchy**, Note sur l'explication de divers phénomènes de la lumière dans le système des ondes, *C. R.*, II, 364.
1837. **Neumann**, Bemerkungen zu Cauchy's Vervielfältigung des Lichtes in der totalen Reflexion, *Pogg. Ann.*, XL.
1839. **Cauchy**, Sur la réflexion des rayons lumineux produite sur la seconde surface d'un corps isophane et transparent, *C. R.*, IX.
1843. **Mac Cullagh**, On total Reflection, 13. *Rep. of Brit. Assoc.* — *Inst.*, XII.
1844. **Mac Cullagh**, On total Reflection, *Proceed. of Ir. Acad.*, II, 96, 173, 275; III, 49.
1850. **Jamin**, Mémoire sur la réflexion totale, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXX, 257.
1850. **Arago**, Sur la prétendue perte de lumière dans l'acte de la réflexion totale, *OEuvres complètes*, X, 226.
1854. **Beer**, Ueber die Herleitung der Formel für die Totalreflexion nach Fresnel und Cauchy, *Pogg. Ann.*, XCI.
1866. **Quincke**, Ueber die elliptische Polarisation des bei totaler Reflexion eingedrungenen oder zurückgeworfenen Lichtes, *Pogg. Ann.*, CXXVII.
1866. **Quincke**, Ueber das Eindringen des total reflectirten Lichtes in das dünnere Medium, *Pogg. Ann.*, CXXVII.
1866. **Briot**, Sur la réflexion et la réfraction de la lumière, *C. R.*, LXIII.
1880. **E. Ketteler**, Zur Vervollständigung der Reflexionstheorie, *Carl Rep.*, XVI.
1885. **Joh. Danker**, Experimentelle Prüfung der aus den Fresnel'schen Gesetzen der Doppelbrechung abgeleiteten Gesetze der Totalreflexion, *Neues Jahrb. f. Mineral.*, IV (auch historisch).

3. Haidinger's Büschel.

1844. **Haidinger**, Ueber das directe Erkennen des polarisirten Lichtes und der Lage der Polarisationsebene, *Pogg. Ann.*, LXIII.
1846. **Haidinger**, Beobachtung der Lichtpolarisationsbüschel in geradlinig polarisirtem Lichte, *Pogg. Ann.*, LXVIII, 173.
1846. **Haidinger**, Beobachtung der Lichtpolarisationsbüschel, *Pogg. Ann.*, LXVIII, 305.
1846. Ueber complementäre Farbeneindrücke bei Beobachtung der Lichtpolarisationsbüschel, *Pogg. Ann.*, LXVIII, 435.
1846. **Botzenhart**, Polarisationsbüschel am Quarz, *Berichte der Freunde der Naturwissenschaften in Wien*, I, 82.
1846. **Silbermann**, Sur l'explication des houppes ou aigrettes visibles à l'oeil un dans la lumière polarisée, *C. R.*, XXIII, 629; XXV, 114.
1847. **Botzenhart**, Sur une modification des houppes colorées de Haidinger, *C. R.*, XXIV, 114. — *Inst.*, XV, 11.
1848. **Jamin**, Note sur les houppes colorées de Haidinger, *C. R.*, XXVI, 197. — *Inst.*, XVI, 53.
1850. **Brewster**, On the Polarizing Structur of the Eye, 20*th* *Rep. of Brit. Assoc.*, p. 5.
1850. **Stokes**, On Haidinger's Brushes, 20*th* *Rep. of Brit. Assoc.*, 20.
1851. **Haidinger**, Das Interferenzschachbrett und die Farben der Polarisationsbüschel, *Wien. Ber.*, VII, 389.

1854. **Haidinger**, Dauer des Eindrucks der Polarisationsbüschel auf der Netzhaut, *Wien. Ber.*, XII, 378. — *Pogg. Ann.*, XCIII, 318.
1854. **Haidinger**, Beitrag zur Erklärung der Farben der Polarisationsbüschel durch Beugung, *Wien. Ber.*, XII, 3. — *Pogg. Ann.*, XCI, 591.
1854. **Haidinger**, Einige neuere Ansichten über die Natur der Polarisationsbüschel, *Wien. Ber.*, XII, 758. — *Pogg. Ann.*, XCVI, 314.
1858. **Potter**, On the Theory of the Polarized Fasciculi communly known as Haidinger's Brushes, *Phil. Mag.*, (4), XVI, 69.
1859. **Brewster**, Sur les houppes colorées ou secteurs de Haidinger, *C. R.*, XLVIII, 614. — *Phil. Mag.*, (4), XVII, 323.
1866. **Von Lang**, Ueber die **Haidinger**'schen Farbenbüschel, *Pogg. Ann.*, CXXIII, 140.
1866. **Moigno**, Sur une propriété singulière de la lumière polarisée, *C. R.*, LXII, 161.
1867. **Helmholtz**, *Handbuch der physiologischen Optik*, S. 421.

4. Polarisation durch Ausstrahlung und Zerstreuung.

1852. **De La Provostaye** und **P. Desains**, Polarisation de la lumière par diffusion sur les corps mats, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXIV.
1852. **De La Provostaye** und **P. Desains**, Mémoire sur la diffusion de la chaleur, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXIII.
1853. **Arago**, Polarisation par émission, *OEuvres complètes*, VII, 403.
1853. **Angström**, Polarisation par diffusion sur les surfaces mates, *Pogg. Ann.*, XC.
1860. **Gove**, De la polarisation de la lumière par diffusion sur une substance gazeuse, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LX.
1863. **Brewster**, On the polarization of Light by Rough and White Surfaces, *Phil. Mag.*, (4), XXV.
1864. **Kundt**, Ueber Depolarisation, *Pogg. Ann.*, CXXIII. (Depolarisation durch diffuse Reflexion.)
1864. **P. Desains**, Sur l'émission de rayons lumineux à la chaleur rouge, *C. R.*, LXI. (Polarisation durch Emission.)
1874. **Soret**, Ueber einige Polarisationsphänomene durch Diffusion des Lichtes, *Arch. sc. phys.*, (2), XLVIII. — *C. R.*, LXXVIII.
1874. **Lallemand**, Erleuchtung undurchsichtiger Körper durch neutrales oder polarisirtes Licht, *C. R.*, LXXVIII — LXXIX.
1884. **Gouy**, Ueber die Diffusion des Lichtes durch matt geschliffene Glas- und Metalloberflächen, *C. R.*, XCVIII.
1885. **K. Angström**, Diffusion der strahlenden Wärme von ebenen Flächen, *Wied. Ann.*, XXVI.
Siehe auch den Abschnitt 1.

5. Vollständige Theorie der Farbenringe.

1811. **Arago**, Mémoire sur les couleurs de lames minces, *OEuvres complètes*, X, 1.
1811. **Arago**, Sur les variations singulières que présentent les anneaux colorés fournis par les vernis, *OEuvres complètes*, X, 341.
1811. **Arago**, Observation des anneaux colorés produits par le contact d'une lentille et d'un plan de verre épais, *OEuvres complètes*, X, 351.
1811. **Arago**, Couleurs irisées de divers corps, *OEuvres complètes*, X, 358.

1814. Arago, Mémoire sur les couleurs des lames minces, *OEuvres complètes*, X, 23.
1831. Airy, Theory of the Colours of thin Plates, *Pogg. Ann.*, XLI.
1832. Airy, On the Phaenomena of Newton's Rings where Formed between two Transparent Substances of Different Refractive Powers, *Phil. Mag.*, (3), II.
1841. Lloyd, Researches on the Phaenomena exhibited by thin Plates with Polarized Light, *Inst.*, IX.
1841. Brewster, On the Phaenomena of thin Plates of Solid and Fluid Substances Exposed to Polarized Light, *Phil. Trans.*
1843. Lloyd, On the Appearances in thin Plates with Polarized Light, *Pogg. Ann*, LX.
1848. Brücke, Ueber die Aufeinanderfolge der Farben in den Newton'schen Ringen, *Pogg. Ann.*, LXXI.
1849. Cauchy, Sur les rayons réflechis et réfractés par les lames minces et sur les anneaux colorés, *C. R.*, XXVIII.
1849. Stokes, On the Formation of the Central Spot of Newton's Rings begond the Critical Angle, *Phil. Mag.* (3), XXIV.
1850. Stokes, On the Mode of Appearance of Newton's Rings in Passing the Angle of total Internale Reflection, *Inst.*, XVIII.
1850. Wilde, Ueber die Unhaltbarkeit der bisherigen Theorie der Newton'schen Farbenringe, *Pogg. Ann.*, LXXX.
1850. Wilde, Beschreibung des Gyreïdometers, eines Instruments zur genauen Messung der Farbenringe, *Pogg. Ann.*, LXXXI.
1851. Wilde, Die Theorie der Farben dünner Blättchen, *Pogg. Ann.*, LXXXII.
1852. Jamin, Mémoire sur les anneaux colorés, *Ann de chim. et de phys.*, (3), XXXVI.
1859. Lloyd, On the Affections of Polarized Light Reflected and Transmitted by thin Plates, 29th *Rep. of Brit. Assoc.*, (2), 14.
1871. Mascart, Theorie einiger Interferenzphänomene, *Ann. de chim.*, (4), XXIII.
1875. P. Glan, Ueber die Phasenänderung des Lichtes bei der Reflexion an Glas, *Pogg. Ann.*, CLV.
Siehe auch den Abschnitt 8.

6. Polarisation durch Beugung. — Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes.

1849. Stokes, On the Dynamical Theory of Diffraction, *Cambr. Trans.*, IX, section IV, 1. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LV, 491. — *Inst.*, XX, 59. — *Phil. Mag.*, (4), XIII, 159; XVIII, 426.
1849. Babinet, Sur le sens des vibrations dans la lumière polarisée, *C. R.*, XXIX, 514. — *Inst.*, XVII, 361.
1849. Cauchy, Démonstration simple de cette proposition que, dans un rayon de lumière polarisée rectilignement, les vibrations des molécules sont perpendiculaires au plan de polarisation, *C. R.*, XXIX, 645.
1850. Brewster, Sur quelques phénomènes qui ont rapport à la diffraction opérée par les surfaces rayées, *C. R.*, XXX, 496. — *Inst.*, XVIII, 137. (Polarisation durch Gitter.)
1851. Rankine, On the Vibrations of Plane Polarized Light, *Phil. Mag.*, (4), I, 441.
1852. Haidinger, Ueber die Richtung der Schwingungen geradlinig polarisirten Lichts, *Wien. Ber.*, VII, 12. — *Pogg. Ann.*, LXXXVI, 131. — *Inst.*, XX, 195.

1854. Haidinger und Stokes, Die Richtung der Schwingungen des Lichtäthers im polarisirten Lichte, *Wien. Ber.*, XII, 685. — *Pogg. Ann.*, XCVI, 287.

1856. Holtzmann, Das polarisirte Licht schwingt in der Polarisationsebene, *Pogg. Ann.*, XCIX, 446. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LV, 511.

1857. Draper, On the Diffraction Spectrum, *Phil. Mag.*, (4), XIII, 153.

1857. Stokes, On the Polarization of Diffracted Light, *Phil. Mag.*, XIII, 159.

1858. Eisenlohr, Ueber das Verhältniss der Schwingungsrichtung des Lichts zur Polarisationsebene und die Bestimmung dieses Verhältnisses durch die Beugung, *Pogg. Ann.*, CIV, 337. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LV, 504.

1858. Eisenlohr, Ableitung der Formeln des an der Oberfläche zweier isotropen Mittel gespiegelten, gebrochenen und gebeugten Lichts, *Pogg. Ann.*, CIV, 346.

1859. Stokes, On the Bearing of the Phaenomena of Diffraction on the Direction of the Vibrations of Polarized Light, *Phil. Mag.*, (4), XVIII, 426.

1859. Challis, On the Direction of the Vibration of a Polarized Ray, *Phil. Mag.*, (4), XVII, 102.

1860. Lorenz, Ueber die Bestimmung der Schwingungsrichtung des Lichtes durch die Polarisation des gebeugten Lichtes, *Pogg. Ann.*, CXI, 315. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXI, 227.

1864. Fizeau, Recherches sur plusieurs phénomènes relatifs à la polarisation de la lumière, *C. R.*, LII, 267, 1221. — *Ann. de chm. et de phys.*, (3), LXIII, 385. — *Inst.*, XXI, 73, 278. (Polarisation des Lichtes bei Reflexion an einem Gitterspiegel und beim Durchgange durch eine enge Spalte.)

1861. Briot, Note sur la théorie de la lumière (die Schwingungen geschehen senkrecht zur Polarisationsebene), *C. R.*, LIII, 393.

1862. Lommel, Ueber die Beugung des polarisirten Lichts, *Grunert's Archiv*, XXXVIII, 209.

1866. Mascart, Sur la direction des vibrations dans la lumière polarisée, *C. R.*, LXIII.

1867. Gilbert, Sur l'emploi de la diffraction pour déterminer la direction des vibrations dans la lumière polarisée, *C. R.*, LXIV, 661.

1867. Ph. Gilbert, Sur l'emploi de la diffraction pour déterminer la direction des vibrations dans la lumière polarisée, *C. R.*, LXIV, XV.

1867. Potier, Recherches sur la diffraction de la lumière polarisée.

1870. L. Ditscheiner, Ueber den Gangunterschied und das Intensitätsverhältniss der bei der Reflexion an Glasgittern auftretenden parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Strahlen, *Wien. Ber.*, LX, (2).

1873. L. Ditscheiner, Ueber das Intensitätsverhältniss und den Gangunterschied der bei der Beugung auftretenden senkrecht und parallel zur Einfallsebene polarisirten Strahlen, *Wien. Ber.*, (2), LXVII.

1873. G. Quincke, Verhalten des polarisirten Lichtes bei der Beugung, *Pogg. Ann.* CIL.

1877. J. Fröhlich, Die Polarisation des gebeugten Lichtes, *Wied. Ann.*, I.

1880. M. Rethy, Ueber die Polarisation des gebeugten Lichtes, *Wied. Ann.*, XI.

1881. J. Fröhlich, Neue Modification des Lichtes durch Reflexion an engen Metallgittern, *Wied. Ann.*, XIII.

1882. W. König, Ueber die elliptische Polarisation des reflectirt gebeugten Lichtes, *Wied. Ann.*, XVII.

1883. Gouy, Ueber die Polarisation des gebeugten Lichtes, *C. R.*, XCVI.

1884. J. Fröhlich, Zur Theorie der Polarisation des gebeugten Lichtes, *Wied. Ann.*, XXII.

1884. Gouy, Ueber die Diffraction des Lichtes im Schatten eines Schirmes mit geradem Rande, *C. R.*, XCVIII.

7. Reflexion an doppeltbrechenden Körpern.

1819. Brewster, On the Action of Crystallized Surfaces upon Light, *Phil. Trans.*

1831. Aug. Seebeck, Ueber die Polarisationswinkel am Kalkspath, *Pogg. Ann.*, XXI, XXII.

1835. Neumann, Theoretische Untersuchung der Gesetze, nach welchen das Licht an der Grenze zweier vollkommen durchsichtiger Medien reflectirt und gebrochen wird. *Abhandl. Berl. Akad.*

1835. Mac Cullagh, On the Laws of Cristalline Reflection and Refraction, *Ir. Trans.*, XVIII, part. I. — *Journ. de Liouville*, (1), VII, 217. — *Phil. Mag.*, (3), VIII, 103; X, 42.

1836. Aug. Seebeck, Bemerkung über die Polarisation des Lichtes durch Spiegelung, besonders an doppeltbrechenden Körpern, *Pogg. Ann.*, XXXVIII, 276; XL, 462.

1836. Mac Cullagh, A Short Account of Some Recent Investigations concerning the Laws of Reflection and Refraction at the Surfaces of Crystals, *Phil. Mag.*, (3), VII, 295; X, 42.

1837. Neumann, *Ueber den Einfluss der Krystallflächen bei der Reflexion des Lichtes und über die Intensität des gewöhnlichen und des ungewöhnlichen Strahles*, Berlin 1837.

1837. Neumann, Photometrisches Verfahren, die Intensität der ordentlichen und ausserordentlichen Strahlen, sowie der reflectirten zu bestimmen, *Pogg. Ann.*, XL, 497.

1840. Quet, Mémoire sur la polarisation par réflexion à la surface des cristaux biréfringents, *C. R.*, X, 695. — *Inst.*, VIII, 159.

1842. Brewster, On Crystalline Reflection, 12th *Rep. of Brit. Assoc.* — *Inst.*, X, 386.

1848. Mac Cullagh, An Essay toward a Dynamical Theory of Crystalline Reflection and Refraction, *Ir. Trans.*, XXI, 17.

1850. Cauchy, Sur les rayons de lumière réfléchis et réfractés par la surface d'un corps transparent, *C. R.*, XXXI, 160.

1850. Cauchy, Mémoire sur la réflexion et la réfraction des rayons lumineux à la surface extérieure ou intérieure d'un cristal, *C. R.*, XXXI, 257.

1850. Cauchy, Détermination des trois coefficients qui, dans la réflexion et la réfraction éprouvées à la surface intérieure d'un cristal, dépendent des rayons évanescents, *C. R.*, XXXI, 297.

1850. Cauchy, Mémoire sur un nouveau phénomène de réflexion, *C. R.*, XXXI, 582.

1850. Cauchy, Note relative aux rayons réfléchis sous l'incidence principale par la surface extérieure d'un cristal à un axe optique, *C. R.*, XXXI, 666.

1850. Cauchy, Note sur la réflexion d'un rayon de lumière à la surface extérieure d'un corps transparent, *C. R.*, XXXI, 766.

1853. Grailich, Bewegung des Lichtes in optisch einachsigen Zwillingskrystallen, *Wien. Ber.*, XI, 817; XII, 230.

1855. Grailich, Ueber die Brechung und Reflexion des Lichtes an Zwillingsflächen optisch einachsiger Krystalle, *Wien. Ber.*, XV, 319; XIX, 226. — *Pogg. Ann.*, XCVIII, 205. (Brechung aus einem doppeltbrechenden Körper in einen anderen eben solchen.)

1856. De Senarmont, Sur la réflexion totale de la lumière extérieurement à la surface des corps biréfringents, *Journ. de Liouville*, (2), I, 305.

1861. Knoblauch, Ueber die Reflexion der Wärmestrahlen an krystallisirten Körpern, *Berichte der deutschen Naturforscher,* 1860, 113.

1863. Cornu, Théorèmes géométriques relatifs à la réflexion cristalline, *C. R.*, LVII, 1327.

1864. Brewster, On the Influence of Refracting Face of Calcareous Spar on the Polarization, the Intensity and the Colour of Light which is Reflected, *Proceed. of Edinb. Soc.,* V, 175. — *Inst.*, XXXIII, 294.

1865. Cornu, Théorème sur la réflexion cristalline, *C. R.*, LX, 47.

1865. Babinet, Sur un cas de polarisation non encore signalé, *C. R.*, LXI, 705.

1866. Pfaff, Ueber die Bestimmung der Brechungsexponenten doppeltbrechender Substanzen und ihrer Polarisationswinkel, *Pogg. Ann.*, CXXVII, 150.

1867. Briot, Sur la réflexion et la réfraction crystallines, *Liouville Journ.*, XII.

1868. Cornu, Recherches sur la réflexion cristalline, *Ann. de chim.*, (4), XI.

1876. G. Kirchhoff, Ueber die Reflexion und Brechung des Lichts an der Grenze krystallinischer Mittel, *Abhandl. d. Berl. Akad.*

1882. G. Basso, Reflexion des polarisirten Lichtes an der Oberfläche doppeltbrechender Körper, *Atti di Torino,* VI.

1882. G. Basso, Studien über die Krystallreflexion, *Acc. delle Sc. di Torino,* (2), XXXIV.

1883. G. Basso, Ueber einen speciellen Fall der Krystallreflexion, *Atti di Torino,* XVIII.

1884. W. Voigt, Das G. Kirchhoff'sche Princip und die Theorie der Reflexion und Brechung an der Grenze circularpolarisirender Medien, *Wied. Ann.,* XXI.

1885. W. Voigt, Theorie der Reflexion und Brechung an der Grenze durchsichtiger krystallinischer Medien, *Wied. Ann.,* XXIV.
Siehe auch den Abschnitt 10.

8. Metallreflexion.

1811. Arago, Étude des anneaux produits par le contact d'un miroir métallique et d'une leutille, *OEuvres complètes,* X, 348.

1814. Biot, Determination des lois suivant lesquelles la lumière se polarise à la surface des métaux, *Ann. de chim. et de phys.,* (1), XCIV, 209.

1817. Fresnel, Mémoire sur les modifications que la réflexion imprime à la lumière polarisée, *OEuvres complètes,* I, 447.

1830. Potter, An Account of Experiments to Determine the Quantity of Light Reflected by Plane Metallic Specula under Different Angles of Incidences. *Edinb. Journ. of Science,* (2), III, 278.

1831. Airy, On a Remarkable Modification of Newton's Rings, *Cambr. Trans.*, IV. — *Phil. Mag.,* (2), X, 141. (Ringe, hervorgebracht durch eine Glaslinse und eine Metallplatte.)

1832. Neumann, Theorie der elliptischen Polarisation des Lichtes, welche durch Reflexion an Metallen erzeugt wird, *Pogg. Ann.*, XXVI.

1832. Airy, On the Phaenomena of Newton's Rings when Performed between two Transparent Substances of Different Refractive Powers, *Cambr. Trans.,* IV, 409. (Elliptische Polarisation durch Reflexion an nicht metallischen, stark brechenden Substanzen.)

1834. Mac Cullagh, On Metallic Reflexion, *Proceed. of the Ir. Acad.*, I, (2), 159; II, 375.

1836. Cauchy, Note sur la théorie de la lumière, *C. R.,* II, 427.

1837. Mac Cullagh, On the Laws of Metallic Reflection and Refraction, *Ir. Trans.,* XVIII, part. I. — *Inst.*, V, 223.

1839. Cauchy, Sur l'intensité de la lumière réfléchie et polarisée par les surfaces métalliques, *C. R.*, VIII, 553. — *Inst.*, VII, 125, 142.

1839. Cauchy, Note sur la réflexion de la lumière à la surface des métaux, *Journ. de Liouville*, (1), VII, 338.

1840. De Senarmont, Mémoire sur la modification que la réflexion spéculaire à la surface des corps métalliques imprime à un rayon de lumière polarisée, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), LXXIII, 337.

1843. Powell, Observations of Certain Cases of Elliptic Polarization of Light by Reflection, *Phil. Trans.*, 1843, p. 35.

1843. Lloyd, On the Theory of Metallic Reflection, 13th *Rep. of Brit. Assoc.* — *Inst.*, XI, 320.

1845. Powell, On the Elliptic Polarization of Light by Reflection from Metallic Surfaces, *Phil. Trans.*, 1845, p. 269. — *Proceed. of R. S.*, V, 557. — *Inst.*, XIII, 290; XIV, 78.

1845. O'Brien, On the Laws of Reflection and Refraction at the Surfaces of Substances of High Refracting and Absorbing Powers, suchs as Metals, *Phil. Mag.*, XXVI, 287.

1845. Jamin, Mémoire sur la polarisation métallique, *C. R.*, XXI, 430; XXII, 477; XXIII, 1103.

1846. Dale, On Elliptik Polarization, 16th *Rep. of Brit. Assoc.* — *Inst.*, XIV, 368. (Elliptische Polarisation am Diamant und anderen starkbrechenden Substanzen.)

1847. De Senarmont, Mémoire sur la réflexion et la double réfraction de la lumière par les cristaux doués de l'opacité métallique, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XX, 397. — *C. R.*, XXIV, 327.

1847. Jamin, Mémoire sur la coloration des métaux, *C. R.*, XXV, 714; XXVI, 83. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXII, 311. — *Inst.*, XV, 370; XVI, 38.

1847. Jamin, Mémoire sur la réflexion métallique, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XIX, 296.

1847. De la Provostaye et P. Desains, Détermination du pouvoir réflecteur des métaux pour la chaleur, *C. R.*, XXIV, 284.

1848. Cauchy, Note sur la lumière réfléchie par la surface d'un corps opaque et spécialement d'un métal, *C. R.*, XXVI, 86.

1848. Babinet, Rapport sur le mémoire de M. Jamin intitulé: Mémoire sur la couleur des métaux, *C. R.*, XXVI, 83.

1848. Jamin, Sur la réflexion de la lumière par les substances transparentes douées d'une grande réfringence, *C. R.*, XXVI, 383. — *Inst.*, XVI, 93.

1848. Jamin, Mémoire sur la réflexion de la lumière, *C. R.*, XXVII, 147.

1849. De La Provostaye et P. Desains, Mémoire sur la réflexion des diverses espèces de chaleur par les métaux, *C. R.*, XXVIII, 501. — *Inst.*, XVII, 122.

1850. Stokes, On Metallic Reflection, 20th *Rep. of Brit. Assoc.*, p. 12. — *Inst.*, XVIII, 320.

1850. Arago, Quatrième mémoire sur la photométrie: Évaluation de la perte de lumière à la surface des métaux, *OEuvres complètes*, X, 221. — *C. R.*, XXX, 425.

1853. Stokes, On Metallic Reflection by Certain not Metallic Substances, *Phil. Mag.*, (4), VI, 393. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XLVI, 504.

1853. Rollmann, Ueber die Polarisation des Lichtes bei Brechung desselben durch Metall, *Pogg. Ann.*, XC, 188.

1854. Haughton, On Some New Laws of Reflection of Polarized Light, *Phil. Mag.*, (4), VIII, 507.

1854. Beer, Ueber die Cauchy'schen Näherungsformeln für Metallreflexion, *Pogg. Ann.*, XCI, 561.

1857. **Faraday**, On the Relations of Gold and other Metals to Light, *Phil. Trans.*, 1857, p. 147. — *Proceed. of R. S.*, VIII, 356. — *Phil. Mag.*, (4), XIV, 401, 502. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LIII, 60. (Lichtbrechung durch Metalle.)

1859. **Wilde**, Ableitung der Gesetze der Farben dünner Blättchen zwischen Luft und Metall, wenn der Brechungsindex derselben zwischen denjenigen der beiden letzteren Substanzen liegt, *Neue Denkschr. der Schweizer Gesellsch.*, XV, 29.

1863. **Quincke**, Ueber die optischen Eigenschaften der Metalle, *Berl. Monatsber.*, 1863, S. 115. — *Pogg. Ann.*, CXIX, 368. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXIX, 121.

1863. **Quincke**, Ueber die Brechungsexponenten der Metalle, *Pogg. Ann.*, CXX, 599.

1866. **Quincke**, Herstellung von Metallspiegeln, *Pogg. Ann.*, CXXIX, 14.

1867. G. **Quincke**, Ueber eine neue Art von Beugungserscheinungen und die Phasenänderung der Lichtstrahlen bei totaler und metallischer Reflexion, *Pogg. Ann.*, CXXXII.

1869. E. **Jochmann**, Ueber eine von **Quincke** beobachtete Classe von Beugungserscheinungen und über die Phasenänderung der Lichtstrahlen bei metallischer und totaler Reflexion, *Pogg. Ann.*, CXXXVI.

1870. W. **Wernicke**, Ueber die Brechungsindices und die Dispersion undurchsichtiger Körper, *Pogg. Ann.*, CXXXIX.

1871. E. **Jochmann**, Ueber die Zurückwerfung und Brechung des Lichtes durch dünne Metallschichten, *Pogg. Ann. Ergbd.* V.

1871. G. **Quincke**, Optische Experimentaluntersuchungen, *Pogg. Ann.*, CXLII.

1872. **Strutt**, Ueber Reflexion und Refraction bei undurchsichtigen Flächen, *Phil. Mag.*, XLIII.

1872. **Potier**, Ueber die Phasenänderung bei metallischer Reflexion, *C. R.*, LXXV. — Hierzu **Quincke**, *Pogg. Ann.*, CIIL. — **Potier**, *Pogg. Ann.*, CIIV. — **Quincke**, *Pogg. Ann.*, CXLIX.

1873. **Mascart**, Ueber metallische Reflexion, *C. R.*, LXXVI.

1873. E. **Wiedemann**, Ueber die elliptische Polarisation des Lichtes und ihre Beziehungen zu den Oberflächenfarben der Körper, *Pogg. Ann.*, CLI.

1873. E. **Wiedemann**, Ueber das von übermangansaurem Kali reflectirte Licht, *Pogg. Ann.*, CLI.

1873. H. **Behrens**, Ueber die Entstehung von farbigem Licht durch elective Reflexion, *Pogg. Ann.*, CL.

1874. W. **Wernicke**, Ueber die Absorption und Brechung des Lichtes in metallisch undurchsichtigen Körpern, *Pogg. Ann.*, CLV.

1874. **Quincke**, Ueber die Bestimmung des Haupteinfallswinkels und Hauptazimuthes für die verschiedenen **Fraunhofer**'schen Linien, *Pogg. Jubelbd.*

1875. **Wernicke**, Ueber die Absorption und Brechung des Lichtes in metallisch undurchsichtigen Körpern, *Pogg. Ann.*, CLV.

1875. **Wernicke**, Ueber die absoluten Phasenänderungen bei der Reflexion des Lichtes und über die Theorie der Reflexion, *Berl. Monatsber.*

1875. P. **Glan**, Ueber die Phasenänderung des parallel zur Einfallsebene polarisirten Lichtes.

1876. W. **Wernicke**, Ueber die Bestimmung der Constanten für die Absorption des Lichtes in metallischem Silber, *Pogg. Ergbd.*, VIII.

1876. **Stokes**, Eine Erscheinung metallischer Reflexion, *Mondes*, (2), XLI. (**Newton**'sche Ringe.)

1877. **Mouton**, Untersuchungen über die Metallreflexion der dunklen polarisirten Wärmestrahlen, *C. R.*, LXXXIV.

1877. H. Knoblauch, Ueber die Reflexion der Wärmestrahlen von Metallen, *Wied. Ann.*, I.
1877. F. Eisenlohr, Zur Metallreflexion, *Wied. Ann.*, I.
1878. Mouton, Ueber die Dispersionsphänomene bei der Metallreflexion der polarisirten Licht- und Wärmestrahlen, *C. R.*, LXXXVI.
1879. P. Glan, Ueber die Polarisationswinkel des Fuchsins, *Wied. Ann.*, VII.
1879. P. Glan, Ueber Phasenänderungen des Lichtes durch Reflexion, *Wied. Ann.*, VII.
1879. J. Conroy, Einige Versuche über Metallreflexion, *Proc. Roy. Soc.*, XXVIII.
1879. J. Conroy, Das von übermangansaurem Kalium reflectirte Licht, *Phil. Mag.*, (5), VI.
1880. H. Knoblauch, Ueber die elliptische Polarisation der von Metallen reflectirten Wärmestrahlen, *Wied. Ann.*, X.
1881. J. Conroy, Einige Versuche über metallische Reflexion, *Proc. Lond. Roy. Soc.* XXXI.
1883. J. Conroy, Einige Versuche über Metallreflexion. Ueber die von Metalloberflächen reflectirten Lichtmengen, *Proc. Roy. Soc.*, XXXV.
1883. J. Merkel, Experimentelle Untersuchungen über die elliptische Polarisation des Lichtes durch Reflexion von Körpern mit Oberflächenfarben, *Wied. Ann.*, XIX.
1883. H. Knoblauch, Ueber die elliptische Polarisation der von Metallen reflectirten Wärmestrahlen.
1884. W. Voigt, Theorie der absorbirenden isotropen Medien, *Wied. Ann.*, XXIII.
1884. A. Wüllner, Bemerkung zu Herrn W. Voigt's Abhandlung: Theorie der absorbirenden isotropen Medien, *Wied. Ann.*, XXIII.
1884. W. Voigt, Theorie der Dispersion und Absorption, speciell über die optischen Eigenschaften des Fuchsins, *Wied. Ann.*, XXIII.
1884. J. Conroy, Einige Versuche über Metallreflexion und über die von Metalloberflächen reflectirte Lichtmenge, *Proc. Roy. Soc.*, XXXVI, XXXVII.
1885. H. Knoblauch, Ueber zwei neue Verfahren, den Polarisationswinkel der Metalle zu finden, *Wied. Ann.*, XXIV.
1885. W. Voigt; Erwiderung auf Herrn Wüllner's Bemerkung bezüglich Herrn Jamin's Beobachtungen über Metallreflexion, *Wied. Ann.*, XXIV.
1885. W. Voigt, Eigenschaften sehr dünner Metallschichten, *Wied. Ann.*, XXV.
(Siehe auch den Abschnitt 10.)

9. Elliptische Polarisation bei Reflexion an durchsichtigen, schwach brechenden Körpern. — Färbung des Lichtes bei Reflexion an nichtmetallischen Körpern. — Schillern der Krystalle.

1829. Brewster, On the Reflection and Decomposition of Light at the Separating Surface of Media of the Same and of Different Refractive Powers, *Phil. Trans.*, 1829. (Färbung des reflectirten Lichtes.)
1831. Brücke, Ueber den Metallglanz, *Wien. Ber.*, XLIII.
1832. Airy, On the Phaenomena of Newton's Rings when Formed between two Transparent Substances of Different Refracting Powers, *Cambr. Trans.*, IV, 409. — *Phil. Mag.*, (3), II, 120.

1839. **Forbes**, Sur la polarisation de la lumière par les lames de mica chauffées, 9th *Repert. of Brit. Assoc.* — *Inst.*, VII, 366. (Elliptische Polarisation.)

1842. **Powell**, On Certain Phaenomena of Elliptically Polarized Light, 12th *Rep. of Brit. Assoc.* — *Inst.*, X, 363.

1843. **Powell**, Observations of Certain Cases of Elliptic Polarization of Light by Reflection, *Phil. Trans.*, 1843, p. 35. — *Inst.*, XI, 323.

1843. **Lloyd**, On the Elliptik Polarization of Light Reflected by Different Substances, 13th *Rep. of Brit. Assoc.* — *Inst.*, XI, 320.

1846. **Brewster**, On a New Property of Light as Exhibited by the Action of Chrysammat of Potash upon Common and Polarized Light, *Phil. Mag.*, (3), XXIX, 331. — *Inst.*, XIV, 361, 401.

1846. **Haidinger**, Farbenvertheilung im Cyanplatinmagnesium, *Pogg. Ann.*, LXVIII, 302.

1847. **Haidinger**, Ueber das metallische Schillern der Krystallflächen, *Pogg. Ann.*, LXX, 574; LXXI, 321.

1847. **Haidinger**, Orientirtes metallisches Schillern auf künstlichen Flächen, *Berichte der Freunde der Naturwissenschaften in Wien*, II, 263.

1848. **Haidinger**, Bemerkungen über den Glanz der Körper, *Sitzungsberichte der Akademie von Wien*, 1848, S. 14, 189.

1848. **Haidinger**, Ueber den. Zusammenhang des orientirten Flächenschillerns mit der Lichtabsorption farbiger Krystalle, *Pogg. Ann.*, LXXVI, 99. — *Sitzungsberichte der Akademie von Wien*, 1848, S. 146.

1849. **Haidinger**, Ueber das metallähnliche Schillern des Hypersthens, *Pogg. Ann.*, LXXXVI.

1849. **Haidinger**, Ueber die Oberflächen und Körperfarben des Andersonits, eine Verbindung von Jod und Codein, *Pogg. Ann.*, LXXX, 583.

1850. **Jamin**, Mémoire sur la réflexion à la surface des liquides, *C. R.*, XXXI, 696. — *Ann. de chim et de phys.*, (3), XXXI, 165.

1850. **Jamin**, Mémoire sur la réflexion à la surface des corps transparents, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXIX, 263.

1852. **Brewster**, Examination of Dove's Theory of Lustre, *Athenaeum*, 1852, S. 1041. — *Cosmos*, I, 577.

1852. **Haidinger**, Ueber die Verhältnisse der inneren und der oberflächlichen Farben der Körper, *Wiener Ber.*, VIII, 5. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XLII, 249.

1853. **Stokes**, Sur la réflexion métallique produite par diverses substances non métalliques, *Phil. Mag.*, (4), VI, 393. — *Ann. de chim et de phys.*, (3), XLVI, 504.

1857. **Hankel**, Ueber farbige Reflexion des Lichtes von matt geschliffenen Flächen bei und nach dem Eintritt einer spiegelnden Zurückwerfung, *Pogg. Ann.*, C., 302.

1858. **Grailich**, *Krystallographisch optische Untersuchungen*, Wien, 1858.

1858. **Schabus**, Krystallographische Untersuchungen, *Wien. Ber.*, XXIX, 441.

1859. **Haidinger**, Bemerkungen über die optischen Eigenschaften einiger chrysammensauren Salze, *Wiener Ber.*, XXXVI, 183.

1859. **Kurz**, Ueber die Reflexion des polarisirten Lichtes an der Oberfläche unkrystallisirter Körper, *Pogg. Ann.*, CVIII, 582.

1860. **Lorenz**, Ueber die Reflexion des Lichtes an der Grenze zweier isotropen durchsichtigen Medien, *Pogg. Ann.*, CXI, 46.

1860. **Carey Lea**, On the Optical Properties of the Picrat of Manganèse, *Silliman's Journ.*, (2), XXX, 402. — *Phil. Mag.*, (4), XXI, 477.

1861. **Dove**, Ueber den Glanz, *Berl. Monatsber.*, 1861, S. 522. — *Pogg. Ann.*, CXIV, 165.

1862. **Willigen**, Die Reflexionsconstanten, *Pogg. Ann.*, CXVII, 464.

1862. Reusch, Ueber das Schillern gewisser Krystalle, *Pogg. Ann.*, CXVI, 392; CXVIII, 256; CXX, 95.
1862. Wendt, Ueber die Entstehung des Glanzes, *Pogg. Ann.*, CXVI, 627.
1863. Haughton, On the Reflection of Polarized Light from Polished Surfaces Transparent and Metallic, *Phil. Trans.*, 1863. — *Proceed. of R. S.*, XII, 168. — *Phil. Mag.*, (4), XXV, 478.
1864. Dove, Ueber die optischen Eigenschaften des Carthamin, *Berl. Monatsber.*, 1864, S. 236. — *Pogg. Ann.*, CXXII, 454. — *Phil. Mag.*, (4), XXVIII, 247. — *Ann. de chim. et de phys.*, (4), III, 501. — *Inst.*, XXXII, 4.
1866. Quincke, Ueber die elliptische Polarisation des Lichtes bei gewöhnlicher Reflexion, *Pogg. Ann.*, CXXVIII, 355.
1870. B. Kosmann, Ueber das Schillern und den Dichroismus des Hypersthens, *Jahresb. f. Miner.*, 1869.
1872. A. Potier, Ueber die Ursachen der elliptischen Polarisation durch Reflexion an durchsichtigen Körpern, *C. R.*, LXXV. Hierzu Quincke, *Pogg. Ann.*, CIIL. — Potier, *Pogg. Ann.*, CIIL. — Quincke, *Pogg. Ann.*, CXLIX.
1874. Kundt, Temporärer Dichroismus hervorgebracht durch Zug, *Pogg. Ann.*, CLI.
1876. Conroy, Polarisation des Lichtes durch Jodkrystalle, *Proc. R. Soc.*, XXV.
1877. Croullebois, Ueber die Reflexion polarisirten Lichtes, *C. R.*, LXXXIV.
1878. A. Cornu, Ueber die elliptische Polarisation in Folge der Reflexion an der Oberfläche durchsichtiger Körper, *C. R.*, LXXXVI.
1879. v. Seherr Thoss, Ueber künstlichen Dichroismus, *Wied. Ann.*, VI.
1879. Bertrand, Ueber Büschel einachsiger Krystalle, *Journ. d. Phys.*, VIII.
1879. A. Bertin, Ueber idiocyclophane Krystalle, *Ann. de chim. et de phys.*, XV.
1879. A. Cornu, Ueber die Bündel pleochroistischer Krystalle, *Zeitschr. f. Kryst.*, III.
1879. E. Mallard, Ueber die Büschel pleochroistischer Krystalle, *Zeitschr. f. Kryst.*, III.
1880. E. Lommel, Ueber die Erscheinungen, welche eine senkrecht zur optischen Achse geschnittene Platte von Magnesiumplatincyanür im polarisirten Lichte zeigt, *Wied. Ann.*, IX.
1880. E. Ketteler, Theorie der Interferenzerscheinung, welche senkrecht zur Achse geschliffene dichroitische Krystallplatten im polarisirten Lichte zeigen, *Wied. Ann.*, XI.
1881. E. Mathieu, Bemerkungen über Cauchy's analytische und mathematisch-physikalische Untersuchungen über die Theorie des Lichtes, *Journ. Math.*, (3), VII.
1881. E. Mathieu, Ueber die elliptische Polarisation durch Reflexion bei durchsichtigen Körpern für einen dem Polarisationswinkel benachbarten Einfallswinkel, *Résal Journ. Math.*, (3), VII.
1882. E. Schenck, Ueber die elliptische Polarisation des Lichtes bei Reflexion an Krystalloberflächen, *Wied. Ann.*, XV.
1882. A. v. Lasaulx, Ueber Doppelbrechung und Dichroismus, durch Druck an Krystallen der Silberhaloide hervorgerufen, *Sitzber. d. schles. Ges. f. vaterl. Cultur*, 1879.
1882. W. G. Lettsom, Ueber den Dichroismus zweier Andalusite, *Phil. Mag.*, XIII.
1883. A. C. van Ryn van Alkemade, Ueber die elliptische Polarisation bei der Reflexion an durchsichtigen Körpern.
1884. E. Mallard, Ueber den Polychroismus der Krystalle, *Bull. Soc. Min.*, VI.

10. Allgemeine Theorie der Reflexion und Brechung des polarisirten Lichtes.

1830. **Cauchy**, Mémoire sur la théorie de la lumière, *Mém. de l'Acad. des sc.*, X, 293.

1836. **Cauchy**, Note sur la lumière, *C. R.*, II, 301.

1838. **Cauchy**, Sur la réflexion et la Réfraction de la lumière produites par la surface de séparation de deux milieux doués de la réfraction simple, *C. R.*, VII, 953, 1044. — *Inst.*, VI, 393.

1839. **Cauchy**, Mémoire sur la réflexion et la réfraction de la lumière, *C. R.*, VIII, 7, 39, 114, 146, 189, 229, 272.

1839. **Cauchy**, Mémoire sur la réflexion et la réfraction d'un mouvement simple transmis d'un Système de molécules à un autre, les milieux étant isotropes, *Exerc. d'anal. et de phys. mathém.*, I, 133. — *C. R.*, VIII, 985.

1840. **Cauchy**, Considérations nouvelles sur les conditions relatives aux limites des corps. Méthode nouvelle propre à conduire aux lois générales de la réflexion et de la réfraction des mouvements simples qui rencontrent la surface de séparation de deux systèmes de molécules, *C. R.*, IX, 726.

1840. **Ettingshausen**, Cauchy's neue Methode zur Bestimmung der Intensität des reflectirten und gebrochenen Lichtes frei dargestellt, *Pogg. Ann.*, L, 409.

1842. **Cauchy**, Note sur le calcul des phénomènes que présente la lumière réfléchie ou réfractée par la surface d'un corps transparent ou opaque, *C. R.*, XV, 418.

1842. **Cauchy**, Méthode abrégée pour la recherche des lois suivant lesquelles la lumière se trouve réfléchie ou réfractée par la surface d'un corps transparent ou opaque, *C. R.*, XV, 542.

1848. **Cauchy**, Mémoire sur les conditions relatives aux limites des corps et en particulier sur celles qui conduisent aux lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière, *Mém. de l'Acad. des sc.*, XXII, 17.

1849. **Cauchy**, Mémoire sur les rayons lumineux simples et sur les rayons évanescents, *Mém. de l'Acad. des sc.*, XXII, 29.

1849. **Cauchy**, Sur la réflexion et la réfraction de la lumière et sur de nouveaux rayons, *C. R.*, XXVIII, 57.

1849. **Cauchy**, Note sur les rayons simples et les rayons évanescents, *C. R.*, XXVIII, 25. — *Inst.*, XVII, 26.

1849. **Cauchy**, Mécanique moléculaire, *C. R.*, XXVIII, 29.

1850. **Cauchy**, Note sur l'intensité de la lumière dans les rayons réfléchis par la surface d'un corps transparent ou opaque, *C. R.*, XXX, 465.

1850. **Cauchy**, Sur les rayons de lumière réfléchie et réfractée par la surface d'un corps transparent, *C. R.*, XXXI, 60.

1850. **Cauchy**, Sur les rayons de lumière réfléchie et réfractée par la surface d'un corps transparent et isophane, *C. R.*, XXXI, 225.

1850. **Cauchy**, Détermination des trois coefficients qui, dans la réflexion et la réfraction éprouvées à la surface extérieure d'un cristal, dépendent des rayons évanescents, *C. R.*, XXXI, 297.

1854. **Beer**, Herleitung der Cauchy'schen Reflexionsformeln für durchsichtige Mittel, *Pogg. Ann.*, XCI, 467.

1855. Ettingshausen, Ueber die neueren Formeln für das an einfach-brechenden Medien reflectirte und gebrochene Licht, *Wien. Ber.*, XVIII, 369.

1856. Beer, Graphische Darstellung der Amplituden und Phasenverhältnisse bei Reflexion geradlinig polarisirten Lichtes, *Wien. Ber.*, XXI, 428. — *Inst.*, XXIV, 389.

1858. Eisenlohr, Ableitung der Formeln für die Intensität des an der Oberfläche zweier isotropen Mittel gespiegelten, gebrochenen und gebeugten Lichtes, *Pogg. Ann.*, CIV, 346.

1859. Challis, On the Theory of Ellipticaly Polarized Light, *Phil. Mag.*, (4), XVIII, 285.

1859. Challis, On the Loss of Half an Undulation in Physical Optics, *Phil. Mag.*, (4), XVIII, 58.

1860. Jamin, Note sur la théorie de la réflexion et de la réfraction, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LIX, 413.

1860. Zech, Brechung und Zurückwerfung des Lichtes unter der Voraussetzung, dass das Licht in der Polarisationsebene schwingt, *Pogg. Ann.*, CIX, 60.

1860. Bertlett, On the Direction of Molecular Motions in Plane Polarized Light, *Silliman's Journ.*, (2), XXX, 336. — *Cosmos*, XVIII, 118.

1861. Briot, Note sur la théorie de la lumière, *C. R.*, LII, 393. (Schwingungsrichtung bestimmt durch Doppelbrechung.)

1861. Lang, Zur Theorie der Spiegelung und Brechung des Lichtes, *Wien. Ber.*, XIV, (2), 147. — *Cosmos*, XIX, 346. (Cauchy's Theorie, hergeleitet aus Lamé's Formeln.)

1861. Lorenz, Bestimmung der Schwingungsrichtung des Lichtäthers durch die Reflexion und die Brechung des Lichtes, *Pogg. Ann.*, CXIV, 238.

1862. Quincke, Ueber die Lage der Schwingungen der Aethertheilchen in einem geradlinig polarisirten Strahl, *Wien. Ber.*, 1862, S. 714. — *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXVIII, 220. — *Pogg. Ann.*, CXVIII, 445.

1863. Haughton, On the Reflection of Polarized Light from Polished Surfaces Transparent and Metallic, *Phil. Trans.*, 1863, p. 81. — *Proceed. of R. S.*, XII, 168. — *Phil. Mag.*, (4), XXV, 478.

1866. Briot, Mémoire sur la réflexion et la réfraction de la lumière, *Journ. de Liouville*, (2), XI, 305.

1867. Boussinesq, Théorie nouvelle des ondes lumineuses, *C. R.*, LXV, 235, 672.

1872. St. Venant, Ueber die verschiedenen Weisen, die Theorie des Lichtes darzustellen, *Ann. de chim. et de phys.*, (4), XXV.

1873. Boussinesq, Ueber die Principien einer neuen Lichttheorie, *Ann. de chim.*, (4), XXX. — *Liouville Journ.*, (2), XVIII.

1877. E. Ketteler, Beiträge zu einer endgiltigen Feststellung der Schwingungsebene des polarisirten Lichtes, *Wied. Ann.*, I.

1878. E. Ketteler, Zur Theorie der longitudinal-elliptischen Schwingungen im incompressibeln Aether, *Wied. Ann.*, III.

1879. E. Ketteler, Ueber den Uebergang des Lichtes zwischen absorbirenden, isotropen und anisotropen Mitteln und über die Mechanik der Schwingungen in denselben, *Wied. Ann.*, VII.

1881. E. Mathieu, Bemerkungen über Cauchy's analytische und mathematisch-physikalische Untersuchungen über die Theorie des Lichtes, *Journ. Math.*, (3), VII.

1881. E. Ketteler, Theorie der absorbirenden anisotropen Mittel, *Berl. Monatsber.*, 1879.

1883. V. W. Voigt, Ueber die Grundgleichungen der optischen Theorie des Herrn E. Ketteler, *Wied. Ann.*, XIX.

1883. V. W. Voigt, Zur Theorie des Lichtes, *Wied. Ann.*, XX.

1884. E. Ketteler, Erwiderung auf Herrn Voigt's Kritik, *Wied. Ann.*, XXI.
1884. W. Voigt, Duplik gegen Herrn E. Ketteler, *Wied. Ann.*, XXI.
1884. E. Ketteler, Probleme, welche die Neumann'sche Theorie nicht lösen zu können scheint. Metall- und Totalreflexion der doppeltbrechenden Medien, *Wied. Ann.*, XXII.
1884. E. Ketteler, Duplik gegen Herrn W. Voigt, *Wied. Ann.*, XXII.
1884. E. Ketteler, Die Metall- und Totalreflexion der isotropen Medien, *Wied. Ann.*, XXII.
1884. W. Voigt, Berichtigung der Duplik Herrn E. Ketteler's, *Wied. Ann.*, XXIII.
1885. E. Ketteler, Theoretische Optik, Braunschweig.

ALPHABETISCHES REGISTER.

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

WELLENTHEORIE DES LICHTES.

VON

É. VERDET.

DEUTSCHE BEARBEITUNG

VON

DR. KARL EXNER.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN.

ZWEITER BAND.

BRAUNSCHWEIG,
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.
1884.

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

WELLENTHEORIE DES LICHTES.

VON

É. VERDET.

DEUTSCHE BEARBEITUNG

VON

DR. KARL EXNER.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN.

ZWEITER BAND.

ERSTE ABTHEILUNG.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1884.

ANKÜNDIGUNG.

Das erste Heft des zweiten Bandes der deutschen Bearbeitung von Verdet's Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes umfasst die Theorie der Dispersion, die chromatische Polarisation, die circulare und elliptische Polarisation, die Lehre von den Eigenschaften des natürlichen und des partiell polarisirten Lichtes, die eingehende Berechnung der durch Krystallplatten hervorgebrachten Farbenerscheinungen bei Anwendung parallelen Lichtes, bei Anwendung convergirten Lichtes und bei Anwendung circular oder elliptisch polarisirten oder analysirten Lichtes. Neu ist der von der normalen Dispersion handelnde Theil. Derselbe giebt eine vollständige Darstellung der auf experimentellem Gebiete zu Tage geförderten Thatsachen, ferner die von Helmholtz aufgestellte Theorie nebst den Entwickelungen, welche Wüllner an diese Theorie geknüpft hat. Die Literaturverzeichnisse wurden sämmtlich sorgfältig ergänzt.

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

WELLENTHEORIE DES LICHTES.

VON

É. VERDET.

DEUTSCHE BEARBEITUNG

VON

DR. KARL EXNER.

MIT ZAHLREICHEN EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN.

ZWEITER BAND.

DRITTE ABTHEILUNG.
(Schluss des Werkes.)

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1887.

ANKÜNDIGUNG.

Dieses letzte Heft der deutschen Bearbeitung von Verdet's Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes umfasst die Abschnitte „Fresnel's Reflexionstheorie" und „Metallreflexion". Beide Abschnitte, schon im Originale in theoretischer wie experimenteller Hinsicht sehr ausführlich gehalten, wurden noch aus der neueren Literatur ergänzt und die Abhandlungsregister weitergeführt.


UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06585 2850

